

初中
数学
八年级

最新

奥赛

创新训练新思维

突破传统模式

强化新学知识

练就纵深思考

思路灵活巧妙



南海出版公司

奥赛创新训练新思维

初中数学 八年级

主 编 余华海
编 写 蔡春洪 兰 燕 陈松林
张 伟 余深海 沈明亮
廖帝学 白廷斌 瞿小刚
瞿小强 孙 鹏

南海出版公司

2004·海口

图书在版编目(CIP)数据

奥赛创新训练新思维·数学·八年级/余华海主编。
海口:南海出版公司,2004.8

ISBN 7-5442-2931-9

I. 奥... II. 余... III. 数学课 - 初中 - 习题
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 072587 号

AOSAI CHUANGXIN XUNLIAN XINSIWEI

奥 赛 创 新 训 练 新 思 维

八年级 (数学)

主 编	余华海
责任编辑	吴敬群
责任校对	林资豪
封面设计	吴 丹
出版发行	南海出版公司 电话 (0898)65350227
社 址	海口市蓝天路友利园大厦 B 座 3 楼 邮编 570203
电子信箱	nhcbs @ 0898. net
经 销	新华书店
排 版	成都华宇电子制印有限公司
印 刷	四川西南建筑印务有限公司
开 本	880×1230 毫米 1/32
印 张	6.75
字 数	166 千
版 次	2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷
书 号	ISBN7-5442-2931-9
定 价	8.00 元

前　言

新一轮基础教育课程改革强调加强对学生能力的培养，倡导发展学生的个性特长。中小数奥数训练就是使同期学生的数学思维方法、能力以及个性特长能得到很好发展的重要途径。鉴于此，我们编写了中小学《奥赛创新训练新思维》丛书。本丛书有以下特点：

- (1)紧扣新课程标准和教材要求选编内容和训练题，杜绝了任意拔高要求和降低要求的现象。
- (2)从一年级至九年级，每年级一册。每册内容与该年级所学知识点同步，突出训练专题，既有利于学生知识和能力的综合，又有助于对学生的新课学习进行引导。
- (3)本丛书侧重对学生思维能力、解题能力和综合能力的训练，不仅能帮助学生发展个性特长，而且能帮助学生在升学考试和竞赛中取得优异的成绩。

本丛书汇集了近年中小学数学奥赛的精华，体系新颖，特色鲜明，简明扼要，实用性强，是帮助学生成长的好伙伴，是教师和家长指导学生成才的好助手。

(251)	圆的性质和圆周角
(261)	圆心角和圆心距
(271)	垂径定理
(281)	圆周角定理
(291)	圆周率
(301)	圆的面积
(311)	扇形的面积
(321)	圆锥的侧面积
(331)	圆柱的侧面积
(341)	球的表面积
目 录	
(一) 教学进度表	
(二) 教学进度表	
(三) 教学进度表	
参考书目	

1. 因式分解(一)	(1)
因式分解(二)	(3)
因式分解(三)	(10)
2. 三角形的元素	(16)
3. 全等三角形	(22)
4. 等腰三角形	(28)
5. 直角三角形	(34)
6. 分式的概念、性质与运算	(42)
7. 分式方程(组)及其应用	(47)
8. 平行四边形	(53)
9. 矩形、菱形、正方形	(60)
10. 梯形及其中位线定理	(68)
11. 数的开方	(76)
12. 无理数的整数、小数部分的应用	(82)
13. 二次根式的概念与性质	(87)
14. 二次根式的化简	(92)
15. 比例线段	(100)
16. 相似三角形(一)	(107)
相似三角形(二)	(114)
17. 几何变换	(121)

18. 几何中的计数问题	(129)
19. 面积问题与面积证明方法	(134)
20. 不定方程	(140)
21. 抽屉原理	(145)
22. 染色和赋值	(150)
23. 竞赛题选讲(一)	(155)
竞赛题选讲(二)	(162)
竞赛题选讲(三)	(168)
参考答案	(179)

(1) 例题	(一) 简介
(2) 例题	(二) 简介
(3) 例题	(三) 简介
(4) 例题	(四) 简介
(5) 例题	(五) 简介
(6) 例题	(六) 简介
(7) 例题	(七) 简介
(8) 例题	(八) 简介
(9) 例题	(九) 简介
(10) 例题	(十) 简介
(11) 例题	(十一) 简介
(12) 例题	(十二) 简介
(13) 例题	(十三) 简介
(14) 例题	(十四) 简介
(15) 例题	(十五) 简介
(16) 例题	(十六) 简介
(17) 例题	(十七) 简介
(18) 例题	(十八) 简介
(19) 例题	(十九) 简介
(20) 例题	(二十) 简介
(21) 例题	(二十一) 简介
(22) 例题	(二十二) 简介
(23) 例题	(二十三) 简介
(24) 例题	(二十四) 简介
(25) 例题	(二十五) 简介
(26) 例题	(二十六) 简介
(27) 例题	(二十七) 简介
(28) 例题	(二十八) 简介
(29) 例题	(二十九) 简介
(30) 例题	(三十) 简介
(31) 例题	(三十一) 简介
(32) 例题	(三十二) 简介
(33) 例题	(三十三) 简介
(34) 例题	(三十四) 简介
(35) 例题	(三十五) 简介
(36) 例题	(三十六) 简介
(37) 例题	(三十七) 简介
(38) 例题	(三十八) 简介
(39) 例题	(三十九) 简介
(40) 例题	(四十) 简介
(41) 例题	(四十一) 简介
(42) 例题	(四十二) 简介
(43) 例题	(四十三) 简介
(44) 例题	(四十四) 简介
(45) 例题	(四十五) 简介
(46) 例题	(四十六) 简介
(47) 例题	(四十七) 简介
(48) 例题	(四十八) 简介
(49) 例题	(四十九) 简介
(50) 例题	(五十) 简介
(51) 例题	(五十一) 简介
(52) 例题	(五十二) 简介
(53) 例题	(五十三) 简介
(54) 例题	(五十四) 简介
(55) 例题	(五十五) 简介
(56) 例题	(五十六) 简介
(57) 例题	(五十七) 简介
(58) 例题	(五十八) 简介
(59) 例题	(五十九) 简介
(60) 例题	(六十) 简介
(61) 例题	(六十一) 简介
(62) 例题	(六十二) 简介
(63) 例题	(六十三) 简介
(64) 例题	(六十四) 简介
(65) 例题	(六十五) 简介
(66) 例题	(六十六) 简介
(67) 例题	(六十七) 简介
(68) 例题	(六十八) 简介
(69) 例题	(六十九) 简介
(70) 例题	(七十) 简介
(71) 例题	(七十一) 简介
(72) 例题	(七十二) 简介
(73) 例题	(七十三) 简介
(74) 例题	(七十四) 简介
(75) 例题	(七十五) 简介
(76) 例题	(七十六) 简介
(77) 例题	(七十七) 简介
(78) 例题	(七十八) 简介
(79) 例题	(七十九) 简介
(80) 例题	(八十) 简介
(81) 例题	(八十一) 简介
(82) 例题	(八十二) 简介
(83) 例题	(八十三) 简介
(84) 例题	(八十四) 简介
(85) 例题	(八十五) 简介
(86) 例题	(八十六) 简介
(87) 例题	(八十七) 简介
(88) 例题	(八十八) 简介
(89) 例题	(八十九) 简介
(90) 例题	(九十) 简介
(91) 例题	(九十一) 简介
(92) 例题	(九十二) 简介
(93) 例题	(九十三) 简介
(94) 例题	(九十四) 简介
(95) 例题	(九十五) 简介
(96) 例题	(九十六) 简介
(97) 例题	(九十七) 简介
(98) 例题	(九十八) 简介
(99) 例题	(九十九) 简介
(100) 例题	(一百) 简介



$$1 + (1 + ab + bc + ca) = \text{左侧}$$

$$1 + (1 + a) =$$

$$[1 + (1 + a) - (1 + a)](1 + a) =$$

$$(1 + a + b)(1 + a) =$$

$$(1 + a + b + c)(1 + a + b) = \text{左侧}$$

$$(1 + a + b + c)(1 + a) =$$

得：去括号—展开整理—提取公因式法

$$(1 + a + b + c)(1 + a + b) = \text{左侧}$$

$$(1 + a + b + c)(1 + a + b + c) =$$

$$(1 + a + b + c)^2 =$$

专题引导

因式分解是把一个多项式化为几个整式的积的形式的一种运算。它是中学代数变形的基础。常用的方法有提取公因式法、运用公式法、分组分解法、十字相乘法、拆项添项法等。在解题时要认真观察所要解多项式的特点，灵活选择方法。此外还要注意分解因式一定要在指定数（如有理数、无理数）的范围内分解到不能再分解为止（若没有指定范围时，一般在有理数范围内分解）。



典型例题

例1 分解因式: $a^7 - ab^6$

思路导航: 先提取公因式 a , 然后对因式 $a^6 - b^6$ 运用公式法分解。

$$\text{解: 原式} = a(a^6 - b^6) = a(a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$$

$$= a(a - b)(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$$

例2 分解因式: $a^3 + 3a^2 + 3a + 2$

思路导航: 此多项式既不能直接提取公因式, 也不能直接用公式, 因此考虑用分组分解法, 直接分组分解难以进行, 因此要进行适当的添项拆项。

解法一: 拆常数项, 得:

$$\text{原式} = (a^3 + 3a^2 + 3a + 1) + 1$$

$$= (a+1)^3 + 1$$

$$= (a+2)[(a+1)^2 - (a+1) + 1]$$

$$= (a+2)(a^2 + a + 1)$$

解法二: 拆二次项、一次项, 得:

$$\text{原式} = (a^3 + 2a^2) + (a^2 + 2a) + (a+2)$$

$$= (a+2)(a^2 + a + 1)$$

解法三: 由二次项、一次项的另一种拆法, 得:

$$\text{原式} = (a^3 + a^2 + a) + (2a^2 + 2a + 2)$$

$$= a(a^2 + a + 1) + 2(a^2 + a + 1)$$

$$= (a+2)(a^2 + a + 1)$$

解法四:添常数项, 得:

$$\text{原式} = (a^3 - 1) + (3a^2 + 3a + 3)$$

$$= (a-1)(a^2 + a + 1) + 3(a^2 + a + 1)$$

$$= (a+2)(a^2 + a + 1)$$

创新训练

1. (“希望杯”数学邀请赛初二试题) 已知实数 a, b 满足条件 $a^2 + b^2 + a^2b^2 = 4ab - 1$, 则()。

A. $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

2. (“希望杯”数学邀请赛题) 分解因式: $(x^2 - 1)(x+3)(x+5) + 12 =$ _____.

3. (全国初中数学竞赛题) 已知 $ab \neq 0, a^2 + ab - 2b^2 = 0$, 那么, $\frac{2a-b}{2a+b}$ 的值为_____.



题型归纳

左因式表示法

因式分解(二)

$$21 + (5+x)(2+x) = \text{左因式} \times \text{右因式}$$

$$21 + [(2+x)(3+x)] = \text{左因式} \times \text{右因式}$$

$$21 + (2+x)(3+x) = \text{左因式} \times \text{右因式}$$

即, $x = 2 + 3 + 1 = 6$

21 + (8+x) = 左因式

21 + 8 + x = 右因式

(8+1)(8+1) =

专题引导

本专题主要学习换元法、配方法、待定系数法等方法在因式分解中的应用.

1. 换元法分解因式

使用换元法分解因式的关键是确定代换的对象. 若选择得当, 可使复杂的问题变得简单, 看上去无法解答的问题变得易于解答. 本文将介绍换元法在分解因式中的应用及常用的换元技巧.

2. 配方法在因式分解中的应用

在代数式中, 利用添项的方法, 将原多项式配上适当的部分, 使添项的多项式的一部分成为一个完全平方式, 这种方法叫做配方法. 应用配方法进行因式分解, 常能将多项式配成 $A^2 - B^2$ 的形式, 使多项式可用平方差公式分解为 $(A+B)(A-B)$ 的形式.

3. 待定系数法分解因式

如果两个多项式恒等, 那么它们的次数和同次项的系数都相同, 并且任何数值代替其中的字母, 这两个多项式的值总相等, 反过来也是对的. 这一显见的事实, 正是使用待定系数法分解因式的出发点.

因式分解中利用待定系数法的主要步骤是: (1)根据题意, 设出含待定系数的恒等式; (2)根据同类项系数对应相等得出待定系数的方程(组); (3)解出待定系数; (4)给出答案.



典型例题

1. 换元法分解因式

例1 分解因式: $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= [(x+1)(x+7)][(x+3)(x+5)]+15 \\ &= (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15\end{aligned}$$

设 $x^2+8x+7=y$, 则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= y(y+8)+15 \\ &= y^2+8y+15 \\ &= (y+3)(y+5) \\ &= (x^2+8x+10)(x^2+8x+12) \\ &= (x+2)(x+6)(x^2+8x+10)\end{aligned}$$

注: 此题用的整体代换法.

例2 分解因式: $(1+x+x^2+x^3)^2-x^3$

解: 设 $y=1+x+x^2$, 则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (y+x^3)^2-x^3 \\ &= y^2+2yx^3+x^6-x^3 \\ &= y^2+2yx^3+x^3(x^3-1) \\ &= y^2+2yx^3+x^3(x-1)(x^2+x+1) \\ &= y^2+2yx^3+x^3(x-1)y \\ &= y(y+2x^3+x^4-x^3) \\ &= y(y+x^3+x^4) \\ &= (1+x+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)\end{aligned}$$

注: 此题用的是局部代换法.

例3 分解因式: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)+x^2$

解: 原式 = $[(x+1)(x+6)][(x+2)(x+3)]+x^2$.

$$\begin{aligned}&= (x^2+7x+6)(x^2+5x+6)+x^2 \\ \text{设 } y &= \frac{(x^2+7x+6)+(x^2+5x+6)}{2}=x^2+6x+6\end{aligned}$$

$$\therefore \text{原式} = (y+x)(y-x)+x^2$$

换元法

$$= y^2 - x^2 + x^2 - ((1-y)x)[(1+y) + (1+x)x] = \\ = (x^2 + 6x + 6)^2 (1-y)(1+y)(1-x)(1+x) =$$

注:此题用的是均值代换法.

例4 分解因式: $(x+y-2xy)(x+y-2)+(1-xy)^2$

解:设 $x+y=m, xy=n$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (m-2n)(m-2)+(1-n)^2 \\ &= m^2 - 2m - 2mn + 4n + 1 - 2n + n^2 \\ &= m^2 - 2m(1+n) + (n+1)^2 \\ &= [m-(n+1)]^2 \\ &= (x+y-xy-1)^2 \\ &= [(x-1)(y-1)]^2 \\ &= (x-1)^2(y-1)^2 \end{aligned}$$

注:此题用的是多元代换法.

例5 分解因式: $x^4 + \sqrt{5}x^3 - 11x^2 - \sqrt{5}x + 10$

解:设 $\sqrt{5}=y$, 有 $10=2y^2$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= x^4 + yx^3 - (2y^2 + 1)x^2 - yx + 2y^2 \\ &= -2(x^2 - 1)y^2 + x(x^2 - 1)y + x^2(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(-2y^2 + xy + x^2) \\ &= (x+1)(x-1)(x-y)(x+2y) \\ &= (x+1)(x-1)(x-\sqrt{5})(x+2\sqrt{5}) \end{aligned}$$

注:此题用的是常数代换法.

例6 分解因式:

$$xy(xy+1)+(xy+3)-2(x+y+\frac{1}{2})-(x+y-1)^2 =$$

解:设 $xy=a, x+y=b$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= a^2 + a + a + 3 - 2b - 1 - b^2 + 2b - 1 \\ &= a^2 + 2a + 1 - b^2 \\ &= (a+1)^2 - b^2 \\ &= (a+1+b)(a+1-b) \\ &= (xy+1+x+y)(xy+1-x-y) \end{aligned}$$



$$=[x(y+1)+(y+1)][x(y-1)-(y-1)] \\ =(x+1)(x-1)(y+1)(y-1)$$

注:此题用的是和积换元法.

例7 分解因式:

$$(x^2+3x-4)^2-(3x^2-4x+2)^2+(2x^2-7x+6)^2$$

解:设 $x^2+3x-4=a$, $3x^2-4x+2=b$, 则

$$2x^2-7x+6=(3x^2-4x+2)+(x^2+3x-4)=b-a$$

$$\text{原式}=a^2-b^2+(b-a)^2$$

$$=a^2-b^2+2ab+a^2$$

$$=2a(a-b)=2(x^2+3x-4)[- (2x^2-7x+6)]$$

$$=-2(x+4)(x-1)(2x-3)(x-2)$$

注:此题用的是和差换元法.

例8 分解因式: $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

解:设 $a+b+c=m$, 则:

$$\text{原式}=(m-c)(m-a)(m-b)+abc$$

$$=m^3-(a+b+c)m^2+(ab+bc+ac)m-abc+abc$$

$$=m^3-m^3+(ab+bc+ac)m$$

$$=(a+b+c)(ab+bc+ac)$$

例9 分解因式: $x^4+1987x^2+1986x+1987$

思路导航:有些复杂的数学题,如果用字母来代替具体数字,往往能避繁就简,化难为易,本题中的数字较大,我们不妨试试.

解:设 $a=1987$, 则

$$\text{原式}=x^4+ax^2+(a-1)x+a$$

$$=(x^4-x)+(ax^2+ax+a)$$

$$=x(x-1)(x^2+x+1)+a(x^2+x+1)$$

$$=(x^2+x+1)(x^2-x+a)$$

$$=(x^2+x+1)(x^2-x+1987)$$

2. 配方法分解因式

例10 分解因式: $x^2-2(a+b)x-ab(a-2)(b+2)$

思路导航:将多项式中前两项 $x^2-2(a+b)x$ 进行配方,添上 $(a+b)$



$+b)^2 - (a+b)^2$ 即可分组分解.

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= x^2 - 2(a+b)x + (a+b)^2 - (a+b)^2 - ab(a-2)(b+2) \\
 &= [x^2 - 2(a+b)x + (a+b)^2] - [(a+b)^2 + ab(a-2)(b+2)] \\
 &= (x-a-b)^2 - [(a+b)^2 - 4ab + 2ab(a-b) + a^2b^2] \\
 &= (x-a-b)^2 - (a-b+ab)^2 \\
 &= (x-2+ab)(x-2a-ab)
 \end{aligned}$$

例 11 分解因式: $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$

思路导航: 将多项式中的部分项配方成三项式的完全平方, 然后再继续分解.

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= -a^4 - b^4 - c^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 4a^2b^2 \\
 &= 4a^2b^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2) \\
 &\equiv (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \\
 &= [(a+b)^2 - c^2][(c^2 - (a-b)^2)] \\
 &= (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)
 \end{aligned}$$

例 12 分解因式: $x^4 + y^4 + (x+y)^4$

思路导航: 将 $(x+y)^4$ 化为 $(x^2 + 2xy + y^2)^2$, 再将 $x^4 + y^4$ 化为 $(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$, 创造用完全平方公式分解因式的条件, 便可达到将原式分解因式的目的.

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + (x^2 + 2xy + y^2)^2 \\
 &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + (x^2 + y^2)^2 + 4xy(x^2 + y^2) + \\
 &\quad 4x^2y^2 \\
 &= 2(x^2 + y^2)^2 + 4xy(x^2 + y^2) + 2x^2y^2 \\
 &= 2[(x^2 + y^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2) + x^2y^2] \\
 &= 2(x^2 + y^2 + xy)^2
 \end{aligned}$$

例 13 分解因式: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

思路导航: 这是一个三元三次多项式, 根据题目结构的特点并由配方的联想, 将原多项式的某些项配成完全立方, 并使得配成完全立方的项与其余的项能用分组分解法分解因式.

$$\text{解: 原式} = x^3 + 3xy(x+y) + y^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz$$



$$\begin{aligned}
 &= (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y+z) \\
 &= [(x+y)+z][(x+y)^2 - (x+y)z + z^2] - 3xy(x+y+z)(x+y+z) \\
 &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)
 \end{aligned}$$

评注:由本题可知,对于某些三次多项式,必要时也可以利用添项的方法,使多项式成为一个完全立方式,进而达到解题的目的.

3. 待定系数法分解因式

例 14 m 为何值, $x^2 - y^2 + mx + 5y - 6$ 能够分解因式, 并分解之.

思路导航: 因为 $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, 所以如果原式可以分解因式, 那么它的两个因式一定具有 $x+y+a$ 和 $x-y+b$ 的形式.

解: 设 $x^2 - y^2 + mx + 5y - 6 = (x+y+a)(x-y+b)$

$$= x^2 - y^2 + (a+b)x + (b-a)y + ab$$

比较对应项的系数, 得

$$\begin{cases} a+b=m \\ b-a=5 \\ ab=-6 \end{cases}
 \text{解之, 得}
 \begin{cases} m=1 \\ a=-2 \text{ 或 } a=-3 \\ b=3 \text{ 或 } b=2 \end{cases}$$

\therefore 当 $m=1$ 时, $x^2 - y^2 + mx + 5y - 6 = (x+y-2)(x-y+3)$; 当 $m=-1$ 时, $x^2 - y^2 + mx + 5y - 6 = (x+y-3)(x-y+2)$.

例 15 分解因式: $x^4 + x^3 + x^2 + 2$

解: 设原式 $= (x^2 + mx + p)(x^2 + nx + q)$

即原式 $= x^4 + (n+m)x^3 + (mn+p+q)x^2 + (mq+np)x + pq$

$$\text{比较系数, 得}
 \begin{cases} n+m=1 \\ mn+p+q=1 \\ mq+np=0 \\ pq=2 \end{cases}
 \text{解之, 得}
 \begin{cases} p=1 \\ q=2 \\ m=-1 \\ n=2 \end{cases}$$

\therefore 原式 $= (x^2 - x + 1)(x^2 + 2x + 2)$

创新训练

1. 方程 $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 98$ 的正整数解有()组.



- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

2. 已知 $a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=10$, $a^3+b^3+c^3=36$, 那么, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的值是()。

- A.
- $\frac{13}{18}$
- B.
- $\frac{18}{13}$
- C.
- $-\frac{13}{18}$
- D.
- $-\frac{18}{13}$

3. (河南省初中数学竞赛题) 已知 a, b, c 是实数, $x = a^2 - b$, $y = b^2 - c$, $z = c^2 - a + 1$, 则下列说法正确的是().

- A. x, y, z 三个数中至少有一个是零
B. x, y, z 三个数中至少有一个是正数
C. x, y, z 三个数中至少有一个是负数
D. x, y, z 三个数中必为两正一负, 或者必为两负一正

4. (五城市联赛题) n 为某一自然数,代入代数式 n^3-n 中计算其值时,四个同学算出如下四个结果,其中正确的结果只能是()。

- A. 388944 B. 388945
 C. 388954 D. 388948

5. (北京市竞赛题) 已知正数 a, b, c 满足 $ab+a+b=bc+b+c=ac+a+c=3$, 则 $(a+1)(b+1)(c+1)=$ _____.



A.8 B.3 C.1 D.0

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 1, \text{求证: } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

因式分解(三)

$$\frac{81}{x^2} - 1 = 0 \quad \frac{81}{x^2} - 1 = \frac{81}{x^2} \quad \frac{81}{x^2} \text{ 是 } \frac{81}{x^2}, A$$

专题引导

1. 因式分解在计算中的应用

对于某些有理数的计算,若能借助因式分解,往往可使解题化繁为简,化难为易.

2. 因式分解的其他主要应用

因式分解是学习解一元二次方程、一元二次不等式等知识的基础.



典型例题

1. 因式分解在计算中的应用

例1 (“希望杯”全国数学邀请赛初二题)

$$\text{计算: } 1.2345^2 + 0.7655^2 + 2.4690 \times 0.7655$$

$$\text{解: 原式} = 1.2345^2 + 2 \times 1.2345 \times 0.7655 + 0.7655^2$$

$$= (1.2345 + 0.7655)^2 = 2^2 = 4$$

例2 (北京市初中数学竞赛试题)

$$\text{计算: } \frac{1995^3 - 2 \times 1995^2 - 1993}{1995^3 + 1995^2 - 1995 - 1}$$

$$\text{解: 原式} = \frac{1995^2(1995-2) - (1995-2)}{1995^2(1995+1) - (1995+1)}$$



$$= \frac{(1995-2)(1995^2-1)}{(1995+1)(1995^2-1)} = \frac{1995-2}{1995+1} = \frac{1993}{1996}$$

2. 因式分解的其他主要应用

(1) 求代数式的值

例3 若 n 为正整数, 并且 $|a-b+1| + (c+d+2008)^2 = 0$, 求 $2d(a-b)^{2n-1} + (c-d)(a-b)^{2n-1}$ 的值.

解: 由非负数的性质知 $a-b=-1$, $c+d=-2008$.

又 $\because n$ 为正整数, $\therefore 2n-1$ 为奇数. $\therefore 2d(a-b)^{2n-1} + (c-d)(a-b)^{2n-1} = (a-b)^{2n-1}(2d+c-d) = (a-b)^{2n-1}(c+d) = (-1)^{2n-1} \times (-2008) = 2008$

(2) 化简代数式

例4 若 $a^2+4ab+4b^2-1=0$, 化简 $a^3+2a^2b+a^2$.

解: 由已知得 $(a+2b)^2=1$, $\therefore a+2b=\pm 1$.

当 $a+2b=1$ 时, $a^3+2a^2b+a^2=a^2(a+2b+1)=2a^2$;

当 $a+2b=-1$ 时, $a^3+2a^2b+a^2=a^2(a+2b+1)=0$.

(3) 证明代数等式

例5 求证: $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$

证明: 左边 $= (a^2+b^2+2ab)+(2ac+2bc)+c^2$

$= (a+b)^2+2c(a+b)+c^2=(a+b+c)^2$ = 右边

(4) 比较大小

例6 若 $a < b$, $x < y$, 比较 $ax+by$, $bx+ay$ 的大小.

解: $(ax+by)-(bx+ay)$

$$= ax+by-bx-ay = (ax-bx)-(ay-by)$$

$$= x(a-b)-y(a-b) = (a-b)(x-y)$$

$\because a < b$, $x < y$, $\therefore a-b < 0$, $x-y < 0$.

$\therefore (a-b)(x-y) > 0$, 即 $(ax+by)-(bx+ay) > 0$,

$\therefore ax+by > bx+ay$

(5) 证明整除问题

例7 若 x , y 都为整数, 并且 $5x-y$ 能被 3 整除.

求证: $10x^2+23xy-5y^2$ 能被 9 整除.

