俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

Analytic Geometry Tutorial (I)

解析几何学教程(上)

[俄罗斯] 穆斯赫利什维利 著 《解析几何学教程》编译组 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

解析几何学教程（上）

Analytic Geometry Tutorial (I)

[俄罗斯] 穆斯赫利什维利 著

《解析几何学教程》编译组 译

HITP

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书系根据苏联国立技术理论书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的,穆斯赫利什维利(Н. И. Мусхелишвили)著《解析几何学教程》(Курсаналитической геометрии)1947年第三版增订本译出.原书经苏联高等教育部审定为综合大学数理系教科书.

本书的内容和性质是为使初学者明了将分析应用于几何学是有明确的普遍方法,并发展学生在这一领域内的技能,同时使学生习惯于矢量运算及行列式论和一次、二次方式论的实际应用.

本书适合于大学师生及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

解析几何学教程.上/(俄罗斯)穆斯赫利什维利著;《解析几何学教程》编译组译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.1

ISBN 978-7-5603-5485-9

Ⅰ.①解… Ⅱ.①穆…②解… Ⅲ.①解析几何-教材 Ⅳ.①O182

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第280411号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘家琳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张21.25 字数405千字
版　　次 2016年1月第1版 2016年1月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-5485-9
定　　价 38.00元

◎

第三版序

本版在内容上和以前各版有很少的差别:只有第六章大部分是重新写的.

但叙述的次序,此次略有变更.除了对这个教程的讲授顺序附加了一系列的补充说明外,并把那些对于初级学生不必要的材料,作了更明显的划分.我希望这样可以大大地减轻初学者学习这一科目的负担.

H · 穆斯赫利什维利

1945 年冬季,第比里斯

◎ 几点说明

写给大学生和教师们

1°关于叙述的性质和内容的选择，我认为有加以说明的必要.依我的意见，在数学、物理系等讲授解析几何的基本目的是：使初学者认识到将分析应用于几何，有明确的普遍方法，并发展学生在这领域内所必须巩固的技能.如果不是为了这个主要目的，那么，叙述本教程中较小范围的几何事实，便要比现在所占篇幅少得多.

此外，解析几何一课更应服务于两个附带的但十分重要的目的：使学生尽可能早些习惯于矢量运算，以及行列式论和一次、二次方式论的实际应用.教学计划中的任何其他科目未必能够更好地达到这些目的.

我已慎重地考虑到所有这些要求，并设法不使教程负担过重.

2°在写作供初级学生使用的任何数学教本时，必须对于逻辑的次序和实际教学上所要求的次序加以选择；更恰当地说，要在二者之间作适当的折中.我不愿牺牲一些逻辑上的次序.因此，教材是依照学生在第二次阅读或进一步复习时所应采用的顺序而

编排的. 在初次阅读和讲授时，我建议作一些重新布置.

3°在初次阅读本书时，有些节可以（而且最好）暂时省略，留待以后初读，这将分别在各处注脚里声明. 其中较主要的如下：

本教程结构的基础在于根据著名的分类观念，把几何性质分为度量性质、仿射性质和投影性质. 但只有当初学者认识了一定的具体材料和获得某些必需的技能之后，他们才容易掌握这一观念. 因此，在本书开端，分类的观念只以模糊的形式出现，直到第三章的后部（§78）才把它交代清楚. 我以为分类观念的认识似乎应当推到更后一些. 为了照顾到这一点，我建议采取下面的次序来学习这个教程.

开头顺着第一章到第五章进行，删去第三章一大部分（即只保留这章§64至§66），并删去第六章全章，直接进到第七章，在那里讲授圆锥截线的基本性质.

以后便要初读第三章所删去的部分，再进到第六章. 以后各章（由第八章开始）可按原编排的顺序进行讲授①.

4°我这样编排教材，为的是使读者只需一旦掌握了关于投影坐标和投影变换的最普通的概念，便可理解文意. 而要掌握这些概念，又只需浏览第六章第三段§176至§179便够用了.

5°至于书中所举的“习题”，要知道它们决不能用来代替专门的习题汇编的，这些习题仅是为了解释一些当时遇到的或有时随后跟着的个别命题和公式. 大部分习题非常简单，并未要求读者用任何创造性的才能去演算.

6°书尾“附录”是关于一次和二次方式理论的初步知识，这对于明了书中的基本内容是必须的. 初学者可在个别地方碰到引证参考时，去逐渐理解附录中的资料.

① 跟着在第七章学完二次曲线的基本性质之后，我们也可以马上进到第十二章的第一段，去讨论个别二次曲面的形状.

◎ 引言

解析几何本身的目的，就是利用计算或数学分析来做几何图形性质的研究.

正如我们下面所见到的，问题在于可以用各种方法，把一方面的几何图形和另一方面的数建立密切的联系，使得每个几何图形或它的任何性质，对应于确定的一组数字或数字间若干确定的关系.

人们可以创造很多方法去实现所述的联系，但从数学以及将数学应用到自然科学这一观点来看，其中只有少数几种值得注意.这些少数方法中最重要的是笛卡儿[①]首先有系统地所应用的方法，故可说笛氏就是解析几何的创始人.

目前我们只要知道几何的形式和数的形式之间所存在的联系，能够用某种方法实现出来，也只要知道每一几何问题如此便可化为分析问题，这样便已足够了.

由这一点，已可想到解析几何应该起多么重要的作用：有了它才有可能使几何学利用大部分集中于数学分析上，特别是代数上的丰富的成果.不但如此，有些分析上的问题，一经化为几何图

① 笛卡儿(René Descartes,1596—1650,或依照他的时代所通用的拉丁文译名 Cartesius),是法国著名的数学家和哲学家.

形的讨论，解答起来往往更加方便. 这样一来，几何便成为分析的重要助手. 例如许多代数问题都因有了几何的讨论才获得非常明确的解答.

习惯上“解析几何”这个名词所指的只是这科目中用到初等代数[①]的那部分. 本书的标题也是依照这个意义命名的.

矢量的概念，在解析几何里是最有效的辅助工具（正如它在许多其他数学分支中一样）. 因此，本教程一开始便要叙述关于矢量的那些最必要的概念和命题.

① 这科目其他部分的名称为：微分几何，曲面论，等等.

◎

目录

第一章　矢量.平行投影　//1

Ⅰ.线段,轴,矢量　//1

Ⅱ.矢量的和.数量乘矢量的乘积　//3

Ⅲ.轴上投影和面上投影　//14

Ⅳ.直角投影的计算公式　//18

Ⅴ.两个矢量的数积与矢积　//24

第二章　矢量的坐标.点的坐标　//34

Ⅰ.笛氏坐标　//34

Ⅱ.表示仿射性质的基本公式　//44

Ⅲ.用直角坐标表示度量性质的基本公式　//57

Ⅳ.用广义笛氏坐标表示度量性质的基本公式　//74

Ⅴ.各种坐标系　//83

第三章　笛氏坐标的变换,运动和仿射变换　//89

Ⅰ.笛氏坐标变换的一般公式　//89

Ⅱ.坐标变换的最重要特例　//100

Ⅲ.运动和仿射变换　//114

第四章　平曲线的方程. 平面上的直线 //129

Ⅰ. 平曲线的分析表示法　//129

Ⅱ. 直线方程的各种格式　//147

Ⅲ. 关于直线的主要问题　//160

第五章　空间的直线和平面 //184

Ⅰ. 曲面的方程. 曲线的方程系　//184

Ⅱ. 平面的方程　//192

Ⅲ. 空间直线的方程系　//200

Ⅳ. 关于直线和平面的主要问题　//207

第六章　虚元素和假元素. 齐次笛氏坐标和投影坐标. 投影变换 //230

Ⅰ. 几何上的虚元素　//230

Ⅱ. 齐次坐标和假元素. 直线坐标和平面坐标　//234

Ⅲ. 投影坐标和投影变换　//269

第一章　矢量.平行投影

Ⅰ.线段,轴,矢量

§1. 线段　在初等几何里,我们已经知道:所谓线段是直线的一部分,它的两端以两个点为界限.

线段的主要特性为它的长.我们简略地提一下这个名词的意义.我们选取任意一个固定的线段作为长的单位,用它来测量一个已知的线段.已知线段的长是一个数字,表示所给线段里边含有单位线段的个数.自然,可能发生这样的情形,所给的线段不是单位线段的整数倍,那么它的长便不是整数,而是分数,也许是一个无理数.实际上遇到无理数的情况要比有理数更为普遍.

这些都是在初等数学里熟知的事.主要的我们仅须记住,所给线段的长是指用单位线段来测量时所得到的那个正数.

§2. 轴　在解析几何里,除直线概念外,还有和它很相近的轴的概念起着重要的作用.

任意取一直线 AB,如有一点在这直线上作连续不断的运动,此点可以就两个相反的方向画出直线 AB:一个是由 A 到 B 的方向;或者,相反地,是由 B 到 A 的方向.在这两个方向里任意选定一个,把叫它作正向,相反的那个,便叫作负向.

有了一定正向的直线叫作轴.通常仍用直线表示轴,加一箭头表示它的正向.例如图1,轴 Δ 的正向,是由 A 到 B.

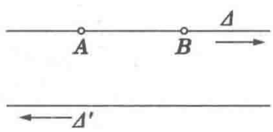

图 1

两条轴叫作同方向的,如果它们不只是互相平行并且还有相同的正向;如果两条轴只是平行而正向不同,便说它们是反向的.例如图1,Δ 和 Δ' 是反向的两轴.

§3. 矢量　具有确定正向的线段叫作矢量.

在图上,人们用线段来表示矢量,附加箭头以标志正向.

矢量的两个端点,一个叫作起点,另一个叫作终点;矢量的正向是由起点到

终点. 矢量的起点又叫作它的作用点.

起点为 A,终点为 B 的矢量,我们将用记号代表它,写作

$$\overrightarrow{AB}$$

放在第一位置的字母代表起点,字母上面的箭头表明这是矢量,而不是单纯线段. 有时我们只用一个字母表示矢量,用粗体字排印①,例如 $\boldsymbol{P}$.

矢量$\overrightarrow{AB}$或 $\boldsymbol{P}$ 的长,我们将采用记号

$$|\overrightarrow{AB}| \text{ 或 } |\boldsymbol{P}|$$

矢量的长,通常叫作它的绝对值,也叫作模.

矢量的概念在数学、物理学和力学的许多领域里都起了很大的作用. 许多物理的量可能利用矢量来表示,而且这种表示常常促使很多公式和结果普遍化和简单化. 也就是说除了一个确定的数值②外,还有一个确定的方向的一切物理量,均可用矢量来表示. 矢量的长(数字)和它的数值相等,矢量的方向和它的方向相符.

可用矢量来表示的物理量(因此便叫那个量作矢量)的例子有:力、速度(某点的)、加速度等都是. 有时这种物理的量和矢量完全没有分别. 例如力(或速度)便可说是矢量③.

和矢量对立的是数量. 数量没有方向,只需知道它的数值(用一定的单位去测量得来的结果)和正负号,便可把它完全决定下来. 例如线段的长、面积、体积、质量等都是数量.

以后我们提到数量这个名词,所指的就是说明这个只有大小、没有方向的数(正的或负的).

§4. 矢量的相等 如果两个矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 具有相同的长和相同的正向④,便说它们相等. 这个关系可写成下面的形式

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} \tag{1}$$

我们必须时常记着:两个矢量的长相等,矢量本身未必相等. 为了着重指出

---

① 用笔记时,我们建议用字母加上箭头的写法来表示矢量. 例如 $\overrightarrow{P_0}$,但采用另种记号,也无不可.

② 这些数值是用一定的单位(任意选定的)去测量一个给定的量所得到的结果.

③ 上面所述矢量的定义,认为矢量是附加有方向的线段,从某些观点看来,未免太狭义. 人们可以下一个比较一般的抽象的定义,根据这个定义,那么附加有方向的线段将不是矢量,仅是代表矢量的形式之一.

④ 此后提到矢量或轴的方向,所指的总是它们的正向.

这个事实,我们有时把等式(1) 叫作矢性等式①.

若两个矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 有相同的长,但有相反的正向,便说它们是相反的矢量. 这种关系可写成

$$\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{Q}$$

例如在图2里,矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 长度相等,但矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}_1$ 相反.

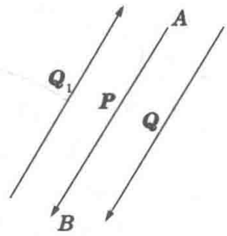

图 2

如果一个矢量的长等于0,便说那个矢量等于**0**. 这样的矢量没有一定的方向,也可说它和任何方向平行.

再介绍一个术语:从已知点引已知矢量便是说,取已知点为起点,作一个矢量和已知的矢量相等.

§5. 矢量:自由矢量,滑动矢量,胶着矢量　在本书下文所讨论的大多数问题里,只有矢量的长和正向发挥主要的作用,但与它们的起点位置全无关系. 所以此后(如果未经特别声明),我们将把具有相同的长和相同正向的矢量,不论它们起点的位置如何不同,都当作恒等的来看待. 换句话说,我们将把彼此相等的矢量认为是完全恒等的(或同价的).

但我们必须声明,在纯粹和应用数学里尚有很多问题,在讨论时矢量起点的位置仍是相当重要. 为区别这些矢量我们把刚才所说的矢量(即说它们起点的位置不起任何作用的) 叫作自由矢量.

在数学、力学、物理学里,不自由的矢量可分为滑动矢量和胶着矢量.

滑动矢量　这些矢量不仅是要相等,而且要在同一直线上,方才算作全等(同价). 滑动矢量的例子,如施于刚体的力. 事实上,由力学可知,两个相等且在同一直线上的力,对于刚体产生相同的力学作用. 在这种意义上才算是同价的矢量.

胶着矢量　这些矢量不仅是要相等,而且要有相同的起点,方才算作全等. 胶着矢量的例子:施于非刚体内(例如弹性体内) 某一点的力.

Ⅱ. 矢量的和. 数量乘矢量的乘积

§6. 加法和乘法的运算　下文(在本节和在本章第五节) 论到一些最简单的运算,和通常数字的加法、乘法相当. 这些运算的讨论属于矢量理论的一个部门,叫作矢性代数. 我们只以列举最基本的概念为限.

---

①　有时也把它叫作几何的等式.

这些运算或另一种运算的引进要看它们是否适合实际应用来决定. 我们仍叫下文所引进的运算作“加法”和“乘法”,因为它们具有通常数字加法和乘法的某些基本性质.

现在列举通常数字加法和乘法的一些性质. 这些性质在下文所引进的运算里依然是正确的(个别情形将在后面加以证明).

1° 加法的交换律:有穷多项相加的总和与相加的次序无关.

2° 加法的结合律:把各项任意结合,分组相加,它们的总和不变.

例如

$$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$$

3° 分配律:这个性质可以说明如下:

用某个因子乘多项的总和,只需用它遍乘各项,再将结果加起来. 用公式表示如

$$\begin{cases}(a_1+a_2+\cdots+a_n)b=a_1b+a_2b+\cdots+a_nb\\ b(a_1+a_2+\cdots+a_n)=ba_1+ba_2+\cdots+ba_n\end{cases}\tag{1}$$

和上面所述的性质相反,下一个等式所表达的性质

$$ab=ba$$

(即乘法的交换律),和另一个等式所表达的性质

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

(即乘法的结合律),对于下文所引进的某些运算不再通用.

注1 如果已知加法和乘法的运算,具有性质2°(即结合律),并有等式

$$(a_1+a_2)b=a_1b+a_2b,b(a_1+a_2)=ba_1+ba_2\tag{1a}$$

所代表的性质(即两项的分配律),那么便可由此推得普遍的公式(1). 我们举例说明如何可由公式(1a)的第一式推出公式(1)的第一式. 设已知

$$(a_1+a_2)b=a_1b+a_2b\tag{2}$$

即公式(1)的第一式,当 $n=2$ 时有效,现在要证明它对于一切的 n 都有效,只需暂先假定它在 $n-1$ 项时有效,证明它在推广到 n 项后仍然有效(即“由 n 推到 $n+1$”的证法,或叫作数学归纳法). 上面提到的公式在 $n-1$ 项时可表式如下

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})b=a_1b+a_2b+\cdots+a_{n-1}b\tag{1b}$$

根据假定,作为正确.

由2°得

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\alpha+a_n$$

这里暂用记号 $\alpha=a_1+\cdots+a_{n-1}$. 应用式(2)得

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n)b = (\alpha + a_n)b = \alpha b + a_n b$$
$$= (a_1 + \cdots + a_{n-1})b + a_n b$$

由此并根据(1b),便可推得所求的公式

$$(a_1 + \cdots + a_n)b = a_1 b + a_2 b + \cdots + a_n b$$

用同样方法我们并可证明公式(1)里的第二式.

注 2　直接由性质 1° ~ 3°,很容易证明和乘和的通常法则,即"多项式相乘的法则":先用第一和的每项乘第二和的每项,再将乘得的结果相加.实际上,设乘积为

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

暂设 $b_1 + \cdots + b_n = b$,然后应用公式(1)的第一式,得

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$
$$= (a_1 + \cdots + a_n)b$$
$$= a_1 b + a_2 b + \cdots + a_n b$$

在这个和的每一项,把 b 的数值 $b_1 + \cdots + b_n$ 代入,再应用公式(1)的第二式,便得所求的结果.

§7. 矢量的和　设在空间已知若干个占有任意位置的矢量

$$\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \cdots, \boldsymbol{P}_{n-1}, \boldsymbol{P}_n$$

(图 3(a);为使图形简单,只取四个矢量,即在这里 $n = 4$).

在空间选定任意一点 O,在 O 上引矢量 $\boldsymbol{P}_1$(图 3(b));然后在 $\boldsymbol{P}_1$ 的终点上引矢量 $\boldsymbol{P}_2$;再在 $\boldsymbol{P}_2$ 的终点上引矢量 $\boldsymbol{P}_3$.如此我们得到一条由矢量组成的折线.这些矢量等于相应的矢量

$$\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \cdots, \boldsymbol{P}_{n-1}, \boldsymbol{P}_n$$

而它们的位置前后相衔接,前面一个矢量的终点和后面一个矢量的起点叠合.

这条(通常开口的)折线叫作已知矢量系的多边形.

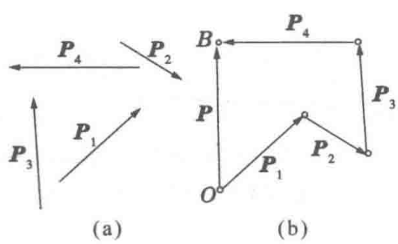

图 3

矢量 $\boldsymbol{P} = \overrightarrow{OB}$,用第一个矢量的起点 O 做起点,用最后一个矢量的终点 B 做终点.它是这个多边形的封口矢量.

这个封口矢量或和它相等的矢量叫作已知矢量的和,它可写成下式

$$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_3 + \cdots + \boldsymbol{P}_{n-1} + \boldsymbol{P}_n \tag{1}$$

有时为了着重说明这是矢量的和,不是它们的长的总和,我们也叫(1)作

矢和.

由矢量的和的构成法,各项都是顺着一定次序相加,但很容易见到这个结果是与次序无关的,即矢量加法依定义具有交换律的性质.

实际上,可先证明这个和

$$\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_3+\boldsymbol{P}_4+\cdots+\boldsymbol{P}_{n-1}+\boldsymbol{P}_n \tag{2}$$

不因两个相邻项的互调而改变. 例如把 $\boldsymbol{P}_2$ 和 $\boldsymbol{P}_3$ 两项对调,即做成和式

$$\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_3+\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_4+\cdots+\boldsymbol{P}_n \tag{3}$$

由图4 先按次序(2) 构成给定的矢量的多边形,然后(用间断线条改变图形画成) 换为将 $\boldsymbol{P}_2$ 和 $\boldsymbol{P}_3$ 两项对调后所得的多边形. 显然矢量 $\boldsymbol{P}_4$ 的起点仍旧保持原位置,因而它与在它后面的各矢量都不改变位置,故矢和 $\overrightarrow{OB}$ 照旧不变.

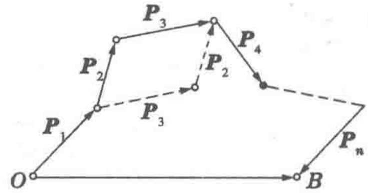

图 4

现在容易证明这个和不因各项的任何排列而变动. 实际上,无论各项如何排列,都可作为互换两个相邻的项继续举行若干次的结果,因此我们的命题得以证明.

矢量的和也具有结合律的性质,即可结合各项任意分为若干组来相加. 留待读者自行证明.

习　题

1. 矢量 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_n$ 有相同的正向,求作矢和,并证明在这种情形下,矢和的长等于各个矢量的长的和. 再证在除此情形之外,矢和的长恒小于各项的长的和.

2. 求作两个反向矢量的和,并证明这个矢和的长等于两矢长之差的绝对值,而它的正向和较大一项(就长来说) 的正向一致.

3. 如果矢和等于 $\boldsymbol{0}$,那么,矢量的多边形有什么特殊的鉴别?

§8. 特例　如果项数等于2,那么,和的组成可按照次序

$$\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$$

又可按照次序

$$\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_1$$

由前面的证明,或由图5 可以直接看出,所得的结果是同一个矢量

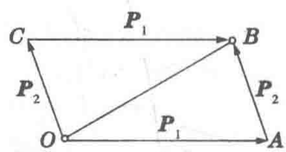

图 5

$$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_1$$

图5说明两个矢量的和是把矢量$\boldsymbol{P}_1$和$\boldsymbol{P}_2$安放在同一起点上所凑成的那个平行四边形的对角线.这个对角线具有由这个公共的起点到达对顶的那个方向.这就是所谓矢量的平行四边形定律.

照前节所述,凡矢量的和显然可用下面方式来构成:先用平行四边形定律,把任意两项相加;再用这定律,把所得的结果和后面一项相加;如此类推下去.故前节所述的矢量加法也可用矢量平行四边形定律的名称.

现在讨论三项$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3$的情形,这可能有六种[①]次序:$(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)$,$(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_2)$,$(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_3)$,$(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_1)$,$(\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2)$,$(\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_1)$.(图6)

依每个次序相加,正如我们所预料的一样,都得到同一的和$\overrightarrow{OB}$.

看图便知这三个矢量的和可用平行六面体的对角线来表示.这个六面体是由有公共起点的三个矢量构成,而由这个公共起点到它的对顶点决定对角线的正向.

读者可复验这个特例,它们的和可以用平行四边形定律求得.例如先把矢量$\boldsymbol{P}_1$和$\boldsymbol{P}_2$依这定律相加,再将所得的结果和矢量$\boldsymbol{P}_3$相加.

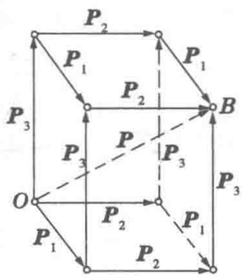

图6

习题和补充

1. 已知两个矢量$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$,及它们的夹角[②]ϑ,求这两个矢量的和的长$|\boldsymbol{R}|$,及$\boldsymbol{R}$与矢量$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$所成的角$\alpha,\beta$.

答:$|\boldsymbol{R}| = +\sqrt{|\boldsymbol{P}|^1 + |\boldsymbol{Q}|^2 + 2|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{Q}|\cos\vartheta}$;
角α和β可用下面的等式求得

$$\frac{\sin\alpha}{|\boldsymbol{Q}|} = \frac{\sin\beta}{|\boldsymbol{P}|} = \frac{\sin\vartheta}{|\boldsymbol{R}|}$$

例如,设$|\boldsymbol{Q}| \leqslant |\boldsymbol{P}|$,那么,角$\alpha$是锐角.由等式

$$\sin\alpha = \frac{|\boldsymbol{Q}|}{|\boldsymbol{R}|} = \sin\vartheta$$

可以查表计出α.于是由关系

$$\alpha + \beta = \vartheta$$

---

① 三个元的排列数等于$1\times2\times3=6$.

② 两个矢量间的夹角是它们的正向所成的角,以由$0°$计至$180°$为限.如果两矢量的起点不叠合,可保持着原来方向,把它们移到同一起点上,然后测量它们的夹角.