π的今昔

宁 挺

近代数学小丛书

福建教育出版社

π的今昔

宁挺

福建教育出版社

穴的今昔

宁　挺

出版：福 建 教 育 出 版 社
发行：福 建 省 新 华 书 店
印刷：福建教育出版社印刷厂
787×1092毫米　32开本　3.125印张　63千字
1986年1月第一版　1986年1月第一次印刷
印数：1——2,250
书号　7159·1062　定价：0.49 元

内 容 提 要

π 是古代数学研究的重要课题，在现代数学中也占有一定的地位。作者以富有民族自豪感的笔调，通俗地介绍了古今中外对 π 的研究状况，内容丰富多采。阅读本书不但可以了解 π 的发展史，也可以粗略地了解数学的发展史。

本书可作为高中学生课外读物，也可供理科大学生中学教师以及数学爱好者阅读。

目　录

一、π的缘起

说到“π的今昔”时，首先有必要讲一讲“π是什么？”

π〔*Pai*〕是小写的希腊字母，它的名称为*Pi*，现今已被公认为圆周率的标准代号，探索其原因是与圆周率的发展有关的。

大家知道，圆的周长和直径的比叫做圆周率。周长一词的希腊文是$\pi\varepsilon\rho l\varphi\varepsilon\rho\varepsilon l\alpha$意即一周的长度，直径一词的希腊文是$\delta l\alpha\mu\varepsilon\tau\rho o\zeta$意即对径的长度，1647年早期的英国数学家奥托兰特（W·oughtred 1574—1660）采用各自的第一字母π，δ表示周长和直径，于是圆周率便由$\frac{\pi}{\delta}$表示了。

奥托兰特引用的这个记号，首开π表示圆周率的先导，以后的英国数学家巴鲁（Isaac·Barrow）和D·格列哥里（David·Gregory）也应用符号π表示圆周。

然而，一个直径为单位长度的圆，它的圆周长度在数值上等于周长与直径的比，因此另一个英国数学家琼斯(W·Jones)在1706年出版的一个读物中改用了π表示圆周率。至于后世公认π为圆周率，则应归功于瑞士大数学家利昂纳德·欧拉（Leonhard·Euler）．1737年，欧拉在他的著作中，引用π表示圆周率，欧拉是一个伟大的数学家，在数学界有巨大影响，从此人们便沿用π来表示圆周率了。

在我国，圆周率的命名很不一致，有称圆率的，有称圜率的，也有称为周率的。符号的使用，亦不统一，清代大翻译家兼数学家李善兰（1811—1882），在我国第一本解析几何与微积分的译本《代微积拾级》中，用"周"字表示圆周率。1885年由邹立文、刘永锡编译的《形学备旨》则是以"冂"表示圆周率的，直到二十世纪初期，我国数学著作，由竖排改为横排，才比较统一地使用π表示圆周率。

然而，圆的周长和直径的比，到底是怎样的一个数字呢？这个问题一直为古人所关心，因为测量计算要用到π，即使与圆无关只与角度有关，也要用到π。

最初是用实际测量直径和圆周长度的方法来推算圆周率的，古埃及人曾经仔细地把一条麻绳绕在圆周上，围绕一周后，作上一个记号，然后把麻绳拉直，再用直尺度量，由于测量确定圆周率值，取决于测量者的细心程度和所给予的精确度，因此他们量得的π值，各不相同，一般公认为圆周率等于3，现在看来，这个圆周率是很不精确的，因为按照这个圆周率，则世界上所有的车轮都变成了六角形了。

古代经验计算家们都很明白，根据他们的测量，π值是明显地大于3的。由于建筑工程、机械制造、改进容器的精确程度以及天文、历法研究的需要，便考虑着改进计算π的方法，最早进行科学尝试的是希腊数学家阿基米德。

二、π的最早计算

公元前 240 年左右，阿基米德使用了近代数学的“逼近”方法，精确地计算了 π。为了说明他的想法，先从一个直径为单位长的圆内接正三角形讲起。

使用普通的方法，可以算出这个三角形的周长为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$，写成小数形式，便是 2.598076……显然，正三角形的周长小于圆周之长。

把这个三角形各顶点之间的弧二等分，就在圆周上作成一个正六边形，它的周长恰好为 3，3 比正三角形的周长大，但仍比圆的周长小。

如此继续下去，可以得到圆的内接正十二边形，正二十四边形，正四十八边形……于是多边形与圆的周界之间的空隙变得越来越小，尽管它们永远不能完全与圆重合，但是多边形却可以按照人们的愿望无止境地接近于圆周。

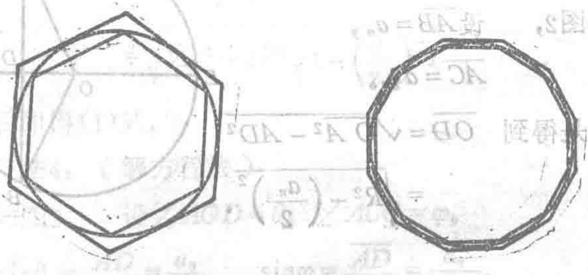

图 1

同样还可以用圆的外切正多边形来重复相同的工作，又得到一系列周长逐渐减小，但却无限逼近圆周长的另一类正多边形。图1就是用正六边形、正十二边形说明逼近的情形。

阿基米德发现，一个圆的周长，总是大于其内接正多边形的周长，而小于其外切正多边形的周长的，当正多边形的边数不断倍增时，它们的周长，就越来越接近于圆的周长。

阿基米德置圆的周长于两个序列之间，一个从下面逼近π，另一个从上面逼近π。为了确定这两个序列，他使用了下面的公式：

设a_n和a_{2n}分别表示半径为R的圆内接正n边形和正$2n$边形的一边长；A_n和A_{2n}分别表示半径为R的圆外切正n边形和正$2n$边形的一边长。

于是有：
$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n}}, \tag{1}$$
$$A_{2n}=\frac{2R\cdot A_n}{2R+\sqrt{4R^2+A_n^2}}. \tag{2}$$

人们有多种方法证明公式(1)。

证法1：（勾股方法）

如图2， 设$\overline{AB}=a_n$，

$\overline{AC}=a_{2n}$。

于是得到 $\overline{OD}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AD}^2}$

$=\sqrt{R^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$.

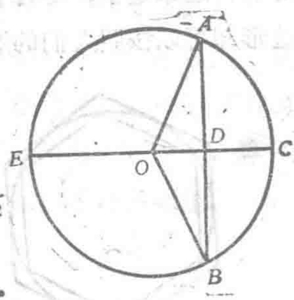

图 2

另一方面 $\overline{DC}=\overline{OC}-\overline{OD}=R-\sqrt{R^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$。

再由勾股定理得到 $a_{2n}=\overline{AC}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DC}^2}$

$$=\sqrt{\left(\frac{a_n}{2}\right)^2+\left[R-\sqrt{R^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right]^2}.$$

把上式右边根号内的项加以整理，就得到(1)式。

证法2：（圆幂方法）

如图2， $\overline{AC}^2=\overline{CD}\cdot\overline{CE}$，而$\overline{CE}=2R$，

$$\overline{CD}=\overline{OC}-\overline{OD}=R-\sqrt{R^2-\overline{AD}^2}.$$

$$\therefore\quad a_{2n}^2=2R\left[R-\sqrt{R-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right]=2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2},$$

故得 $a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2}}$。

证法3：（三角方法）

如图2，设$\angle AOD=\theta$，那末$\frac{a_n}{2}=\overline{AD}=R\sin\theta$。

类似地 $\frac{a_{2n}}{2}=\frac{AC}{2}=R\sin\frac{\theta}{2}$，

因此 $a_{2n}=2R\sin\frac{\theta}{2}=2R\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

$$=\sqrt{2R^2-2R^2\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$=\sqrt{2R^2-2R^2\sqrt{1-\left(\frac{a_n}{2R}\right)^2}},$$

整理后即得(1)式。

证法4：（解方程法）

如图2， 设$\angle AOD=\theta$，$\angle ACO=\varphi$，

则 $\sin\theta=\frac{\overline{AD}}{\overline{OA}}=\frac{a_n}{2R}$， $\sin\varphi=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\frac{a_n}{2a_{2n}}$。

而 $\varphi=\dfrac{\pi-\theta}{2}$，即 $\theta=\pi-2\varphi$。

故 $\cos\theta=\cos(\pi-2\varphi)=-\cos2\varphi=-(1-2\sin^2\varphi)$

$$=2\left(\frac{a_n}{2a_{2n}}\right)^2-1=\frac{a_n^2}{2a_{2n}^2}-1。$$

但是 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，

所以 $\left(\dfrac{a_n}{2R}\right)^2+\left(\dfrac{a_n^2}{2a_{2n}^2}-1\right)^2=1$。

化简得 $a_{2n}^4-4R^2a_{2n}^2+R^2a_n^2=0$。

解得： $$a_{2n}^2=\frac{4R^2\pm\sqrt{16R^4-4a_n^2R^2}}{2}$$

$$=2R^2\pm R\sqrt{4R^2-a_n^2}。$$

因为 $a_{2n}\leqslant R$，因此根式前的“+”号不合题意。

故得 $a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2}}$。

对于公式(2)，亦有多种方法作证，然而用纯几何方法，计算圆外切正多边形的边长，比计算圆内接正多边形的边长要复杂得多，因而我们介绍一个三角证法。

如图 3，设外切正 $2n$ 边形的中心角为2θ，则

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{A_{2n}}{2R},\quad \mathrm{tg}2\theta=\frac{A_n}{2R}。$$

由 $\mathrm{tg}2\theta=\dfrac{2\mathrm{tg}\theta}{1-\mathrm{tg}^2\theta}$ 得：

$$\frac{A_n}{2R}=\frac{2\cdot\dfrac{A_{2n}}{2R}}{1-\dfrac{A_{2n}^2}{4R^2}}=\frac{4RA_{2n}}{4R^2-A_{2n}^2}。$$

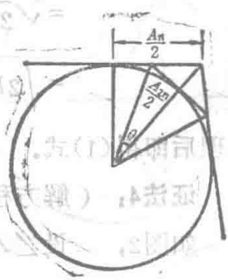

图 3

因此得： $A_nA_{2n}^2+8R^2A_{2n}-4R^2A_n=0$。

解之得： $A_{2n}=\frac{2R(\pm\sqrt{4R^2+A_n^2}-2R)}{A_n}$。

因为$A_{2n}>0$，所以根号前的“－”不合题意，故得：

$$A_{2n}=\frac{2R(\sqrt{4R^2+A_n^2}-2R)}{A_n}=\frac{2RA_n}{2R+\sqrt{4R^2+A_n^2}}。$$

这两个公式告诉我们，可以从给定的内接和外切正多边形的边长，去求得具有两倍边数的内接和外切正多边形的边长，因为圆内接和外切正六边形的边长是容易计算的，因此只要从内接和外切正六边形开始，连续地去实行这样的过程，我们便可以依次求得圆内接、外切正十二、二十四、四十八……边形的边长和周长，这样只要有足够的耐心，忍受得了边数极多的多边形的沉闷而单调的计算，就可以把π的值，确定到任意的精确程度。

阿基米德在一个直径为单位长的圆上作计算，花了大量的时间，一直计算到九十六边形，发现π的值略小于$\frac{22}{7}$，而略大于$\frac{223}{71}$，即：

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$$①。

这是第一次在数学中，提供了误差的估计，给出计算结果的精确度。

这两个分数的平均值是$\frac{3123}{994}$，化成小数为3.141815……，

①阿基米德的这一工作，可以从他的《圆的度量》一书中看到。

它仅比π的实际值大0.0082%或$\frac{1}{12500}$．直到今天，它的精确到两位小数的值3.14，仍被人们经常地应用着。

上面这种应用内接和外切正多边形去计算π的方法，称为π计算的古典方法。

阿基米德以后，希腊的天文学家托勒密（Ptolemy），大约在公元150年，使用了古典方法得到π的近似值为：

$$\pi \approx 3.8'30'',$$

这是用60进制的记数表示法，经换算得：

$$3.8'30'' = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = \frac{377}{120} = 3.141\dot{6}.$$

此率载在他的天文著作《大辑》②一书中，在欧洲十六世纪以前，再没有得到过比这个值更佳的数值了。

②这一著作的原书名是《数学论集》。

三、我国的古圆周率

中国是世界上文化发达最早的国家之一，在长期的社会实践中，积累了丰富的数学知识，对世界数学的发展，产生过很大的影响。

秦汉以前，我国古人认为圆周率是“径一周三”，此率记载在我国最早的天文数学著作《周髀算经》里。

《周髀算经》大约成书于公元前一世纪，它总结了我国古代天文学中所应用的数学知识，其中包括著名的勾股定理和复杂分数的运算.当时凡遇周径问题，概取“径一周三”，我国古代另一本数学专著《九章算术》里的有关计算，也按这个算率进行，历代相传，渊源很久，我国称之为古率。

通过实践，人们发现古率入算，无论求周求积，总是偏小，因而明白了“径一周三”，不过是取其整数部分而已，实际上是圆径一而周三有余，但究竟余多少呢？当时是弄不清楚的，随着实用方面的需要，推动了后人对圆周率的进一步考察和研究。

西汉末年，王莽差历法家刘歆，议定度量的新标准，刘歆于元始年间（公元1—5年），用铜制造了一个口小底大的容器，定名为“律嘉量斛”，上面铭刻着：“方尺而圆其外，庣旁九厘五毫，幂百六十二寸，深尺，积一千六百二十寸，容十斗。”这短短数语，就是刘歆圆周率的记载。也是我国

圆周率发展史上第一个与古率不同的记载。

刘歆的算草，并没有传下来，但是根据故宫博物馆所藏原器的研究，可以推出刘歆的圆周率数值和他的算法线索。按古算今释的方法：方尺而圆其外，就是边长一尺的正方形和它的外接圆，斛底内周是这个外接圆的同心圆，庣旁就是外接圆与同心圆的半径之差，为九厘五毫，在图 4 中，线段 AE 便是庣旁。

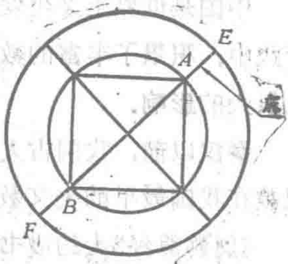

图 4

由此得：斛底的直径

$\sqrt{2}+2\times0.0095\approx1.4332$尺。

已知其面积为1.62方尺，

故从 $\pi r^2=1.62$，即

$$\pi\left(\frac{1.4332}{2}\right)^2\approx1.62.$$

求得 $\pi=\dfrac{1.62\times4}{(1.4332)^2}=3.154664\cdots\cdots\approx3.1547$。

刘歆所得数值，虽然还不够精确，但他“制器审容”，不再沿用“古率”，对于寻求新的圆周率，是有一定功绩的。

公元 78—139 年间，我国东汉科学家张衡，也曾求得圆周率的两个数值，一个载在《开元占经》上，率值为$\frac{92}{29}$，其算法不详，有待继续探索；另一个载于《九章算术注》，率值为$\sqrt{10}$。按今日的理解，循其来源如下：

秦汉时代，人们还没有掌握球体积的算法，因而有一个

较长的时期，都误认为球体积和它的外切圆柱体积之比，和圆柱体积与其外切立方体积之比，以及圆面积与圆径平方之比，都等于3∶4，写成算式，便是：

$$\frac{V_{\text{球}}}{V_{\text{外切圆柱}}}=\frac{V_{\text{外切圆柱}}}{V_{\text{外切立方体}}}=\frac{S_{\text{圆}}}{S_{\text{圆外切正方形}}}=\frac{3}{4}. \qquad (1)$$

于是，

$$V_{\text{球}}=\frac{3}{4}\times\left(V_{\text{外切圆柱}}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}V_{\text{外切立方体}}\right).$$

由此得到 $$\frac{V_{\text{外切立方体}}}{V_{\text{球}}}=\left(\frac{4}{3}\right)^2, \qquad (2)$$

即 $$\frac{D^3}{\Lambda}=\frac{16}{9}, \qquad \therefore\ V=\frac{9}{16}D^3.$$

这便是《九章算术》中，少广章记载的球积求径术。

用公式$D=\sqrt[3]{\frac{16V}{9}}$，计算得来的直径$D$，显得偏小，张衡注《九章算术》时，曾做了一个金球，用来校正“九章”中球积计算上的讹错，但是他对于上述(1)式中的理论错误，并未觉察，认为毛病出在π值上，因而只着眼于纠正π之值，他说$V\neq\frac{9}{16}D^3$，而改为 $V=\frac{9}{16}D^3+\frac{1}{16}D^3=\frac{5}{8}D^3$，于是得：

$$D=\sqrt[3]{\frac{8}{5}V}.$$

这个经验公式正说明了

外切立方体积D^3∶球体积$V=8∶5$。

再使用(1)式中的理论，便得：

圆外切正方形面积：圆面积 $=\sqrt{8}:\sqrt{5}$，

即 $4r^2:\pi r^2=\sqrt{8}:\sqrt{5}$。

从而得 $\pi=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{8}}=\frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{10}\approx 3.1622$。

张衡修正的 π 值，虽不及刘歆所得精确，但比起古率来，仍是一大进步。其中 $\pi=\sqrt{10}$，这个结果是世界上最早的记录。

东汉末年，蔡邕(133—192年)认为 $\pi>\frac{25}{8}=3.125$。三国时吴人王蕃（219—257年）研究天文、历法，也曾以 $\frac{142}{45}=3.155$ 为圆周率值。到了三国末期，对圆周率的研究又进入了一个新阶段。那就是数学家刘徽由于研究容器的容积和注解《九章算术》而创造的，用割圆术来计算圆周率值的科学方法。