最新

初中数学

八年级

奥赛

创新训练新思维

突破传统模式
强化新学知识
练就纵深思考
思路灵活巧妙

南海出版公司

奥赛创新训练新思维

初中数学

八年级

主　编　余华海
编　写　蔡春洪　兰　燕　陈松林
张　伟　余深海　沈明亮
廖帝学　白廷斌　瞿小刚
瞿小强　孙　鹏

南海出版公司
2004·海口

图书在版编目(CIP)数据

奥赛创新训练新思维．数学．八年级/余华海主编．
海口:南海出版公司,2004.8
ISBN 7-5442-2931-9

Ⅰ.奥…　Ⅱ.余…　Ⅲ.数学课-初中-习题
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 072587 号

AOSAI CHUANGXIN XUNLIAN XINSIWEI
奥 赛 创 新 训 练 新 思 维
八年级 (数学)

主　　编　余华海
责任编辑　吴敬群
责任校对　林资豪
封面设计　吴　丹
出版发行　南海出版公司　电话 (0898)65350227
社　　址　海口市蓝天路友利园大厦 B 座 3 楼　邮编　570203
电子信箱　nhcbgs @ 0898. net
经　　销　新华书店
排　　版　成都华宇电子制印有限公司
印　　刷　四川西南建筑印务有限公司
开　　本　880×1230 毫米　1/32
印　　张　6.75
字　　数　166 千
版　　次　2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN7-5442-2931-9
定　　价　8.00 元

前　言

新一轮基础教育课程改革强调加强对学生能力的培养,倡导发展学生的个性特长。中小数奥数训练就是使同期学生的数学思维方法、能力以及个性特长能得到很好发展的重要途径。鉴于此,我们编写了中小学《奥赛创新训练新思维》丛书。本丛书有以下特点:

(1)紧扣新课程标准和教材要求选编内容和训练题,杜绝了任意拔高要求和降低要求的现象。

(2)从一年级至九年级,每年级一册。每册内容与该年级所学知识点同步,突出训练专题,既有利于学生知识和能力的综合,又有利于对学生的新课学习进行引导。

(3)本丛书侧重对学生思维能力、解题能力和综合能力的训练,不仅能帮助学生发展个性特长,而且能帮助学生在升学考试和竞赛中取得优异的成绩。

本丛书汇集了近年中小学数学奥赛的精华,体系新颖,特色鲜明,简明扼要,实用性强,是帮助学生成长的好伙伴,是教师和家长指导学生成才的好助手。

目 录

1 因式分解(一)

专题引导

因式分解是把一个多项式化为几个整式的积的形式的一种运算.它是中学代数变形的基础.常用的方法有提取公因式法、运用公式法、分组分解法、十字相乘法、拆项添项法等.在解题时要认真观察所要解多项式的特点,灵活选择方法.此外还要注意分解因式一定要在指定数(如有理数、无理数)的范围内分解到不能再分解为止(若没有指定范围时,一般在有理数范围内分解).

典型例题

例 1 分解因式:a^7-ab^6

思路导航:先提取公因式 a,然后对因式 a^6-b^6 运用公式法分解.

解:原式$=a(a^6-b^6)=a(a^3-b^3)(a^3+b^3)$

$=a(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

例 2 分解因式:a^3+3a^2+3a+2

思路导航:此多项式既不能直接提取公因式,也不能直接用公式,因此考虑用分组分解法,直接分组分解难以进行,因此要进行适当的添项拆项.

解法一:拆常数项,得:

原式$=(a^3+3a^2+3a+1)+1$

$=(a+1)^3+1$

$=(a+2)[(a+1)^2-(a+1)+1]$

$=(a+2)(a^2+a+1)$

解法二:拆二次项、一次项,得:

原式$=(a^3+2a^2)+(a^2+2a)+(a+2)$

$=(a+2)(a^2+a+1)$

解法三:由二次项、一次项的另一种拆法,得:

原式$=(a^3+a^2+a)+(2a^2+2a+2)$

$=a(a^2+a+1)+2(a^2+a+1)$

$=(a+2)(a^2+a+1)$

解法四:添常数项,得:

原式$=(a^3-1)+(3a^2+3a+3)$

$=(a-1)(a^2+a+1)+3(a^2+a+1)$

$=(a+2)(a^2+a+1)$

创新训练

1.（“希望杯”数学邀请赛初二试题）已知实数 a、b 满足条件 $a^2+b^2+a^2b^2=4ab-1$,则(　　).

A. $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$　　B. $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$

C. $\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$

2.（“希望杯”数学邀请赛题）分解因式:$(x^2-1)(x+3)(x+5)+12=$________.

3.（全国初中数学竞赛题）已知 $ab\neq0$,$a^2+ab-2b^2=0$,那么,$\dfrac{2a-b}{2a+b}$的值为________.

因式分解(二)

专题引导

本专题主要学习换元法、配方法、待定系数法等方法在因式分解中的应用.

1. 换元法分解因式

使用换元法分解因式的关键是确定代换的对象. 若选择得当,可使复杂的问题变得简单,看上去无法解答的问题变得易于解答. 本文将介绍换元法在分解因式中的应用及常用的换元技巧.

2. 配方法在因式分解中的应用

在代数式中,利用添项的方法,将原多项式配上适当的部分,使添项的多项式的一部分成为一个完全平方式,这种方法叫做配方法. 应用配方法进行因式分解,常能将多项式配成 A^2-B^2 的形式,使多项式可用平方差公式分解为$(A+B)(A-B)$的形式.

3. 待定系数法分解因式

如果两个多项式恒等,那么它们的次数和同次项的系数都相同,并且任何数值代替其中的字母,这两个多项式的值总相等,反过来也是对的. 这一显见的事实,正是使用待定系数法分解因式的出发点.

因式分解中利用待定系数法的主要步骤是:(1)根据题意,设出含待定系数的恒等式;(2)根据同类项系数对应相等得出待定系数的方程(组);(3)解出待定系数;(4)给出答案.

典型例题

1. **换元法分解因式**

例 1 分解因式：$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

解：原式$=[(x+1)(x+7)][(x+3)(x+5)]+15$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$

设 $x^2+8x+7=y$，则

原式$=y(y+8)+15$

$=y^2+8y+15$

$=(y+3)(y+5)$

$=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$

$=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$

注：此题用的整体代换法．

例 2 分解因式：$(1+x+x^2+x^3)^2-x^3$

解：设 $y=1+x+x^2$，则

原式$=(y+x^3)^2-x^3$

$=y^2+2yx^3+x^6-x^3$

$=y^2+2yx^3+x^3(x^3-1)$

$=y^2+2yx^3+x^3(x-1)(x^2+x+1)$

$=y^2+2yx^3+x^3(x-1)y$

$=y(y+2x^3+x^4-x^3)$

$=y(y+x^3+x^4)$

$=(1+x+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)$

注：此题用的是局部代换法．

例 3 分解因式：$(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)+x^2$

解：原式$=[(x+1)(x+6)][(x+2)(x+3)]+x^2$．

$=(x^2+7x+6)(x^2+5x+6)+x^2$

设 $y=\dfrac{(x^2+7x+6)+(x^2+5x+6)}{2}=x^2+6x+6$

∴原式$=(y+x)(y-x)+x^2$

$=y^2-x^2+x^2$

$=(x^2+6x+6)^2$

注:此题用的是均值代换法．

例 4 分解因式:$(x+y-2xy)(x+y-2)+(1-xy)^2$

解:设 $x+y=m,xy=n$,则

原式$=(m-2n)(m-2)+(1-n)^2$

$=m^2-2m-2mn+4n+1-2n+n^2$

$=m^2-2m(1+n)+(n+1)^2$

$=[m-(n+1)]^2$

$=(x+y-xy-1)^2$

$=[(x-1)(y-1)]^2$

$=(x-1)^2(y-1)^2$

注:此题用的是多元代换法．

例 5 分解因式:$x^4+\sqrt{5}x^3-11x^2-\sqrt{5}x+10$

解:设$\sqrt{5}=y$,有 $10=2y^2$,则

原式$=x^4+yx^3-(2y^2+1)x^2-yx+2y^2$

$=-2(x^2-1)y^2+x(x^2-1)y+x^2(x^2-1)$

$=(x^2-1)(-2y^2+xy+x^2)$

$=(x+1)(x-1)(x-y)(x+2y)$

$=(x+1)(x-1)(x-\sqrt{5})(x+2\sqrt{5})$

注:此题用的是常数代换法．

例 6 分解因式:

$xy(xy+1)+(xy+3)-2(x+y+\frac{1}{2})-(x+y-1)^2$

解:设 $xy=a,x+y=b$,则

原式$=a^2+a+a+3-2b-1-b^2+2b-1$

$=a^2+2a+1-b^2$

$=(a+1)^2-b^2$

$=(a+1+b)(a+1-b)$

$=(xy+1+x+y)(xy+1-x-y)$

$=[x(y+1)+(y+1)][x(y-1)-(y-1)]$

$=(x+1)(x-1)(y+1)(y-1)$

注:此题用的是和积换元法．

例7 分解因式:

$(x^2+3x-4)^2-(3x^2-4x+2)^2+(2x^2-7x+6)^2$

解:设 $x^2+3x-4=a,3x^2-4x+2=b$,则

$2x^2-7x+6=(3x^2-4x+2)-(x^2+3x-4)=b-a$

原式$=a^2-b^2+(b-a)^2$

$=a^2-b^2+b^2-2ab+a^2$

$=2a(a-b)=2(x^2+3x-4)[-(2x^2-7x+6)]$

$=-2(x+4)(x-1)(2x-3)(x-2)$

注:此题用的是和差换元法．

例8 分解因式:$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

解:设 $a+b+c=m$,则:

原式$=(m-c)(m-a)(m-b)+abc$

$=m^3-(a+b+c)m^2+(ab+bc+ac)m-abc+abc$

$=m^3-m^3+(ab+bc+ac)m$

$=(a+b+c)(ab+bc+ac)$

例9 分解因式:$x^4+1987x^2+1986x+1987$

思路导航:有些复杂的数学题,如果用字母来代替具体数字,往往能避繁就简,化难为易,本题中的数字较大,我们不妨试试.

解:设 $a=1987$,则

原式$=x^4+ax^2+(a-1)x+a$

$=(x^4-x)+(ax^2+ax+a)$

$=x(x-1)(x^2+x+1)+a(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+a)$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+1987)$

2. 配方法分解因式

例10 分解因式:$x^2-2(a+b)x-ab(a-2)(b+2)$

思路导航:将多项式中前两项 $x^2-2(a+b)x$ 进行配方,添上$(a$

$+b)^2-(a+b)^2$ 即可分组分解.

解:原式$=x^2-2(a+b)x+(a+b)^2-(a+b)^2-ab(a-2)(b+2)$

$=[x^2-2(a+b)x+(a+b)^2]-[(a+b)^2+ab(a-2)(b+2)]$

$=(x-a-b)^2-[(a+b)^2-4ab+2ab(a-b)+a^2b^2]$

$=(x-a-b)^2-(a-b+ab)^2$

$=(x-2+ab)(x-2a-ab)$

例 11 分解因式:$2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$

思路导航:将多项式中的部分项配方成三项式的完全平方,然后再继续分解.

解:原式$=-a^4-b^4-c^4-2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2+4a^2b^2$

$=4a^2b^2-(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2)$

$=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2$

$=[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]$

$=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$

例 12 分解因式:$x^4+y^4+(x+y)^4$

思路导航:将$(x+y)^4$ 化为$(x^2+2xy+y^2)^2$,再将 x^4+y^4 化为$(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$,创造用完全平方公式分解因式的条件,便可达到将原式分解因式的目的.

解:原式$=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+(x^2+2xy+y^2)^2$

$=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+(x^2+y^2)^2+4xy(x^2+y^2)+4x^2y^2$

$=2(x^2+y^2)^2+4xy(x^2+y^2)+2x^2y^2$

$=2[(x^2+y^2)^2+2xy(x^2+y^2)+x^2y^2]$

$=2(x^2+y^2+xy)^2$

例 13 分解因式:$x^3+y^3+z^3-3xyz$

思路导航:这是一个三元三次多项式,根据题目结构的特点并由配方的联想,将原多项式的某些项配成完全立方,并使得配成完全立方的项与其余的项能用分组分解法分解因式.

解:原式$=x^3+3xy(x+y)+y^3-3xy(x+y)+z^3-3xyz$

$$=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)$$

$$=[(x+y)+z][(x+y)^2-(x+y)z+z^2]-3xy(x+y+z)$$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

评注：由本题可知，对于某些三次多项式，必要时也可以利用添项的方法，使多项式成为一个完全立方式，进而达到解题的目的.

3. 待定系数法分解因式

例 14 m 为何值，$x^2-y^2+mx+5y-6$ 能够分解因式，并分解之.

思路导航：因为 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，所以如果原式可以分解因式，那么它的两个因式一定具有 $x+y+a$ 和 $x-y+b$ 的形式.

解：设 $x^2-y^2+mx+5y-6=(x+y+a)(x-y+b)$

$$=x^2-y^2+(a+b)x+(b-a)y+ab$$

比较对应项的系数，得

$$\begin{cases}a+b=m\\ b-a=5\\ ab=-6\end{cases}\text{解之，得}\begin{cases}m=1\\ a=-2\\ b=3\end{cases}\text{或}\begin{cases}m=-1\\ a=-3\\ b=2\end{cases}$$

∴当 $m=1$ 时，$x^2-y^2+mx+5y-6=(x+y-2)(x-y+3)$；当 $m=-1$ 时，$x^2-y^2+mx+5y-6=(x+y-3)(x-y+2)$.

例 15 分解因式：$x^4+x^3+x^2+2$

解：设原式 $=(x^2+mx+p)(x^2+nx+q)$

即原式 $=x^4+(n+m)x^3+(mn+p+q)x^2+(mq+np)x+pq$

$$\text{比较系数，得}\begin{cases}n+m=1\\ mn+p+q=1\\ mq+np=0\\ pq=2\end{cases}\text{解之，得}\begin{cases}p=1\\ q=2\\ m=-1\\ n=2\end{cases}$$

∴原式 $=(x^2-x+1)(x^2+2x+2)$

创新训练

1. 方程 $2x^2-3xy-2y^2=98$ 的正整数解有（　　）组.

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

2. 已知 $a+b+c=6$，$a^2+b^2+c^2=10$，$a^3+b^3+c^3=36$，那么，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$的值是(　　).

A. $\frac{13}{18}$　　B. $\frac{18}{13}$　　C. $-\frac{13}{18}$　　D. $-\frac{18}{13}$

3.(河南省初中数学竞赛题)已知 a、b、c 是实数，$x=a^2-b$，$y=b^2-c$，$z=c^2-a+1$，则下列说法正确的是(　　).

A. x、y、z 三个数中至少有一个是零

B. x、y、z 三个数中至少有一个是正数

C. x、y、z 三个数中至少有一个是负数

D. x、y、z 三个数中必为两正一负，或者必为两负一正

4.(五城市联赛题)n 为某一自然数，代入代数式 n^3-n 中计算其值时，四个同学算出如下四个结果，其中正确的结果只能是(　　).

A. 388944　　B. 388945

C. 388954　　D. 388948

5.(北京市竞赛题)已知正数 a,b,c 满足 $ab+a+b=bc+b+c=ac+a+c=3$，则$(a+1)(b+1)(c+1)=$________.

因式分解(三)

专题引导

1. **因式分解在计算中的应用**

对于某些有理数的计算，若能借助因式分解，往往可使解题化繁为简，化难为易.

2. **因式分解的其他主要应用**

因式分解是学习解一元二次方程、一元二次不等式等知识的基础.

典型例题

1. **因式分解在计算中的应用**

例1 （“希望杯”全国数学邀请赛初二题）

计算：$1.2345^2+0.7655^2+2.4690\times0.7655$

解：原式$=1.2345^2+2\times1.2345\times0.7655+0.7655^2$

$=(1.2345+0.7655)^2=2^2=4$

例2 （北京市初中数学竞赛试题）

计算：$\dfrac{1995^3-2\times1995^2-1993}{1995^3+1995^2-1995-1}$

解：原式$=\dfrac{1995^2(1995-2)-(1995-2)}{1995^2(1995+1)-(1995+1)}$

$$=\frac{(1995-2)(1995^2-1)}{(1995+1)(1995^2-1)}=\frac{1995-2}{1995+1}=\frac{1993}{1996}$$

2. 因式分解的其他主要应用

(1)求代数式的值

例3 若 n 为正整数,并且 $|a-b+1|+(c+d+2008)^2=0$,求 $2d(a-b)^{2n-1}+(c-d)(a-b)^{2n-1}$ 的值.

解:由非负数的性质知 $a-b=-1,c+d=-2008$.

又∵n 为正整数,∴$2n-1$ 为奇数.∴$2d(a-b)^{2n-1}+(c-d)(a-b)^{2n-1}=(a-b)^{2n-1}(2d+c-d)=(a-b)^{2n-1}(c+d)=(-1)^{2n-1}\times(-2008)=2008$

(2)化简代数式

例4 若 $a^2+4ab+4b^2-1=0$,化简 $a^3+2a^2b+a^2$.

解:由已知得 $(a+2b)^2=1$,∴$a+2b=\pm1$.

∴当 $a+2b=1$ 时,$a^3+2a^2b+a^2=a^2(a+2b+1)=2a^2$;

当 $a+2b=-1$ 时,$a^3+2a^2b+a^2=a^2(a+2b+1)=0$.

(3)证明代数等式

例5 求证:$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$

证明:左边 $=(a^2+b^2+2ab)+(2ac+2bc)+c^2$

$=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2=(a+b+c)^2=$ 右边

(4)比较大小

例6 若 $a<b,x<y$,比较 $ax+by,bx+ay$ 的大小.

解:$(ax+by)-(bx+ay)$

$=ax+by-bx-ay=(ax-bx)-(ay-by)$

$=x(a-b)-y(a-b)=(a-b)(x-y)$

∵$a<b$,$x<y$,∴$a-b<0,x-y<0$.

∴$(a-b)(x-y)>0$,即 $(ax+by)-(bx+ay)>0$,

∴$ax+by>bx+ay$

(5)证明整除问题

例7 若 x,y 都为整数,并且 $5x-y$ 能被 3 整除.

求证:$10x^2+23xy-5y^2$ 能被 9 整除.