复Monge-Ampère方程的几类边值问题

向 妮 著

科学出版社

复Monge-Ampère方程的几类边值问题

向 妮 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书分为五部分共五章: 第一部分介绍复 Monge-Ampère 方程的研究背景以及本书中所涉及的多复变和偏微分方程相关的预备知识; 第二部分回顾复 Monge-Ampère 方程 Dirichlet 边值问题的研究历史; 第三部分介绍关于复 Monge-Ampère 方程与 Hessian 型方程 Neumann 边值问题梯度估计的研究成果; 第四部分介绍关于复 Monge-Ampère 方程边界爆破问题的相关研究成果; 第五部分介绍在复 Hessian 方程边界爆破问题的研究结论.

本书可以作为从事完全非线性偏微分方程的科研人员的参考用书, 也可作为完全非线性偏微分方程领域研究生的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

复 Monge-Ampère 方程的几类边值问题/向妮著. —北京: 科学出版社, 2016.12

ISBN 978-7-03-051189-8

I.①复… II.①向… III.①蒙日–安培方程–边值问题–研究 IV. ①O175.26

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 321181 号

责任编辑: 李静科 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京九州迅驰传媒文化有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 12 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2016 年 12 月第一次印刷 印张: 8 3/4
字数: 130 000

定价: 58.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

复 Monge-Ampère 方程源于多重位势理论、 Calabi 猜想、最优运输、几何光学、超弦理论等问题. 由于在流体动力学、统计物理、数字图像处理、经济学、气象学和宇宙学等领域的重要应用, 该方程受到了人们的广泛关注. 复 Monge-Ampère 方程解的存在性、唯一性和正则性是复 Monge-Ampère 方程极其重要的性质, 深入研究该类方程解的性质可以进一步了解上述问题, 也可以丰富完全非线性偏微分方程理论.

在复分析中, 一个主要的问题就是在双同态映射下对区域进行分类, 在单复变研究中, Riemann 映射定理起了重要作用, 多复变中区域的分类问题变得更加复杂. Fefferman 映射问题与多复变中的区域分类关联很深. 1974 年, Fefferman 证明了 Fefferman 映射问题对于两个光滑有界严格拟凸域是成立的. 而复 Monge-Ampère 方程的边值问题与 Fefferman 映射问题紧密联系.

经典的复 Monge-Ampère 方程是一类典型的椭圆型完全非线性偏微分方程, 形如

$$\mathrm{MA}(u) := \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}\right) = f, \tag{0.1}$$

其中 u 是 $\mathbf{C}^n$ 中开集 Ω 上多重下调和函数 (简记为 PSH), $f > 0$. 1976 年, E. Bedford 与 B. A. Taylor[8] 在 P. Lelong[75] 关于多重下调和函数正流定义的基础上, 证明了当 $u \in \mathrm{PSH} \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}$ 时, 弱形式的复 Monge-Ampère 算子 $(dd^c u)^n$ 定义是合理的, 得到当复 Monge-Ampère 算子作

用于 $\mathbf{C}^2$ 光滑多重下调和函数时, 有

$$\mathrm{MA}(u) := 4^n n! \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}\right) = (dd^c u)^n, \tag{0.2}$$

并且得到连续解的存在性和唯一性等. 1982 年, E. Bedford 与 B. A. Taylor 在文献 [11] 中将复 Monge-Ampère 算子引入多重位势理论中, 推动了多重位势理论的发展. 他们指出复 Monge-Ampère 算子在多重位势中的地位犹如在经典位势理论研究中 Laplace 算子所起的作用. 这一新理论的提出加深了我们对多重下调和函数的理解, 带动了极值函数、多项式逼近以及复动力系统理论的研究. E. Bedford 在 1993 年的综述报告[50]中对多重位势理论作了全面系统的阐述. 我们也可以参看 M. Klimek 的著作 [64].

复 Monge-Ampère 方程还来源于复几何中的 Calabi 猜想. E. Calabi 断言当紧 Kähler 流形的第一陈类非负时, 任给一个第一陈类的代表必存在一 Kähler 度量使得其 Ricci 式等于此陈类代表, 同时他进一步猜想 Einstein-Kähler 度量的存在性. 郑绍远与丘成桐把对猜想的证明归结为解决复 Monge-Ampère 方程. T. Aubin 在文献 [4] 中与丘成桐在文献 [129] 中分别证明了当假设条件适当光滑时猜想的真实性. 1980 年, 郑绍远与丘成桐在文献 [37] 中解决了实 Monge-Ampère 方程的 Dirichlet 边值问题并构造出非紧复流形上的 Einstein-Kähler 度量和 Ricci 平坦度量. 丘成桐与郑绍远以及其他一些作者 (如 E. Calabi, L. Nirenberg, A. V. Pogorelov 等) 主要采用偏微分方程中连续性方法以及先验估计的技巧从方程的角度来研究 Monge-Ampère 方程解的存在性和正则性.

与此同时, J. P. Demailly 与 L. Lempert 在复 Monge-Ampère 方程的研究方面也做了许多重要工作. Demailly (参看文献 [39]—[43]) 利用复 Monge-Ampère 算子以及丘成桐在文献 [129] 中的结论证明了代数几何

中的许多定理. Lempert 在文献 [77] 中主要研究凸域上 Monge-Ampère 方程的奇异性, 他的研究成果主要应用于复分析领域.

近年来, 随着复 Monge-Ampère 方程 [13, 14, 27, 38, 89] 相关理论被逐步完善, 同时广泛应用于复几何、共形几何以及最优运输问题, 复 Monge-Ampère 方程的研究取得了很大进展. 在复几何中, 从丘成桐解决 Calabi 猜想、郑绍远与丘成桐[36, 37] 关于有界拟凸域上存在典则的完备 Einstein-Kähler 度量问题, 到田刚[107] 关于 Einstein-Kähler 度量的工作, 以及肖荫堂、Demailly 和 Donaldson 在代数几何中的一些重要问题的研究都成功运用了复 Monge-Ampère 方程的理论. 2002 年和 2006 年两届国际数学家大会上, L. Caffarelli、李岩岩、田刚、N. S. Trudinger、汪徐家、张圣容等都涉及 Monge-Ampère 方程的研究和应用.

本书分为五部分共五章: 第一部分介绍复 Monge-Ampère 方程的研究背景以及本书中所涉及的多复变和偏微分方程相关的预备知识; 第二部分回顾复 Monge-Ampère 方程 Dirichlet 边值问题的研究历史; 第三部分介绍关于复 Monge-Ampère 方程与 Hessian 型方程 Neumann 边值问题梯度估计的研究成果; 第四部分介绍关于复 Monge-Ampère 方程边界爆破问题的相关研究成果; 第五部分介绍在复 Hessian 方程边界爆破问题的研究结论.

当代自然科学日新月异, 新的研究成果层出不穷, 限于作者能力, 书中难免有不妥之处, 谨请同行和读者不吝指正. 作者希望本书能对完全非线性领域的研究生和相关领域的科研人员有所帮助和裨益.

向　妮

2016 年 10 月 10 日

目　　录

第1章 基础理论

1.1 研究背景

复 Monge-Ampère 方程与实 Monge-Ampère 方程紧密相关, 在研究实方程的过程中采用的很多方法可以推广到复的情形. 实 Monge-Ampère 方程主要来源于各类几何问题, 如等距嵌入、Minkowski 问题、预定 Gauss 曲率问题等. 该方程受到数学工作者的广泛关注和研究. 尤其是在 Dirichlet 边值问题方面:

$$
\begin{cases}
\det\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) = f(x, u, Du), & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\
u = \phi(x), & \text{在 } \partial\Omega \text{上}.
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

20 世纪 70 年代, Pogorelov 发表了三篇重要论文[96−98] 和一本著作[99], 系统地阐述了如何证明解的内部正则性, 其中在处理区域内的任意紧集上解的三阶导数估计时采用了 E. Calabi[17] 的证明思想. 1974 年, E. Calabi 和 L. Nirenberg 获得了直到边界的三阶导数估计, 并利用连续性方法得到了光滑解的存在性, 其中部分结论发表在会议文献 [93] 中. 遗憾的是, 后来他们发现在证明过程中, 对于边界附近的三阶导数估计并不完善, 仅仅能得到单边的三阶导数估计. 与此同时, 郑绍远和丘成桐[34, 35] 也对 Monge-Ampère 方程的 Dirichlet 边值问题展开了研究, 他们采用在球面上求解 Minkowski 问题的方法, 证明了 Lip $(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ 解的存在性. 更进一步地, 在文献 [36] 中, 他们利用偏微分方程的技巧给出了更为直接的证明. 在此之后, P. L. Lions[85, 87] 在不依赖于方程的前

提下, 利用 Penalty 方法独立地证明了解的存在性, 并且将结论推广到了更一般的方程.

1983 年, L. Cafferelli, L. Nirenberg, J. Spruck 撰写的论文 [28] 是当前 Monge-Ampère 方程的 Dirichlet 边值问题研究的里程碑. 他们采用先验估计和连续性方法成功地证明了全局光滑凸解的存在性和唯一性. 更多关于实 Monge-Ampère 方程的结论可以参看文献 [72]—[74], [114] 等. Krylov 证明了边界条件为常数时全局光滑解的存在性, 并将结论推广到满足某种凹形条件的完全非线性椭圆算子的情形. 同时他也考虑了抛物型的 Monge-Ampère 方程, 得到了光滑解的存在性.

实 Monge-Ampère 方程的 Dirichlet 边值问题的研究集中在有界光滑区域上, 所给的边值函数也是光滑的情形. 通常采用连续性方法来研究此类问题经典解存在性和唯一性. 由 Evans-Krylov 定理知, 只需要得到解直到二阶导数的先验估计即可, 这种方法来源于文献 [28]. 在讨论边界上的二阶导数估计时, 需要强烈地依赖于边界的几何性质, 通常也就是某种凸性. D. Hoffman, H. Rosenberg, J. Spruck[56] 和 B. Guan, J. Spruck[49] 等在考虑 Dirichlet 边界问题时将这种凸性的条件由严格下解的存在性条件替换, 实际上假设下解存在比假设区域的某种凸性要弱, 因为通常在区域的某种凸性下可以构造出下解来.

实 Monge-Ampère 方程的 Neumann 边值问题:

$$\begin{cases} \det\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) = f(x, u, Du), & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ D_\nu u = \phi(x, u), & \text{在 } \partial\Omega \text{上}. \end{cases} \tag{1.2}$$

P. L. Lions, N. Trudinger, J. I. E. Urbas[89] 最早处理实 Monge-Ampère 方程的 Neumann 边值问题, 得到了光滑解的存在性和唯一性, 其中解的最大模估计可以由凸性得到. 关于解的梯度估计, 其证明同样适用于斜

边值问题, 对于二阶导数估计, 类似于 Dirichlet 边值问题的处理思想, 通过构造辅助函数将问题转换到边界上, 再将边界上的二阶导数估计分为纯切向、切向法向混合以及纯法向三个方面来加以讨论, 然而这种技巧对于斜边值问题是失效的. 其后汪徐家[121] 得到了广义解的存在性, 并举反例说明对于斜边值问题而言, 仅仅加上光滑性条件是不能得到光滑解的. J. Urbas[118] 证明当斜边值条件是法向 C^1 扰动时光滑解存在且唯一. 李松鹰在文献 [84] 中采用不同于 J. Urbas 的办法证明了上述解的存在性.

本书的目的是讨论复 Monge-Ampère 方程, 近几十年来, 有许多关于该类方程边值问题的文献, 下面我们归纳为三个方面来介绍这一主题的研究历史.

1. Dirichlet 边值问题

1976 年, E. Bedford 与 B. A. Taylor 在文献 [11] 中考虑复 $\mathbf{C}^n$ 空间中严格拟凸域 Ω 上弱形式的复 Monge-Ampère 方程:

$$\begin{cases} u \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ (dd^c u)^n = d\mu, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u = \phi, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{1.3}$$

当方程的右边 $d\mu = f dV$, 其中 f 为非负连续函数, dV 为体积测度时证明了具有连续边值的弱多重下调和解的存在性. 进一步地, 如果假设 $f, \phi \in C^{1,1}$, 他们能得到 $C^{1,1}$ 的多重下调和解. 在此之后, E. Bedford 和 B. A. Taylor 在文献 [9], [10] 中利用变分和 Perron-Bremermann family 方法证明了弱解的存在性和唯一性. 具体而言, 在上述两篇文献中, 他们在有界严格拟凸区域上证明了多重下调和解的全局 Lipschitz 正则性, 同时在复空间的单位球上得到了多重下调和解的局部 $C^{1,1}$ 正则性. 1977 年,

N. Kerzman[63] 首次将 Fefferman 映射定理的证明与求解退化型复 Monge-Ampère 方程全局光滑性联系起来. 然而, 关于退化情形下复 Monge-Ampère 方程弱解的正则性, 1979 年, E. Bedford 与 J. E. Fornaess 举出反例证明无论方程右端函数 f, 以及边界条件 ϕ 的光滑性有多好, 都无法得到光滑解, 并说明 $C^{1,1}$ 解的最优性. 1984 年, U. Cegrell 在文献 [21] 中将 E. Bedford 与 B. A. Taylor 的结论推广到当 f 只是有界函数的情形, 得到了多重下调和解的存在性. 1992 年, U. Cegrell 与 L. Persson 在文献 [24] 中得到了当方程右端函数 $f \in L^2$ 时多重下调和解的存在性. 1993 年, U. Cegrell 与 A. Sadullaev 在文献 [25] 中证明了当 $f \in L^1$ 时不存在多重下调和解. 1994 年, S. Kolodziej 研究了方程右端 μ 为非负 Radon 测度的情形, 对测度 μ 给出控制条件下复 Monge-Ampère 方程的弱解. 由于所给的控制条件难于验证, 1998 年他在前面所做工作的基础上证明了在严格拟凸域上如果复 Monge-Ampère 方程存在下解 v 满足

$$S = \{v \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : (dd^c v)^n \geqslant d\mu, v|_{\partial\Omega} = \phi\}, \tag{1.4}$$

则存在弱解.

对于非退化的复 Monge-Ampère 方程, 在对右端函数 f 和边界函数 ϕ 给出适当的结构性条件和光滑性条件的基础上, 1985 年, L. Caffarelli, J. J. Kohn, L. Nirenberg, J. Spruck 在文献 [27] 中证明了有界严格拟凸区域上光滑解的存在性以及唯一性. 实际上, 当区域是单位球时, 存在性和正则性问题[44, 91] 退化为求解一类当右端函数为径向函数的常微分方程.

关于复 Monge-Ampère 方程, 在比严格拟凸域更一般的区域上也有一些研究成果. Z. Blocki 在文献 [13], [14] 中研究超凸 (hyperconvex) 区域上的弱形式复 Monge-Ampère 方程, 得到连续多重下调和解的存在性. 1998 年, 关波在文献 [47] 中研究非退化型的复 Monge-Ampère 方程的经

典解, 将 L. Caffarelli, J. J. Kohn, L. Nirenberg, J. Spruck 的结论推广到一般的有界区域中, 得到下解导致解的存在性并证明解的正则性. 至此对于复 Monge-Ampère 方程弱解的 Hölder 连续性还没有任何结果. 2004 年, 李松鹰在文献 [83] 中引入有限型弱拟凸区域, 在对边值不加结构限制的情况下证明在 m 有限型多重下调和区域上, 如果 $f^{\frac{1}{n}} \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, 边界值 $\phi \in C^{m\alpha}(\partial\Omega)$, 复 Monge-Ampère 方程存在 $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ 的弱解. 同时他举出反例说明无限型多重下调和区域的解没有 Hölder 连续性.

2. Neumann 边值问题

1994 年李松鹰在文献 [82] 中, 研究严格拟凸域上具有 Neumann 边值条件的复 Monge-Ampère 方程, 证明了解的存在性、唯一性以及正则性. 虽然证明的方法仍然是先验估计和连续性方法, 但是与实 Monge-Ampère 方程的 Neumann 边值问题的情形相比较, 复的问题有着本质的区别. 这是因为, 前者关于梯度估计的证明强烈地依赖于解的凸性, 然而后者的研究对象是多重下调和函数, 它并没有类似的凸性, 相反它具有某种奇性. 正因为如此, 后者在梯度估计与二阶导数估计时难度相当. 因此, 李松鹰在梯度估计时, 采用了欧氏空间中证明二阶导数的技巧, 先取辅助函数将内部估计约化至边界, 再在边界上分成法向、切向、非切非法方向来分别讨论非退化半线性 Neumann 边值条件下经典解的梯度估计. 利用类似的技巧进一步得到二阶导数的估计, 最后利用连续性方法和椭圆方程的一般理论得到解的存在性、唯一性以及正则性; 并指出在退化情形时, 无论我们给出数据的光滑性多强, 也仅能得到 $C^{1,1}$ 的解.

3. 边界爆破问题

1980 年, 郑绍远与丘成桐在研究非紧复流行上的复 Kähler 度量的存在性时发现该问题最终转化为一个复 Monge-Ampère 方程, 形如

$$\det(g_{i\bar{j}} + u_{i\bar{j}}) = e^{Ku} e^F \det(g_{i\bar{j}}). \tag{1.5}$$

在文献 [37] 中, 他们采用偏微分方程的技巧讨论复 Monge-Ampère 方程

$$\begin{aligned} &\det(u_{i\bar{j}}) = e^{(n+1)u}, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ &(u_{i\bar{j}}) > 0, \ u = \infty, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{aligned} \tag{1.6}$$

边界爆破 (blow-up) 问题解的存在性. 对于实 Monge-Ampère 方程边界爆破问题, 2004 年, 关波与简怀玉在文献 [48] 中讨论了凸域上此问题解的存在性, 并给出近似最优的增长性条件. 就实的情形而言, 解的导数估计依赖于 Pogorelov 的内部估计. 2000 年, Z. Blocki 在文献 [14] 中研究了凸域上复 Monge-Ampère 方程解的内部正则性, 得到解的内部估计. 2002 年, B. Ivarsson 在文献 [57] 中对 Z. Blocki 的结果作了推广, 得到了严格拟凸域上解的内部正则性.

1.2 预备知识

1.2.1 多复变的预备知识

本小节将介绍一些多复变的预备知识, 参看 [130]. 令 $z_1, \cdots, z_n$ 为 $\mathbf{C}^n$ 的复坐标系, $z_j = x_j + iy_j, j = 1, \cdots, n$. 多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. 记 $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$. 令

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbf{C}^n : |z_j - z_{0,j}| \leqslant r, \ j = 1, \cdots, n\}, \tag{1.7}$$

其中 $z_0 = (z_{0,1}, \cdots, z_{0,n})$. $B(z_0, r)$ 称为 $\mathbf{C}^n$ 中以 z_0 为球心, r 为半径的球. $B(z_0, r)$ 与 $\mathbf{R}^{2n}$ 中实变量定义的球是一样的. 区域 $D \subset \mathbf{C}^n$ 即为 $\mathbf{C}^n$ 中的连通开集. 设 $z_0 \in D$, 则可取 $r > 0$ 充分小, 使得 $B(z_0, r) \subset D$. $B(z_0, r)$ 称为 z_0 的 r 球形邻域.

现设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的区域, Ω 上的复值函数可以表示为

$$
\begin{aligned}
f(z) &= u(z) + iv(z) \\
&= u(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n) + iv(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n),
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

$f(z)$ 连续当且仅当 $u(z)$ 和 $v(z)$ 分别是 Ω 上的连续函数. 若 $f(z)$ 的实部 $u(z)$ 和虚部 $v(z)$ 都是 Ω 上关于实变量 $(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n)$ 的 r 阶连续可导函数, 则称 $f(z)$ 为 Ω 上的 C^r 函数. 定义复值函数 $f(z)$ 关于实变量的偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} + i\frac{\partial v}{\partial x_j}, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} = \frac{\partial u}{\partial y_j} + i\frac{\partial v}{\partial y_j}. \tag{1.10}$$

定义 $f(z)$ 关于实变量的微分为

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j. \tag{1.11}$$

首先利用微分的线性性质, 将 z_j 和 $\bar{z}_j$ 看作 x_j 和 y_j 的函数, 得到

$$dz_j = dx_j + idy_j, \quad d\bar{z}_j = dx_j - idy_j, \tag{1.12}$$

则

$$dx_j = \frac{dz_j + d\bar{z}_j}{2}, \quad dy_j = \frac{dz_j - d\bar{z}_j}{2i}. \tag{1.13}$$

又因为

$$d = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial}{\partial y_j} dy_j \right), \tag{1.14}$$

综合以上关系整理后得

$$d = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j} \right) dz_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j} \right) d\bar{z}_j \right]. \tag{1.15}$$

另一方面, 对于复变量我们期望得到与实变量类似的结论, 可以将微分 d 表示为下面的形式:

$$d = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \right). \tag{1.16}$$

因此在等式 (1.1) 中, 令

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right). \tag{1.17}$$

由此我们得到微分 d 以及偏导数关于复变量的表示关系. 以此为基础, 不难得到函数关于复变量的各种高阶偏导数. 对于 $\mathbf{C}^n$ 中区域 Ω 上的函数 $f(z)$, 如果关于复变量 z_j 和 $\bar{z}_j$ 的所有小于等于 r 阶的偏导数都存在且连续, 则称 $f(z)$ 为 Ω 上的 C^r 函数.

令

$$\partial = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j} dz_j, \quad \bar{\partial} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j, \tag{1.18}$$

∂ 和 $\bar{\partial}$ 分别称为关于复变量在 $(1,0)$ 方向和 $(0,1)$ 方向的微分, 这时 $d = \partial + \bar{\partial}$. 进一步地, 对于复变量的偏导数, 利用直接计算得

$$\frac{\partial z_i}{\partial z_j} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial \bar{z}_i}{\partial \bar{z}_j} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial \bar{z}_i}{\partial z_j} = 0, \quad \frac{\partial z_i}{\partial \bar{z}_j} = 0. \tag{1.19}$$

这一关系可以看作实变量关于偏导数的关系式的推广. 然而这其中的含义是不同的. 特别地, x_i 与 y_i 是相互独立的变量, 各自取值不互相依赖, 但是 z_i 与 $\bar{z}_i$ 作为变量并不是相互独立的.

接下来将引入下调和函数的概念. 我们知道在欧氏空间 $\mathbf{R}^2$ 上,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.20}$$

称为 Laplace 算子. 若区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 上的光滑函数 u 满足 $\Delta u = 0$, 则称 u 为调和函数. 复空间中的 Laplace 算子可以表示为

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}. \tag{1.21}$$

对于平面区域上二阶可导的函数 u,

$$\frac{1}{4}\Delta u = \left[\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}\right] \tag{1.22}$$

就是 u 的复 Hessian 矩阵. 要了解满足 $\Delta u \geqslant 0$ 的函数, 我们先从调和函数开始讨论.

对于平面上的调和函数而言, Laplace 方程表示其复 Hessian 矩阵 $\left[\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}\right]$ 恒为零. 而作为其推广, 定义如下.

定义 1.1 如果 $\forall z_0 \in \Omega$, 存在常数 $r = r(z_0) > 0$ 使得 $B(z_0, r) \subset \Omega$ 且 u 可以展开成一个绝对收敛的幂级数列:

$$u(z) = \sum_{\alpha} a_\alpha (z - z_0)^\alpha, \tag{1.23}$$

其中 $z \in B(z_0, r)$, 则称函数 $u : \Omega \to \mathbf{C}$ 为全纯的.

定义 1.2 函数 $u : \Omega \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ 在 $z_0 \in \Omega$ 处上半连续, 如果

$$\limsup_{z \to z_0} u(z) \leqslant u(z_0). \tag{1.24}$$

进一步地, 如果在 Ω 内每一点处都上半连续, 则称该函数在 Ω 内上半连续.

定义 1.3 假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为一个区域, $u : \Omega \to \mathbf{C}$ 为 C^2 光滑函数. 如果它满足下面的微分方程:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) u = 0, \tag{1.25}$$

我们称 u 为调和的. 自然地, 如果 u 在 Ω 上是全纯的, 那么它一定是调和的.

定义 1.4 如果对于上半连续函数 u 满足下列结论: 对于任意 $z \in \Omega$ 和 $r > 0$ 满足 $\overline{B}(z, r) \subset \Omega$, 实值函数 h 在 $\overline{B(z, r)}$ 上连续, 在 $B(z, r)$ 内