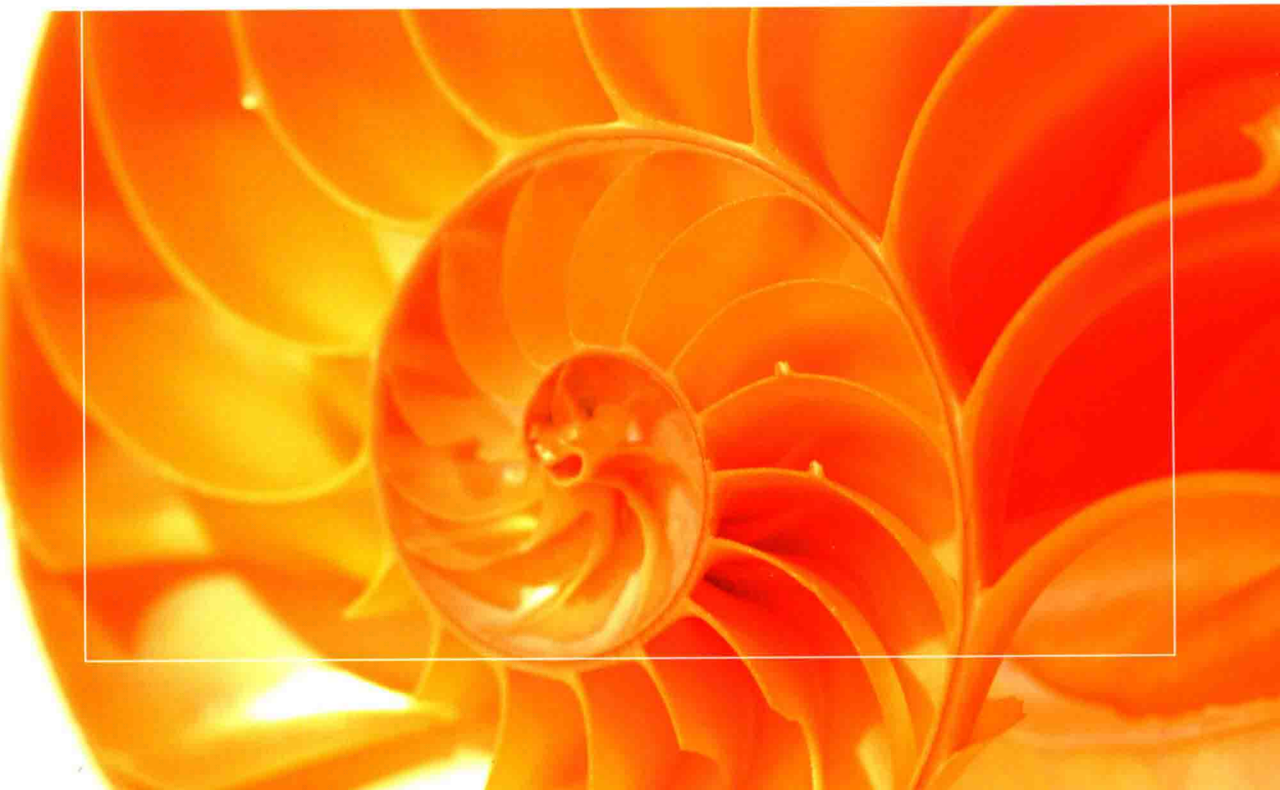
从初等数学到高等数学

第1卷

彭翁成 编著

中国科学技术大学出版社



从初等数学到高等数学

CONG CHUDENG SHUXUE DAO GAODENG SHUXUE

第1卷

彭翕成 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是希望在中学数学和高等数学之间搭一座桥梁.以中学数学为起点,逐步展示高等数学的基本思想和方法,便于大学新生快速适应高度抽象的高等数学.反过来,介绍如何把握高等数学的高观点,更好地服务于中学数学的教与学.

本书用数学分析、线性代数和高等几何等现代数学的思想方法解释和理解中学数学,力求用通俗易懂的语言,深入浅出地揭示现代数学的思想方法,找出现代数学与中学数学的结合点,从高观点来引领初等数学,指导中学数学教学.

本书案例翔实,思想新颖,方法简明,可启迪读者的思维,开阔读者的视野,提高读者提出问题、分析问题与解决问题的能力,适合高中学生、教师、师范生,以及数学教育研究者参考.

图书在版编目(CIP)数据

从初等数学到高等数学.第1卷/彭翕成编著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2017.1
ISBN 978-7-312-03792-4

Ⅰ.从… Ⅱ.彭… Ⅲ.数学教学—教学研究 Ⅳ.O1-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 254194 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷 安徽国文彩印有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 15.75
字数 403 千
版次 2017 年 1 月第 1 版
印次 2017 年 1 月第 1 次印刷
定价 36.00 元

前　言

学习高等数学，对中学数学教学有何帮助？这是很多师范生常有的疑惑.这个疑惑甚至等到他们走上工作岗位还未消除.

如果有师范生跑去问他的大学老师，老师可能会这么回答：

深入才能浅出，居高才能临下.

要给学生一杯水，教师必须有一桶水.

只有深刻掌握了数学的思想、方法，对数学本质认识清楚，才能高屋建瓴，胸有成竹.

学习了高等数学去教初等数学，遇到一些看似平凡的内容，你可以看出内在的不平凡，这叫举轻若重.遇到一些在初等数学里解释不清的疑难问题，则可透过本质，轻松化解，这叫举重若轻.

……

如果师范生追问：能否举例说明，我怎么感觉大学四年所学对将来的中学教学好像帮助不大，特别是偏微分方程、复变函数这些课程？

这时大学老师常常语塞，大多又会回到前面那些大道理："居高临下，深入浅出……".

大道理好讲，具体细致的工作不好做.

其实这个问题由来已久，也不只是困惑师范生和中学老师.这个问题也引起了很多专家学者的思考，他们也尝试着回答它.

F•克莱因曾提出一个名词——双重忘记，意思是进入大学学习高等数学忘记了中学数学，毕业后去当中学老师又忘记了高等数学.

双重忘记，这是很多人的感受.进入大学学习，感觉不到大学数学和高中数学有什么联系，好像是重新学习一个新东西，而不是在前面的基础上提升.而走上中学教师的岗位之后，所学的高等数学知识又不大用得上.

F•克莱因为了解决这一问题，写了《高观点下的初等数学》，这已经成为数学教育研究领域的经典名著.

此后，类似著作不断涌现，如张奠宙、邹一心的《现代数学与中学数学》算得上代表性著作.若不纠结于书名，很多名家所写的普及性著作都可以算作此类，如上海教育出版社的《初等数学论丛》、中国科学技术大学出版社的《数林外传系列》等.

初等数学研究，是一个大课题；高等数学研究，又是一个大课题.将两者综合研究，涵盖更广，且绝不是两者的简单相加.对于这么大的一个课题，也绝不是几个人，发几篇文章，出几本书就能研究清楚的.需要不断有人研究，向前推进.更何况，初等数学和高等数学的研究内容也在不断变化着.

那如何研究初等数学和高等数学二者之间的关系呢？角度有很多.F•克莱因作为著名的数学家，由于自身深厚的数学功底，他选择了居高临下这个角度.这样的研究角度可以让人看清楚一些初等数学问题的背景，提高数学修养.但这样写也存在一些问题，譬如在某些

问题上,作者所站高度过高,超出了一般读者的接受能力;又如作者主要是以数学家的身份在写这本书,与中学数学的联系较少.

能否从初等数学出发,向高等数学走去呢?这当然也是可以考虑的一个研究角度.这也正是本书书名的来由.

"从",表示出发点;"到",表示希望前进的方向.

有读者看了我这方面的几篇文章,问:"为何你研究这么浅?找的题目大多是初等数学能解决的,你为何不多找些初等数学解决不了的?这才能凸显出高等数学的优势."

这是由于这位读者对我的写作定位不了解.我的立足点就是初等数学,希望向高等数学走去,但能走到哪一阶段,不好说.如果是要找一些初等数学解决不了的问题,这太容易了,高等数学习题集里比比皆是.但要找一些题目,可以从初等数学和高等数学两个角度来思考,从而加深对数学的理解,这才是不容易的.

必须承认,与《高观点下的初等数学》相比,《从初等数学到高等数学》在书名上弱了不少.这一方面是因为我学识有限,谈不出什么高观点,就算想鼓足勇气,做个虚假广告,冒充高观点,但也怕读者质疑:凭什么说你的观点高?高在哪?献丑不如藏拙,因此还是老实一点为好.另一方面,是因为我也受到了弗赖登塔尔的影响.

弗赖登塔尔曾问:为什么中学数学和大学数学之间缺口的弥补工作拖延了这么久,至今仍未实现?随着数学的社会重要性日益增加,沟通缺口的迫切要求也更强烈.今天我们若想实现F·克莱因的想法,去教"高观点下的初等数学",就必须从接近中学数学的较低水平做起.

这说明,高观点和低起点并不是对立的.

关于初等数学和高等数学的界定,学术界一直没有定论.

龚昇先生认为:"将微积分称为高等数学是习惯上的说法,微积分在牛顿时代自然是高等的,现在看来,只能说是数学的初步知识."

单墫先生表示:"其实研究本身并无高等、初等的分别.得到高深的结论是新发现,解决初等的问题同样是新发现,都是人类向未知领域的迈进.而且很多人们耳熟能详的大问题,如费马大定理,如哥德巴赫问题,论起它们的出身,无不属于初等数学."

而在本书中,则认为使用了导数、行列式这些知识就算是高等数学了,虽然这些知识在某些地区的中学教材中已经出现.

我从读大学起就研究这一问题,主要是从以下几个角度入手:

(1) 对照初、高中教材,查看每一个知识点,想想用高等数学知识怎么看待;

(2) 对照大学教材,查看每一个知识点,想想如何与中学数学知识联系;

(3) 想想哪些中学知识是大学里用得比较多的,初等数学起到了什么样的基础作用;

(4) 在解题中学习理解数学知识,找一些题目,分别用初等数学、高等数学两个视角看,有的还给出多种解法进行对比.

还有一些着眼点,一散开,比最初想象的篇幅大很多,所以最后决定先将精力集中在微积分和线性代数上.将来若有机会,再考虑出版续集,甚至是系列丛书.

我虽有这么宏伟的设想,但也清楚,自己不是写这书的最佳人选.我一不在中学教书,二不教高等数学,属于两不靠.我认识一些对中学数学和大学数学都有研究的朋友,也曾"怂恿"他们来写这方面的书籍,因为我觉得他们能比我做得更好,但他们有的说忙,有的则过于自谦.

说实话，找他们多了心里也烦.蜀之鄙有二僧，说起去南海，当然富和尚更有优势，但最终却是穷和尚先去了.求人不如求己，自己动手，丰衣足食.我尝试着做这个工作，也算对大学时代苦苦思考的这一问题做个交代，也希望给还在思考这个问题的朋友一些启发.

我曾经将本书的部分章节发表在新浪博客上，得到了读者的鼓励，他们都期待着本书早日出版，特别是彭翁成QQ读者群(306162497)里的朋友.他们说:“早点出版，即使并不是那么完美，您这么用心做这件事情，相当不容易了.相信您这本书的出版，必将带动这个课题的研究，以及相关书籍的出版.”

安慰的话，是不大可靠的，我也一向不信抛砖引玉这个说法.不然可做个实验，别人抛个砖，你真的愿意抛个玉吗？玉要出来，是自己想出来的，和前面的砖关系不大.

只能说，写这本书，我尽力了，真的是集腋成裘.图书馆十多排微积分、线性代数习题集都快被我翻遍了.因为我固执地认为:“居高临下，深入浅出”这样的大道理当然是没有错的，但“居高临下，深入浅出”如何操作，却少有人提，语焉不详.要想真的说服人，还得要一个个具体的案例.目前已有的好案例还不多，很多书籍都是抄来抄去，可恭维为经典案例长盛不衰，也可讥笑为老生常谈，所以很有必要扎扎实实做一些案例整理和创新研究.

本书假定读者群为:数学教育方向的师范生，刚进入大学对高等数学学习不适应而希望借助初等数学基础研究高等数学的大一新生，学有余力特别是希望参加自主招生的高中生，大学、中学数学老师，以及广大的数学教育研究者、数学解题研究者.

如果本书将来某一天能成为师范生用的教材，或是中学老师进修的讲义，我将感到无比高兴.

我的老师张景中先生多次语重心长地对我说:“你要是懂一点微积分就好了，那么你可以做更深入一点的研究.”可见在张师看来，我是一点微积分都不懂的.现在却偏偏出版了这样一本书，写得如何，只能由读者来评判了.欢迎读者批评指正.

杨春波老师校对了本书初稿，使本书得到了进一步的优化，在此表示感谢.

本书出版得到以下课题资助：

(1) 国家科技支撑计划课题(2014BAH22F01):中小学师资培训公共服务体系关键技术及标准规范研究；

(2) 华中师范大学中央高校基本科研业务费专项资金(CCNU15A02006):面向几何教学的几何约束算法研究.

彭翁成

2016年中秋节于武昌桂子山

目　　录

1　一题多解　架构初等、高等数学桥梁

一题多解，是解题研究中长盛不衰的研究点.

用多种方法解答同一道数学题，其好处是明显的.不仅将多个知识点，以同一道题为载体串联起来，达到牢固掌握和运用所学知识的目的，更重要的是，通过多角度的思考，不同解法的分析比较，可以寻找到解题的最佳途径和方法，培养创造性思维和能力.

谷超豪先生有这样一首诗：

"人言数无味，我道味无穷.良师多启发，珍本富精蕴.解题岂一法，寻思求百通.幸得桑梓教，终生为动容."

这首诗是谷先生为母校温州中学90周年校庆所作的，感谢母校的培养.其中"解题岂一法，寻思求百通"一句可理解成一题多解的研究，使得单个知识形成知识网络，一通百通.

丘成桐先生在北师大附中110周年校庆的演讲中，也极力推崇一题多解.

"我听说很多小学或是中学的老师希望学生用规定的方法学习，得到老师规定的答案才给满分，我觉得这是错误的.

"数学题的解法是有很多的，比如勾股定理的证明方法有几十种，不同的证明方法帮助我们理解定理的内容.19世纪的数学家高斯，用不同的方法构造正十七边形，不同的方法来自不同的想法，不同的想法导致不同方向的发展.

"所以数学题的每种解法有其深厚的意义，你会领会不同的思想，所以我们要允许学生用不同的方法来解决."

一题多解的研究由来已久.同一个问题，用代数方法解，用几何方法解，用三角方法解……这些解法大都局限在初等数学领域.

而近年来，将一个问题用初等数学和高等数学的方法来解决，成为研究热点.这一方面是由于越来越多的高考题、竞赛题，特别是自主招生题，都或隐或现有着高等数学的背景，另一方面也由于中小学老师对高观点下的解题研究越发重视，特别是高校教师的参与，使得初等数学和高等数学的结合更加紧密.

高等数学和初等数学并没有严格的界限.

徐利治先生也认为："由于数学科学是一个有机统一体，许多分支学科都有共同的客观本原，这就决定了初等数学与高等数学必然是互通的.例如，高等数学中的许多基本概念与思想方法，都可以在初等数学中找到它们的具体背景和原型.另一方面，又可以看到初等数学中的一些命题、公式和定理如何在高等数学中取得应用上更为宽广的抽象形式.诸如此类，都说明了初等、高等数学在内容与方法上的统一性.

"众所周知，已故的杰出数学家华罗庚与匈牙利著名数学家爱多士等都特别重视用初等方法求解高等数学问题，以及用初等方法证明高等数学定理.事实上，数学中的初等方法和初等证明最能揭示问题与定理的本质，还能显示数学美的特征，故最能激发和满足人们的好奇心和审美情趣.正是这个原因，20世纪40年代中期美国数学学会将菲尔兹奖颁发给了塞

尔贝格和爱多士,以奖赏他们各自独立地用初等方法证明了素数理论中的核心定理——素数分布定理."

中学老师回过头来学习高等数学,其目的还是要落脚在初等数学问题上.基于此,我们认为可以寻找一些题目,分别用高等数学和初等数学方法来解,互相对比看看各自的特色,加深对高等数学和初等数学的理解.这些题目自然也成了沟通高等数学和初等数学之间天然的桥梁.

1.1　代　　数

例 1　若 $ax+by=1, bx+cy=1, cx+ay=1, ac-b^2\neq 0$,求证:$ab+bc+ca=a^2+b^2+c^2$.

证法 1　由 $ax+by=1, bx+cy=1$ 得 $acx+bcy=c, b^2x+bcy=b$,两式相减得 $x=\dfrac{b-c}{b^2-ac}$.同理得 $y=\dfrac{b-a}{b^2-ac}$,代入 $cx+ay=1$ 得 $c\dfrac{b-c}{b^2-ac}+a\dfrac{b-a}{b^2-ac}=1$,所以 $ab+bc+ca=a^2+b^2+c^2$.

看到上述题目和解答,第一感觉就是条件 $ac-b^2\neq 0$ 多余.因为上述证明稍加改写,就可去掉这个条件.

证法 1(改写)　由 $ax+by=1, bx+cy=1$ 得 $acx+bcy=c, b^2x+bcy=b$,两式相减得 $(b^2-ac)x=b-c$.同理得 $(b^2-ac)y=b-a$,代入 $cx+ay=1$,即 $(b^2-ac)cx+a(b^2-ac)y=b^2-ac$, $c(b-c)+a(b-a)=b^2-ac$,所以 $ab+bc+ca=a^2+b^2+c^2$.

这样一来,b^2-ac 不出现在分母上,不管其是否为 0,都不受影响.至于将 $cx+ay=1$ 两边同乘以 b^2-ac,也无须考虑 b^2-ac 是否为 0.

证法 2(武汉陈起航提供)

$$\begin{aligned} ab+bc+ca &= ab(ax+by)+bc(bx+cy)+ca(cx+ay) \\ &= a^2(bx+cy)+b^2(cx+ay)+c^2(ax+by)=a^2+b^2+c^2. \end{aligned}$$

证法 3

$$ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2=\begin{vmatrix} a & b & -1 \\ c & a & -1 \\ b & c & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & ax+by-1 \\ c & a & cx+ay-1 \\ b & c & bx+cy-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & a & 0 \\ b & c & 0 \end{vmatrix}=0.$$

证法 4　方程组 $\begin{cases} ax+by-1=0 \\ bx+cy-1=0 \\ cx+ay-1=0 \end{cases}$ 有非零解 $(x,y,-1)$,所以 $\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix}=0$,展开得 $ab+bc+ca=a^2+b^2+c^2$.

后面三种证法表明,无须考虑 b^2-ac 是否为 0.题目中加上 $ac-b^2\neq 0$ 这一条件,可能是命题者为了降低难度,考虑到中学生更习惯 $x=\dfrac{b-c}{b^2-ac}$,而不是 $(b^2-ac)x=b-c$.

进一步想,就会发现条件 $ac-b^2\neq 0$ 纯属画蛇添足.因为所求等式 $ab+bc+ca=a^2+b^2+c^2$ 可转化为 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$,等价于 $a=b=c$,可推出 $ac-b^2=0$.

这意味着条件 $ac-b^2\neq 0$ 不仅多余，而且还造成了矛盾. 添上脚的蛇也就不再是蛇，添上矛盾条件的题也就不再是合格的题了.

例 2 证明：设 a,b,c 互不相等，则

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c.$$

证法 1 改证

$$-a^3(b-c)-b^3(c-a)-c^3(a-b)=(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).$$

根据对称性，只研究 a 即可. 显然两边 a^3 的系数都是 $-(b-c)$，而 a 的系数左边为 b^3-c^3，右边为 $(b-c)(-bc+bc+c^2+b^2+bc)=b^3-c^3$，所以原式成立.

证法 2 设 $D=\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，按第一行展开得

$$D=a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b).$$

而

$$D=\begin{vmatrix} a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \\ a-b & b-c & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)(a^2+ab-c^2-bc)=(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c).$$

两边同除以 $(a-b)(b-c)(a-c)$，命题得证.

例 3 已知 a,b,c 为互不相等的三个实数，证明：$\dfrac{a-b}{1+ab}+\dfrac{b-c}{1+bc}+\dfrac{c-a}{1+ca}$ 不为 0.

证法 1 只需证明

$$\begin{aligned} F(a,b,c)=&(a-b)(1+bc)(1+ca)+(b-c)(1+ab)(1+ca)\\ &+(c-a)(1+ab)(1+bc)\end{aligned}$$

不为 0 即可. 而

$$\begin{aligned} F(a,b,c)&=(a-b)(1+bc)(1+ca)+(b-c)(1+ab)(1+ca)\\ &\quad+(c-a)(1+ab)(1+bc)\\ &=(a-b)+(a^2-b^2)c+(ca-bc)abc\\ &\quad+(b-c)+(b^2-c^2)a+(ab-ca)abc\\ &\quad+(c-a)+(c^2-a^2)b+(bc-ab)abc\\ &=(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0.\end{aligned}$$

证法 2 设 $a=\tan\alpha,b=\tan\beta,c=\tan\gamma$，其中 $\alpha,\beta,\gamma\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. 由 a,b,c 互不相等可知 α,β,γ 互不相等.

$$\begin{aligned}\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}+\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{1+\tan\beta\tan\gamma}+\frac{\tan\gamma-\tan\alpha}{1+\tan\gamma\tan\alpha}\\ &=\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)\\ &=[1-\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)]\tan[(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)]\\ &\quad+\tan(\gamma-\alpha)\\ &=\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha)\neq 0.\end{aligned}$$

证法 3 固定 a,b，将 c 视为变量 x，考虑函数 $F(a,b,x)=(a-b)(1+bx)(1+ax)+$

$(b-x)(1+ab)(1+ax)+(x-a)(1+ab)(1+bx)$中 x^2 的系数$(a-b)ab-a(1+ab)+(1+ab)b=b-a\neq 0$,所以 $F(a,b,x)$为二次多项式,且二次项系数不为 0,至多有两个零点,而显然 $x=a$ 和 $x=b$ 是$F(a,b,x)$的零点,所以不存在其他的零点.而 a,b,c 互不相等,所以 $F(a,b,c)\neq 0$.

评析　证法 1 属于初中解法,靠的是耐心细致,不怕麻烦,多项式展开时注意对称性,方便消去.证法 2 是根据表达式的形式,联想三角公式,进行转化.证法 3 看似和证法 1 类似,但存在本质的不同,利用了多项式方程根的个数来分析.

有些人看到$\dfrac{a-b}{1+ab}$马上就进行三角代换,已经形成了条件反射.我们也要想一想,代数问题能否用代数方法解决?能否不用高中知识,初中方法也能解决?

例 4　已知$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$,求证:$x-y=y-z$.

证法 1　由于

$$\begin{aligned}(z-x)^2-4(x-y)(y-z)&=[(x-y)+(y-z)]^2-4(x-y)(y-z)\\&=[(x-y)-(y-z)]^2=0,\end{aligned}$$

所以 $x-y=y-z$.

证法 2　由于

$$\begin{aligned}(z-x)^2-4(x-y)(y-z)&=z^2+x^2-2zx-4xy+4xz+4y^2-4yz\\&=z^2+x^2+4y^2-4xy+2xz-4yz\\&=(z+x-2y)^2=0,\end{aligned}$$

所以 $x-y=y-z$.

证法 3　由于

$$\begin{aligned}(z-x)^2-4(x-y)(y-z)&=\begin{vmatrix}z-x & 2(x-y)\\ 2(y-z) & z-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2y-z-x & -2y+x+z\\ 2(y-z) & z-x\end{vmatrix}\\&=(2y-z-x)\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2(y-z) & z-x\end{vmatrix}=(2y-z-x)^2,\end{aligned}$$

所以 $x-y=y-z$.

评析　证法 1 使用了$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$,证法 2 使用了$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$,算是基本公式的应用.证法 1 相对简单.证法 3 相对而言,没有优势,但这样的证法可应用于其他因式分解的问题,值得注意.

例 5　设$\dfrac{y-z}{y+z}=a,\dfrac{z-x}{z+x}=b,\dfrac{x-y}{x+y}=c$,求证:$a+b+c+abc=0$.

证法 1

$$\begin{aligned}&a+b+c+abc\\&=\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}+\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}\cdot\frac{z-x}{z+x}\cdot\frac{x-y}{x+y}\\&=\frac{(y-z)(z+x)(x+y)+(z-x)(y+z)(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\\&\quad+\frac{(x-y)(y+z)(z+x)+(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\\&=\frac{[(y-z)(z+x)+(z-x)(y+z)](x+y)+(x-y)[(y+z)(z+x)+(y-z)(z-x)]}{(x+y)(y+z)(z+x)}\end{aligned}$$

$$= \frac{2z(y-x)(x+y)+2z(y+x)(x-y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = 0.$$

证法 2 由已知得$\begin{cases}(a-1)y+(a+1)z=0\\(b+1)x+(b-1)z=0\\(c-1)x+(c+1)y=0\end{cases}$.若 $xyz\neq0$,将其看作是关于(x,y,z)的齐次线性方程组,它有非零解,则$\begin{vmatrix}0 & a-1 & a+1\\ b+1 & 0 & b-1\\ c-1 & c+1 & 0\end{vmatrix}=0$,展开得 $a+b+c+abc=0$;若 $xyz=0$,不妨设 $x=0$,则 $c=-1,b=1$,于是 $a+b+c+abc=a-a=0$.

例 6 解方程组$\begin{cases}x+ay+a^2z+a^3=0\\x+by+b^2z+b^3=0\\x+cy+c^2z+c^3=0\end{cases}$,其中 a,b,c 互不相等.

解法 1

$$D=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a),$$

$$D_x=\begin{vmatrix}-a^3 & a & a^2\\-b^3 & b & b^2\\-c^3 & c & c^2\end{vmatrix}=-abc\begin{vmatrix}a^2 & 1 & a\\b^2 & 1 & b\\c^2 & 1 & c\end{vmatrix}=-abcD,\quad x=\frac{D_x}{D}=-abc,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & -a^3 & a^2\\1 & -b^3 & b^2\\1 & -c^3 & c^2\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca),\quad y=\frac{D_y}{D}=ab+bc+ca,$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1 & a & -a^3\\1 & b & -b^3\\1 & c & -c^3\end{vmatrix}=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c),\quad z=\frac{D_z}{D}=-(a+b+c).$$

解法 2 设 $f(t)=x+ty+t^2z+t^3=0$,由 $f(a)=f(b)=f(c)=0$ 知 $f(t)$被$(t-a)\cdot(t-b)(t-c)$整除.设 $f(t)=k(t-a)(t-b)(t-c)$,比较 t^3 的系数,得 $k=1$.所以

$$\begin{aligned}f(t)&=x+ty+t^2z+t^3=(t-a)(t-b)(t-c)\\&=-abc+(ab+bc+ca)t-(a+b+c)t^2+t^3,\end{aligned}$$

比较系数得 $x=-abc,y=ab+bc+ca,z=-(a+b+c)$.

例 7 设 a,b,c 为互不相等的三个实数,则三个方程 $ax^2+2bx+c=0,bx^2+2cx+a=0,cx^2+2ax+b=0$ 无公共实根.

证法 1 设有公共解 X,代入三式并相加,则$(a+b+c)(X+1)^2=0$.若 $X=-1$,则 $a-2b+c=0,b-2c+a=0$,两式相减得 $b=c$,矛盾.若 $a+b+c=0$,则 a,b,c 必有两个同号(含 0),不妨设 $a,b\geqslant0,c<0$,则由 $bx^2+2cx+a=0$ 知 $x>0$,又不妨设 $x\geqslant1$,否则三个方程都除以 x^2,所以 $-c=ax^2+2bx\geqslant a+2b\geqslant a+b$.而 $-c=a+b$,所以 $x=1,b=0$,由第二个方程 $2c+a=0$,结合 $a+b+c=0$,得 $a=b=c=0$,矛盾.

证法 2 设有公共解 X,$\begin{cases}aX^2+2bX+c=0\\bX^2+2cX+a=0\\cX^2+2aX+b=0\end{cases}$有非零解,则$\begin{vmatrix}X^2 & 2X & 1\\1 & X^2 & 2X\\2X & 1 & X^2\end{vmatrix}=0$,解得

$X=-1$,则 $a-2b+c=0$,$b-2c+a=0$,两式相减得 $b=c$,矛盾.

例 8 设 a,b,c 为已知的互不相等的数,解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a+b+c \\ ax_1+bx_2+cx_3=a^2+b^2+c^2 \\ bcx_1+cax_2+abx_3=3abc \end{cases}.$$

解 设 $y_1=x_1-a$,$y_2=x_2-b$,$y_3=x_3-c$,则已知方程组转化为

$$\begin{cases} y_1+y_2+y_3=0 \\ ay_1+by_2+cy_3=0 \\ bcy_1+cay_2+aby_3=0 \end{cases},$$

而 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$,所以方程组 $\begin{cases} y_1+y_2+y_3=0 \\ ay_1+by_2+cy_3=0 \\ bcy_1+cay_2+aby_3=0 \end{cases}$ 只有零解,$y_1=x_1-a=0$,$y_2=x_2-b=0$,$y_3=x_3-c=0$,故 $x_1=a$,$x_2=b$,$x_3=c$.

例 9 已知 $\log_{18}9=a$,$18^b=5$,求 $\log_{36}45$.(1978 年全国高考数学试题)

解法 1 由 $18^b=5$ 得 $\log_{18}5=b$,故

$$\log_{36}45=\frac{\log_{18}(5\times 9)}{\log_{18}(18^2\div 9)}=\frac{\log_{18}5+\log_{18}9}{\log_{18}18^2-\log_{18}9}=\frac{a+b}{2-a}.$$

解法 2 由 $18^b=5$ 得 $\log_{18}5=b$.设 $\log_{36}45=c$,则

$$\frac{2\ln 3}{\ln 2+2\ln 3}=a,\quad \frac{\ln 5}{\ln 2+2\ln 3}=b,\quad \frac{\ln 5+2\ln 3}{2\ln 2+2\ln 3}=c,$$

即 $\begin{cases} a\ln 2+2(a-1)\ln 3=0 \\ b\ln 2+2b\ln 3-\ln 5=0 \\ 2c\ln 2+2(c-1)\ln 3-\ln 5=0 \end{cases}$,将之看作是关于$(\ln 2,\ln 3,\ln 5)$的齐次方程,于是 $\begin{vmatrix} a & 2(a-1) & 0 \\ b & 2b & -1 \\ 2c & 2(c-1) & -1 \end{vmatrix}=0$,展开得 $ac+a+b-2c=0$,所以$\log_{36}45=c=\dfrac{a+b}{2-a}$.

例 10 设直线 $y=bx+c$ 与抛物线$y=ax^2$ 有两个交点,其横坐标分别为 x_1 和 x_2,直线 $y=bx+c$ 与 x 轴交点的横坐标为 x_3,证明:$\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.

证法 1 $ax^2-bx-c=0$,于是 $x_1+x_2=\dfrac{b}{a}$,$x_1x_2=-\dfrac{c}{a}$,$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\dfrac{b}{c}$,而 $x_3=-\dfrac{c}{b}$,命题得证.

证法 2 根据题意有 $\begin{cases} ax_1^2-bx_1-c=0 \\ ax_2^2-bx_2-c=0 \\ bx_3+c=0 \end{cases}$,将之看作关于$(a,b,c)$的齐次线性方程组,可得 $\begin{vmatrix} x_1^2 & -x_1 & -1 \\ x_2^2 & -x_2 & -1 \\ 0 & x_3 & 1 \end{vmatrix}=0$,展开得$(x_1-x_2)[x_3(x_1+x_2)-x_1x_2]=0$.由于 $x_1\neq x_2$,所以 $x_3(x_1+x_2)-x_1x_2=0$,命题得证.

证法 3 设 $A(x_1,ax_1^2)$,$B(x_2,ax_2^2)$,$C(x_3,0)$,而这三点共线,则 $\begin{vmatrix} x_1 & ax_1^2 & 1 \\ x_2 & ax_2^2 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$. 展开得 $(x_1-x_2)[x_3(x_1+x_2)-x_1x_2]=0$. 由于 $x_1\neq x_2$,所以 $x_3(x_1+x_2)-x_1x_2=0$,命题得证.

例 11 证明:$(ab_1-a_1b)^2+(aa_1+bb_1)^2=(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2)$.

证法 1

$$(ab_1-a_1b)^2+(aa_1+bb_1)^2=a^2b_1^2+a_1^2b^2+a^2a_1^2+b^2b_1^2=(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2).$$

证法 2

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a^2+b^2 & aa_1+bb_1 \\ aa_1+bb_1 & a_1^2+b_1^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a^2 & aa_1 \\ aa_1 & a_1^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a^2 & bb_1 \\ aa_1 & b_1^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b^2 & aa_1 \\ bb_1 & a_1^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b^2 & bb_1 \\ bb_1 & b_1^2 \end{vmatrix} \\ &= 0+ab_1(ab_1-a_1b)-a_1b(ab_1-a_1b)+0 \\ &= (ab_1-a_1b)^2.\end{aligned}$$

例 12 求证:$a^2+b^2=1,c^2+d^2=1,ac+bd=0$ 的充要条件是 $a^2+c^2=1,b^2+d^2=1,ab+cd=0$.

说明 由于已知和结论具有超强的对称性,反向推导方法完全一样.

证法 1(杨春波提供) 若 $b=0$,结论显然成立. 否则,由 $ac+bd=0$,可设 $a=bk,d=-ck$,代入条件有

$$a^2+b^2=b^2k^2+b^2=1 \Rightarrow b^2=\frac{1}{1+k^2},$$

$$c^2+d^2=c^2+c^2k^2=1 \Rightarrow c^2=\frac{1}{1+k^2},$$

所以 $b^2=c^2\Rightarrow a^2+c^2=1,b^2+d^2=1,ab+cd=b^2k-c^2k=0$.

证法 2(杨春波提供) $ac+bd=0\Rightarrow a^2c^2=b^2d^2$,于是

$$a^2+b^2=1 \Rightarrow a^2c^2+b^2c^2=c^2 \Rightarrow b^2d^2+b^2c^2=b^2(c^2+d^2)=b^2=c^2.$$

$b^2=c^2$:若 $b=c$,结合 $ac+bd=0$ 得 $ab+cd=0$;若 $b=-c$,亦得 $ab+cd=0$.

证法 3 设 $a=\sin A,b=\cos A,c=\cos B,d=\sin B$,而由 $ac+bd=0$ 得 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=0$,即 $\sin(A+B)=0$,于是 $A+B=k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

$$a^2+c^2=\sin^2A+\cos^2B=\sin^2A+\cos^2(k\pi-A)=\sin^2A+\cos^2A=1,$$

$$b^2+d^2=\cos^2A+\sin^2B=\cos^2A+\sin^2(k\pi-A)=\cos^2A+\sin^2A=1,$$

$$\begin{aligned}ab+cd&=\sin A\cos A+\cos B\sin B=\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B)\\&=\frac{1}{2}[\sin 2A+\sin 2(k\pi-A)]=0.\end{aligned}$$

证法 4 将 $a^2+b^2=1,c^2+d^2=1,ac+bd=0$ 写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

将 $a^2+c^2=1,b^2+d^2=1,ab+cd=0$ 写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

若设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，则本题只需证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{I}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，而这是显然的.

证法 1 和证法 2 是纯代数证法. 证法 3 从题目条件联想到三角代换，思路自然，联合三个条件得出 $A+B=k\pi$ 这一关键信息，推导所求结论也变得简单. 考虑对称性，充分性和必要性只证一个即可，节省篇幅. 证法 4 分别将题目条件和结论中的三个式子，"塞进了"矩阵中，利用正交矩阵的性质将充要性一举解决.

证法 5(陈起航提供)　有恒等式 $(a^2+b^2-m)^2+(c^2+d^2-m)^2+2(ac+bd)^2=k=(a^2+c^2-m)^2+(b^2+d^2-m)^2+2(ab+cd)^2$，此题是 $m=1,k=0$ 时的特例.

证法 5 简单精练，验证此恒等式很简单，甚至无须展开，一看便知，只是想到此式较为困难. 此恒等式与拉格朗日恒等式很相似.

本题的条件容易让人联想到这样一个恒等式：

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\mp bd)^2+(ad\pm bc)^2,$$

此式是意大利数学家斐波那契在《算盘书》中给出的. 如果结合此恒等式，可得证法 6.

证法 6　由 $1=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=0+(ad-bc)^2$，得 $ad-bc=\pm 1$，将 $ac+bd=0$ 代入，即 $a^2d+b^2d=\pm a$，解得 $a=\pm d$，同理 $b=\mp c$，所以 $a^2+c^2=1,b^2+d^2=1,ab+cd=0$.

证法 5 和证法 6 都用到恒等式，相对而言，证法 6 显得更清楚一些，因为得到 $a=\pm d$，$b=\mp c$ 这一关系. 能求出此关系当然好，但如果将之推广，计算求解恐怕不容易，还不如用证法 5"模模糊糊"简单证明出来.

斐波那契恒等式的推广就是拉格朗日恒等式，即

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2+\sum_{i<j}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2.$$

如果我们将本题推广，以 $n=3$ 为例则得：

例 13　求证：$a_1^2+b_1^2+c_1^2=1,a_2^2+b_2^2+c_2^2=1,a_3^2+b_3^2+c_3^2=1,a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0,a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0,a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1=0$ 的充要条件是 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1,b_1^2+b_2^2+b_3^2=1,c_1^2+c_2^2+c_3^2=1,a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0,b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0,c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3=0$.

证法 1(仿照例 12 证法 5)　有恒等式

$$\begin{aligned}&(a_1^2+b_1^2+c_1^2-m)^2+(a_2^2+b_2^2+c_2^2-m)^2+(a_3^2+b_3^2+c_3^2-m)^2\\&\quad+2(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2+2(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)^2+2(a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1)^2\\&=k\\&=(a_1^2+a_2^2+a_3^2-m)^2+(b_1^2+b_2^2+b_3^2-m)^2+(c_1^2+c_2^2+c_3^2-m)^2\\&\quad+2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2+2(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)^2+2(c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3)^2.\end{aligned}$$

此题是 $m=1,k=0$ 时的特例.

证法 2　解关于 a_1,a_2,a_3 的线性方程组 $\begin{cases}a_1^2+b_1^2+c_1^2=1\\a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0\\a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1=0\end{cases}$. 设 $T=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$，则 $a_1=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & b_1 & c_1\\0 & b_2 & c_2\\0 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}{T}=\dfrac{b_2c_3-b_3c_2}{T}$，即 $a_1T=b_2c_3-b_3c_2$. 同理 $b_1T=$