有向几何学

有向距离及其应用

喻德生　著

科学出版社

有向几何学

有向距离及其应用

喻德生 著

南昌航空大学学术文库

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是《有向几何学》系列研究成果之一. 在《平面有向几何学》等研究的基础上, 创造性地、广泛地运用有向距离法和有向距离定值法, 对直线与平面上的有关问题进行更深入、更系统的研究, 得到了一系列有关两点间有向距离、点到直线间有向距离的定值定理, 揭示了这些定理与经典数学问题、数学定理和一大批数学竞赛题之间的联系, 较系统、深入地阐述了平面有向距离的基本理论、基本思想和基本方法. 它对开拓数学的研究领域, 揭示事物之间本质的联系, 探索数学研究的新思想、新方法具有重要的理论意义; 对丰富几何学各学科、以及相关数学学科的教学内容, 促进大、中学数学教学内容改革的发展具有重要的现实意义; 此外, 有向几何学的研究成果和研究方法, 对数学定理的机械化证明也具有重要的应用和参考价值.

本书可供数学研究工作者、大学和中学数学教师、数学专业大学生和研究生阅读, 可以作为大学数学专业学生、研究生和中学数学竞赛的教材, 也可供相关学科专业的师生、科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

有向几何学: 有向距离及其应用/喻德生著. —北京: 科学出版社, 2016

ISBN 978-7-03-050994-9

Ⅰ. ①有… Ⅱ. ①喻… Ⅲ. ①有向图 Ⅳ. ①O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 284357 号

责任编辑: 陈玉琢 / 责任校对: 彭 涛
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 10 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16
2016 年 10 月第一次印刷 印张: 18 1/2
字数: 361 000

定价: 108.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

作 者 简 介

喻德生，江西高安人. 1980 年步入教坛，1990 年江西师范大学数学系硕士研究生毕业，获理学硕士学位。南昌航空大学数学与信息科学学院教授，硕士研究生导师，江西省第六批中青年骨干教师，中国教育数学学会常务理事,《数学研究期刊》编委，南昌航空大学省精品课程《高等数学》负责人,教育部学位与研究生教育发展中心学位论文评审专家，江西省第二届青年教师讲课比赛评委，研究生数学建模竞赛论文评审专家。历任大学数学教研部主任等职。指导硕士研究生 12 人。主要从事几何学、计算机辅助几何设计和数学教育等方面的研究。参与国家自然科学基金课题 3 项，主持或参与省部级教学科研课题 10 项、厅局级教学科研课题 11 项。在国内外学术刊物发表论文 60 余篇，撰写专著 2 部，主编出版教材 10 种 16 个版本。作为主持人获江西省优秀教学成果奖 2 项，指导学生参加全国数学建模竞赛获省级一等奖及以上奖励 4 项并获江西省优秀教学成果荣誉 2 项，南昌航空工业学院优秀教学成果奖 4 项，获校级优秀教师 2 次。 Email：yuds17@163.com

前　　言

“有向”是自然科学中的一个十分重要而又应用非常广泛的概念. 我们经常遇到的有向数学模型无外乎以下两类:

一是“泛物”的有向性. 如微积分学中的左右极限、左右连续、左右导数等用到的量的有向性, 定积分中用到的线段 (即区间) 的有向性, 对坐标的曲线积分用到的曲线的有向性, 对坐标的曲面积分用到的曲面的有向性等, 这些都是有向性的例子. 尽管这里的问题很不相同, 但是它们都只有正、负两个方向, 因此称为“泛物”的有向性. 然而, 这里的有向性没有可加性, 不便运算.

二是“泛向”的有向量, 亦即我们在数学与物理中广泛使用的向量. 我们知道, 这里的向量有无穷多个方向, 而且两个方向不同的向量相加通常得到一个方向不同的向量. 因此, 我们称为“泛向”的有向量. 这种“泛向”的有向数学模型, 对于我们来说方向太多, 不便应用.

然而, 正是由于“泛向”有向量的可加性与“泛物”有向性的二值性, 启示我们研究一种既有二值有向性, 又有可加性的几何量. 一维空间的有向距离, 二维空间的有向面积, 三维空间乃至一般的 N 维空间的有向体积等都是这种几何量的例子. 一般地, 我们把带有方向的度量称为有向度量.

“有向度量”并不是数学中一个全新的概念, 各种有向度量的概念散见于一些数学文献中. 但是, 有向度量的概念并未发展成为数学中的一个重要概念. 有向度量的应用仅局限于其“有向性”, 而极少触及其“可加性”. 要使有向度量的概念变得更加有用, 要发现各种有向度量的规律性, 使有向度量的知识系统化, 就必须对有向度量进行深入的研究, 创立一门独立的几何学——有向几何学. 为此, 必须明确有向几何学的研究对象, 确立有向几何学的研究方法, 构建有向几何学的知识体系. 这对开拓数学研究的领域, 揭示事物之间本质的联系, 探索数学研究的新思想、新方法具有重要的理论意义; 对丰富几何学各学科, 以及相关数学学科, 特别是数学分析、高等数学等学科的教学内容, 促进高等学校和中等学校数学教学内容改革的发展具有重要的现实意义; 此外, 有向几何学的研究成果和研究方法, 对数学定理的机械化证明也具有重要的应用和参考价值.

就我们所知, 著名数学家希尔伯特在他的数学名著《直观几何》中, 利用三角形的有向面积证明了一个简单的几何问题, 这是历史上较早地使用有向面积证题的例子. 20 世纪五六十年代, 著名数学家 Wilhelm Blaschke 在他的《圆与球》中, 利用有向面积深入地讨论了圆的极小性问题, 这是历史上比较系统地使用有向面积

方法解决问题的例子. 但是, 有向面积法并未发展成一种普遍使用而又十分有效的方法.

20 世纪八九十年代, 我国著名数学家吴文俊、张景中院士, 开创了数学机械化的研究, 而计算机中使用的距离和面积都是有向的, 因此数学机械化的研究拓广了有向距离和有向面积应用的范围. 特别是张景中院士十分注重面积关系在数学机器证明中的作用, 指出面积关系是 “数学中的一个重要关系”, 并利用面积关系创立了一种可读的数学机器证明方法, 即所谓的消点法, 也称为面积法.

近年来, 我们在分析与借鉴上述两种思想方法的基础上, 发展了一种研究有向几何问题的方法, 即所谓的有向度量定值法. 除上述提到的两个原因外, 我们也受到如下两种数学思想方法的影响.

一是数学建模的思想方法. 我们知道, 一个数学模型通常不是一个简单的数学结论, 它往往包含一个或多个参数, 只要给定参数的一个值, 就可以得出一个相应的结论. 这与经典几何学中一个一个的、较少体现知识之间联系的结论形成了鲜明的对照. 因此, 我们自然会问, 几何学中能建立涵盖面如此广泛的结论吗? 这样, 寻找几何学中联系不同结论的参数, 进行几何学中的数学建模, 就成为我们研究有向几何问题的一个重点.

二是函数论中的连续与不动点的思想方法. 我们知道, 经典几何学中的结论通常是离散的, 一个结论就要给出一个证明, 比较麻烦. 我们能否引进一个连续变化的量, 使得对于变量的每一个值, 某个几何量或某几个几何量之间的关系始终是不变的? 这样, 构造几何量之间的定值模型就成为我们研究有向几何问题的一个突破口.

尽管几何定值问题的研究较早, 一些方面的研究也比较深入, 但有向度量定值问题的研究尚处于起步阶段. 近年来, 我们研究了有向距离、有向面积定值的一些问题, 得到了一些比较好的结果, 并揭示了这些结果与一些著名的几何结论之间的联系, 不仅使很多著名的几何定理——Euler 定理、Pappus 定理、Pappus 公式、蝴蝶定理、Servois 定理、中线定理、Harcourt 定理、Carnot 定理、Brahmagupta 定理、切线与辅助圆定理、Anthemius 定理、焦点和切线的 Apollonius 定理、Zerr 定理、配极定理、Salmon 定理、二次曲线的 Pappus 定理、两直线上的 Pappus 定理、Desarques 定理、Ceva 定理、等截共轭点定理、共轭直径的 Apollonius 定理、正弦及余弦差角公式、Weitzentock 不等式、麦比乌斯定理、Monge 公式、Gauss 五边形公式、Erdos-Mordell 不等式、Gauss 定理、Gergonne 定理、梯形的施泰纳定理、拿破仑三角形定理、Cesaro 定理、三角形的中垂线定理、Simson 定理、三角形的共点线定理、完全四边形的 Simson 线定理、高线定理、Neuberg 定理、共点线的施泰纳定理、Zvonko Cerin's 定理、双重透视定理、三重透视定理、Pappus 重心定理、角平分线定理、Menelans 定理、Newton 定理、Brianchon 定理等的结论和一大

批数学竞赛题在有向度量的思想方法下得到了推广或证明, 而且揭示了这些经典结论之间、有向度量与这些经典结论之间的内在联系, 显示出有向度量定值法的新颖性、综合性、有效性和简洁性. 特别是在三角形、四边形和二次曲线外切多边形中有向面积定值问题的研究, 涵盖面广、内容丰富、结论优美, 引起了国内外数学界的关注.

打个比方说, 如果我们把经典的几何定理看成是一颗颗的珍珠, 那么几何有向度量的定值定理就像一条条的项链, 把一些看似没有联系的若干几何定理串连起来, 形成一个完美的整体. 因此, 几何有向度量的定值定理更能体现事物之间的联系, 揭示事物的本质.

本书是《有向几何学》系列研究成果之一, 在《平面有向几何学》(喻德生著, 科学出版社, 2014 年 3 月) 等有关研究成果的基础上, 创造性地、广泛地运用有向距离法和有向距离定值法, 对直线与平面上的有关问题进行研究, 得到了一系列的有关两点间有向距离、点到直线有向距离的定值定理, 揭示了这些定理与经典数学问题、数学定理和一大批数学竞赛题之间的联系, 较为系统、深入地阐述了平面有向距离的基本理论、基本思想和基本方法.

本书得到南昌航空大学科研成果专项资助基金的资助, 得到科技处领导的大力支持, 在此表示衷心感谢!

谨纪念我的母亲鞠裕香大人诞辰 80 周年. 她勤劳贤惠, 通情达理, 睿智善良, 为我们奉献了毕生精力. 在那个 “读书无用” 的年代, 即使在家里遭受危难之时, 也不耽搁子女的学业, 让我们饱享当时学校的 “素质教育”, 成就了我们的未来.

由于笔者阅历、水平有限, 书中可能出现疏漏甚至错误, 敬请国内外同仁和读者不吝批评指正.

作　者

2016 年 8 月

目　　录

第 1 章　两点间的有向距离

1.1　两点间距离的基本概念

从几何上来看, 点是最简单的图形——零维图形, 因此两点的距离可以看成是两个零维图形之间的距离.

本节主要阐述两点间距离的基本知识, 为有向距离的研究奠定基础. 首先, 介绍两点间距离的概念; 其次, 介绍直线上两点间距离的公式与性质; 再次, 介绍平面上两点间距离的公式与性质; 最后, 用距离空间的观点, 概括本节的内容.

1.1.1　两点间距离的概念

有很多方式可以度量两点间的距离, 因此产生不同的度量空间或距离空间. 我们最熟悉、最常见的距离空间就是定义在直线、平面和空间上的各维欧氏空间——一维欧氏空间、二维欧氏空间、三维欧氏空间, 仍至一般的 n 维欧氏空间.

定义 1.1.1　设 P_1, P_2 是 n 维欧氏空间 E^n 的中两点, 则称这两点之间的连线, 即线段 P_1P_2 的长度为 P_1, P_2 之间的距离, 记为 $\mathrm{d}_{P_1P_2}$.

特别地, 当 P_1, P_2 重合时, 我们把点看成是线段的特殊情形, 并规定其距离为零.

1.1.2　直线上两点间距离的公式与性质

定理 1.1.1　设 $P_1(x_1), P_2(x_2)$ 是数轴上的两点, 则 P_1, P_2 之间的距离为

$$\mathrm{d}_{P_1P_2} = |x_2 - x_1|. \tag{1.1.1}$$

证明　如图 1.1.1 所示, 当 P_2 位于 P_1 的右侧, 即 $x_2 > x_1$ 时, $\mathrm{d}_{P_1P_2} = x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|$; 当 P_2 位于 P_1 的左侧, 即 $x_2 < x_1$ 时, $\mathrm{d}_{P_1P_2} = x_1 - x_2 = -(x_2 - x_1) = |x_2 - x_1|$; 当 P_1, P_2 重合, 即 $x_1 = x_2$ 时, $\mathrm{d}_{P_1P_2} = |x_2 - x_1| = 0$. 从而式 (1.1.1) 成立.

图 1.1.1

根据定理 1.1.1 和绝对值的性质, 容易推出直线上两点间距离的如下性质:

性质 1.1.1　非负性　$\mathrm{d}_{P_1P_2} \geqslant 0$, 且 $\mathrm{d}_{P_1P_2} = 0$ 的充分必要条件是 $P_1 = P_2$, 即 P_1, P_2 重合.

性质 1.1.2　三角不等式　对直线上任意三点 P_1, P_2, P_3, 恒有

$$\mathrm{d}_{P_1P_2} \leqslant \mathrm{d}_{P_1P_3} + \mathrm{d}_{P_2P_3}. \tag{1.1.2}$$

证明　设各点的坐标为 $P_1(x_1), P_2(x_2), P_3(x_3)$, 于是由定理 1.1.1 和绝对值的性质, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{P_1P_2} &= |x_2 - x_1| = |(x_2 - x_3) + (x_3 - x_1)| \leqslant |x_2 - x_3| + |x_3 - x_1| \\ &= |x_3 - x_2| + |x_3 - x_1| = \mathrm{d}_{P_1P_3} + \mathrm{d}_{P_2P_3},\end{aligned}$$

所以式 (1.1.2) 成立.

性质 1.1.3　对称性　$\mathrm{d}_{P_1P_2} = \mathrm{d}_{P_2P_1}$.

证明　在式 (1.1.2) 中令 $P_3 = P_1$, 得 $\mathrm{d}_{P_1P_2} \leqslant \mathrm{d}_{P_1P_1} + \mathrm{d}_{P_2P_1}$. 由性质 1.1.1 知 $\mathrm{d}_{P_1P_1} = 0$, 故

$$\mathrm{d}_{P_1P_2} \leqslant \mathrm{d}_{P_2P_1}.$$

又因为 P_1, P_2 的任意性, 在上式中互换 P_1, P_2 后, 得

$$\mathrm{d}_{P_2P_1} \leqslant \mathrm{d}_{P_1P_2},$$

两式结合即得 $\mathrm{d}_{P_1P_2} = \mathrm{d}_{P_2P_1}$.

性质 1.1.4　对直线上任意三点 P_1, P_2, P_3, 恒有

$$|\mathrm{d}_{P_1P_2} - \mathrm{d}_{P_2P_3}| \leqslant \mathrm{d}_{P_1P_3}. \tag{1.1.3}$$

证明　根据性质 1.1.1 和性质 1.1.2, 有

$$\mathrm{d}_{P_2P_3} \leqslant \mathrm{d}_{P_2P_1} + \mathrm{d}_{P_3P_1} \quad \text{和} \quad \mathrm{d}_{P_1P_2} \leqslant \mathrm{d}_{P_1P_3} + \mathrm{d}_{P_2P_3},$$

即

$$\mathrm{d}_{P_2P_3} \leqslant \mathrm{d}_{P_1P_2} + \mathrm{d}_{P_1P_3} \quad \text{和} \quad \mathrm{d}_{P_1P_2} \leqslant \mathrm{d}_{P_1P_3} + \mathrm{d}_{P_2P_3},$$

于是

$$-\mathrm{d}_{P_1P_3} \leqslant \mathrm{d}_{P_1P_2} - \mathrm{d}_{P_2P_3} \leqslant \mathrm{d}_{P_1P_3},$$

即

$$|\mathrm{d}_{P_1P_2} - \mathrm{d}_{P_2P_3}| \leqslant \mathrm{d}_{P_1P_3}.$$

注 1.1.1　根据以上证明可知, 在假设性质 1.1.1 的前提下, 式 (1.1.3) 和 (1.1.4) 是等价的.

1.1.3 平面上两点间距离的公式与性质

定理 1.1.2 设 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 是坐标平面上的两点, 则 P_1,P_2 之间的距离为

$$\mathrm{d}_{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{1.1.4}$$

证明 如图 1.1.2 所示, 过 P_1,P_2 分别作 P_1Q_1,P_2Q_2 垂直于 x 轴, P_1R_1,P_2R_2 垂直于 y 轴, 垂足依次为 $Q_1,Q_2;R_1,R_2$, 则各垂足的坐标为 $Q_1(x_1,0),Q_2(x_2,0);R_1(0,y_1),R_2(0,y_2)$. 根据定理 1.1.1, 得

$$\mathrm{d}_{P_1N}=\mathrm{d}_{Q_1Q_2}=|x_2-x_1|,\quad \mathrm{d}_{P_2N}=\mathrm{d}_{R_1R_2}=|y_2-y_1|.$$

再作 P_1N 垂直于 P_2Q_2, 垂足为 N, 根据勾股定理, 得

$$\mathrm{d}_{P_1P_2}=\sqrt{\mathrm{d}^2_{P_1N}+\mathrm{d}^2_{P_2N}}=\sqrt{\mathrm{d}^2_{Q_1Q_2}+\mathrm{d}^2_{R_1R_2}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

即式 (1.1.2) 成立.

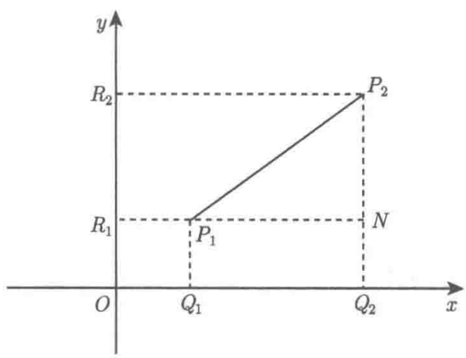

图 1.1.2

推论 1.1.1 设 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2);Q_1(x_1',y_1'),Q_2(x_2',y_2')$ 是两不平行直线 l_1,l_2 上的两点. 若

$$x_2-x_1=\pm k(x_2'-x_1'),\quad y_2-y_1=\pm k(y_2'-y_1')\ (k>0)$$

或

$$x_2-x_1=\pm k(y_2'-y_1'),\quad y_2-y_1=\pm kk(x_2'-x_1'),\ (k>0),$$

则

$$\mathrm{d}_{P_1P_2}=k\mathrm{d}_{Q_1Q_2}.$$

证明 由两点间的距离公式易得.

平面上两点间的距离具有直线上两点间距离类似的性质, 兹列如下:

性质 1.1.1′　非负性　$d_{P_1P_2} \geqslant 0$, 且 $d_{P_1P_2} = 0$ 的充分必要条件是 $P_1 = P_2$, 即 P_1, P_2 重合.

性质 1.1.2′　三角不等式　对平面上任意三点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$, 恒有

$$d_{P_1P_2} \leqslant d_{P_1P_3} + d_{P_2P_3}. \tag{1.1.2′}$$

性质 1.1.3′　对称性　$d_{P_1P_2} = d_{P_2P_1}$.

性质 1.1.4′　对平面上任意三点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$, 恒有

$$\left|d_{P_1P_2} - d_{P_2P_3}\right| \leqslant d_{P_1P_3}. \tag{1.1.3′}$$

除性质 1.1.2′ 外, 以上性质的证明与直线上两点间距离相应性质的证明是完全一样的, 不再赘述. 现证明性质 1.1.2′. 因为

$$0 \leqslant (a_1b_2 - a_2b_1)^2,$$

即

$$2a_1b_1a_2b_2 \leqslant a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2,$$

所以

$$a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 \leqslant a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2,$$

即

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right).$$

于是

$$\begin{aligned}
&(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 \\
=& \left(a_1^2 + a_2^2\right) + 2(a_1b_1 + a_2b_2) + \left(b_1^2 + b_2^2\right) \\
\leqslant& \left(a_1^2 + a_2^2\right) + 2\sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right)} + \left(b_1^2 + b_2^2\right) \\
\leqslant& \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right)^2,
\end{aligned}$$

故

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

令 $a_1 = x_3 - x_1, a_2 = y_3 - y_1; b_1 = x_2 - x_3, b_2 = y_2 - y_3$, 则

$$a_1 + b_1 = x_2 - x_1, \quad a_2 + b_2 = y_2 - y_1,$$

代入上式, 得

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \leqslant \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2},$$

从而式 (1.1.2′) 成立.

综上所述可以看出, 直线和平面上距离的概念与性质是相同的. 事实上, 按照泛函分析的观点, 它们都可以统一在一个称之为 “度量空间或距离空间” 的概念之下, 即直线上的所有点集 E 按照式 (1.1.1) 所定义的距离称为一维欧氏空间, 记为 (E, d) 或简记为 E; 平面上的所有点集 E^2 按照式 (1.1.2) 所定义的距离称为二维欧氏空间, 记为 (E^2, d) 或简记为 E^2. 据此还可以把距离的公式与性质推广到三维及三维以上的空间中去, 得到更一般的 n 维欧氏空间 E^n. 本书只涉及一、二维欧氏空间的距离, 三维及三维以上欧氏空间的距离留待后续著作中进一步阐述.

1.2 直线上两点间的有向距离

两点间的有向距离, 就是最简单的一维图形——线段的有向距离. 两点间的有向距离不仅与点, 而且与点的先后次序有关, 因此必须把两点相同但首尾不同的线段 P_1P_2, P_2P_1 区别开来.

本节主要阐述两点间有向距离的基本概念与知识. 首先, 给出两点间有向距离的概念与性质; 其次, 介绍有向距离的一些结论和有向距离的简单应用, 包括 Chasles 定理、Euler 定理、Pappus 定理、线段调和分割定理、Stewart 定理等的证明或推广, 以及过平面四边形对角线交点的直线的一个性质与推论.

1.2.1 两点间有向距离的概念与性质

定义 1.2.1 设 u 轴上两点 P_1, P_2 的坐标为 $P_1(x_1), P_2(x_2)$, 则称这两点间带符号的距离 $\pm\mathrm{d}_{P_1P_2}$ 为点 P_1 到 P_2 间 (线段 P_1P_2) 的有向距离, 记为 $\mathrm{Dd}_{P_1P_2}$(简记为 $\mathrm{D}_{P_1P_2}$), 即

$$\mathrm{Dd}_{P_1P_2}=\pm\mathrm{d}_{P_1P_2}(\text{或 } \mathrm{D}_{P_1P_2}=\pm\mathrm{d}_{P_1P_2}),$$

其中当 $P_1\to P_2$ 的方向与 u 轴的正向相同时, 取 “+” 号; 相反时取 “−” 号. “Dd” 是 “Directed distance” 的缩写.

特别地, 当 $\mathrm{d}_{P_1P_2}=0$, 即 P_1, P_2 两点重合时, 规定点 P_1 到 P_2 间 (线段 P_1P_2) 的有向距离为 0.

定理 1.2.1 设 P_1, P_2 是数轴上的两点, 它们坐标分别为 x_1, x_2, 则线段 P_1P_2 的有向距离为

$$\mathrm{D}_{P_1P_2}=x_2-x_1. \tag{1.2.1}$$

证明　如图 1.2.1 所示, 因为 $\mathrm{d}_{P_1P_2} = |x_2 - x_1|$, 所以 P_1, P_2 两点间的有向距离

$$\mathrm{D}_{P_1P_2} = \pm|x_2 - x_1|.$$

图 1.2.1

当 $P_1 \to P_2$ 的方向与 x 轴的正向相同时, $x_2 > x_1$, 故 $\mathrm{D}_{P_1P_2} = |x_2 - x_1| = x_2 - x_1$; 当 $P_1 \to P_2$ 的方向与 x 轴的正向相反时, $x_2 < x_1$, 故 $\mathrm{D}_{P_1P_2} = -|x_2 - x_1| = -(x_1 - x_2) = x_2 - x_1$; 当 P_1, P_2 重合时, $x_1 = x_2$, 故 $\mathrm{D}_{P_1P_2} = 0$. 从而式 (1.2.1) 成立.

根据定理 1.2.1, 可以证明有向距离如下的运算性质:

性质 1.2.1　有向性 (反对称性)　设 P_1P_2 与 P_2P_1 是端点相同, 但方向相反的两线段, 则

$$\mathrm{D}_{P_1P_2} = -\mathrm{D}_{P_2P_1}. \tag{1.2.2}$$

证明　设线段端点的坐标为 $P_1(x_1), P_2(x_2)$, 则由式 (1.2.1) 可得

$$\mathrm{D}_{P_1P_2} = x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2) = -\mathrm{D}_{P_2P_1},$$

即式 (1.2.2) 成立.

性质 1.2.2　可加性　设 P_1, P_2, P_3 是直线上任意三点, 则

$$\mathrm{D}_{P_1P_3} = \mathrm{D}_{P_1P_2} + \mathrm{D}_{P_2P_3}. \tag{1.2.3}$$

证明　设任意点的坐标为 $P_1(x_1), P_2(x_2), P_3(x_3)$, 则由式 (1.2.1) 可得

$$\mathrm{D}_{P_1P_3} = x_3 - x_1 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) = \mathrm{D}_{P_1P_2} + \mathrm{D}_{P_2P_3},$$

即式 (1.2.3) 成立.

总之, 两点间的有向距离就是带符号的距离, 它与两点间的距离可能相差一个符号, 是可正可负的. 两点间的有向距离与两点间的距离有关, 但不具有两点间距离的任何性质; 它具有两个重要的运算性质: 有向性和可加性, 这是它区别于两点间距离的重要特征. 这样就可以把代数和几何紧密地结合起来, 便于一些问题的讨论.

1.2.2　两点间有向距离的几个结论

定理 1.2.2　设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是一直线上的 n 个点, 则

$$\mathrm{D}_{P_1P_2} + \mathrm{D}_{P_2P_3} + \cdots + \mathrm{D}_{P_{n-1}P_n} = \mathrm{D}_{P_1P_n}. \tag{1.2.4}$$