普通高等学校“十三五”应用型规划教材
PUTONG GAODENG XUEXIAO SHISANWU YINGYONGXING GUIHUA JIAOCAI

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

主编 ○ 李文宇

交大e出版

西南交通大学出版社

普通高等学校“十三五”应用型规划教材

概率论与数理统计

主　编： 李文宇

副主编： 吴　琦　姜　萍　毕　坤　杨　磊

参编人员： 赵卫国　冷金霞　广洪凤　李成荣
费红敏　朱秀英　金焕良　冯建华
李丽杰　刘吉柱　姚东华　李洪波
李忠波　安红波　崔艳红　姜　威
魏明珠　刘艳梅　董立鲲　赵延山

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 李文宇主编. —成都：西南交通大学出版社，2016.8
普通高等学校“十三五”应用型规划教材
ISBN 978-7-5643-4942-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 199809 号

普通高等学校“十三五”应用型规划教材

概率论与数理统计

主编　李文宇

责任编辑	王　旻
特邀编辑	王玉珂
封面设计	何东琳设计工作室
出版发行	西南交通大学出版社（四川省成都市二环路北一段 111 号 西南交通大学创新大厦 21 楼）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网址	http://www.xnjdcbs.com
印刷	成都勤德印务有限公司
成品尺寸	185 mm × 260 mm
印张	14.5
字数	361 千
版次	2016 年 8 月第 1 版
印次	2016 年 8 月第 1 次
书号	ISBN 978-7-5643-4942-4
定价	39.50 元

课件咨询电话：028-87600533

前 言

培养基础扎实、勇于创新的人才，历来是大学教育的一个重要目标。随着知识经济时代的到来，这一目标显得更加突出。在工科大学教育中，数学课是基础理论课，且在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力诸方面起着特殊重要的作用。概率论与数理统计是重要的数学基础课程之一，是学习现代科学技术的重要理论基础，是一门应用性非常强的学科，从概率论的发展初期到现在，这一特点越来越突出。概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的数学分支。目前，概率论与数理统计的理论与方法几乎涉及所有工程技术领域，并且广泛应用于医药行业、农林行业、经济和社会保障等部门。

本书的编写融入了作者多年教学实践中的一些经验体会，目的是使学生通过本书的学习，能够掌握处理随机问题的基本理论和方法，培养他们分析问题和解决问题的能力。

本教材的编写力求具有以下特色：

(1) 在选材和叙述上努力做到联系工科各专业的实际，注重阐述应用理论解决实际问题的方法。

(2) 重视对学生能力的培养，注意提高学生基本素质。在介绍基本理论和概念时，力求叙述简洁、浅显易懂，便于教师教学和学生自学。

(3) 例题和习题丰富，每节后增加了思考题，每章增加了单元测试题。书后还附了习题答案。

(4) 增加了课外阅读材料，提高了该书的可读性和趣味性，为学生展望新知识留下窗口，以开阔学生的视野，为进一步拓宽数学知识指出方向。

本书共分两个部分：第一章～第五章为概率论部分，主要介绍概率论的基本概念、随机事件的概率、随机变量及其分布、数字特征、大数定律、中心极限定理等内容。第六章～第十章为数理统计部分，主要介绍抽样分布以及参数估计、假设检验、回归分析和方差分析的基本理论与方法。

使用本教材时建议概率论部分安排 30 学时左右，统计部分安排 20 学时左右。其中带“＊”号部分为选学内容。可根据教学大纲和具体的授课学时适当调整。

本书第二章、第七章、第十章由黑龙江科技大学李文宇编写，第四章、第五章、第六章、第八章由黑龙江工商学院吴琦编写，第一章、第九章由黑龙江科技大学姜萍编写，第三章由哈尔滨师范大学教育科学学院毕坤编写。全书由李文宇担任主编，由吴琦、姜萍、毕坤、杨磊担任副主编。在本书编写过程中，杨磊组织了编者间协调和校对工作，赵卫国、冷金霞、广洪凤、李成荣、费红敏、朱秀英、金焕良、冯建华、李丽杰、刘吉柱、姚东华、李洪波、李忠波、安红波、崔艳红、姜威、魏明珠、刘艳梅、董立鲲、赵延山在编写中做了大量协助工作，在此谨向他们致以由衷的谢意。

由于编者水平有限，教材中缺点和疏漏在所难免，恳请读者批评指正。

编 者

2016 年 6 月

目 录

第一章　随机事件与概率

第一节　随机事件与样本空间

一、必然现象与随机现象

人们在实践活动中所遇到的现象，一般来说可分为两类：一类是**必然现象**，或称为**确定性现象**；另一类是**随机现象**，或称为**不确定性现象**.

必然现象是指在相同条件下重复试验，所得结果总是确定的现象．只要试验条件不变，试验结果在试验之前是可以预言的．如：在标准大气压下，将水加热到 100 ℃，水必然沸腾；用手向空中抛出的石子，必然下落；作等速直线运动的物体，如无外力作用，必然继续作等速直线运动，等等，这些现象都是必然现象.

随机现象是指在相同条件下重复试验，所得结果不一定相同的现象，即试验结果是不确定的现象．对这种现象来说，在每次试验之前哪一种结果发生，是无法预言的．如：新生婴儿，可能是男孩，也可能是女孩；向一目标进行射击，可能命中目标，也可能没有命中目标；从一批产品中，随机抽检一件产品，结果可能是合格品，也可能是次品；测量某个物理量，由于许多偶然因素的影响，各次测量结果不一定相同，等等，这些现象都是随机现象.

对随机现象，是否有规律可循呢？人们经过长期的反复实践，发现这类现象虽然就每次试验结果来说，具有不确定性，但大量重复试验，所得结果却呈现出某种规律性．如：掷一枚质量均匀的硬币，当投掷次数很大时，就会发现正面和反面出现的次数几乎各占$\frac{1}{2}$．历史上，蒲丰（Buffon）投掷过 4 040 次，得到 2 048 次正面；皮尔逊（K.Pearson）投掷过 24 000 次，得到 12 012 次正面.

对一个目标进行射击，当射击次数不多时，弹孔分布看不出有什么规律性；但当射击次数非常多时，就可发现弹孔的分布呈现一定的规律性：弹孔关于目标的分布略呈对称性，且越靠近目标的弹孔越密，越远离目标的弹孔越稀.

从分子物理学观点来看，气体分子对器壁的压力是气体分子对器壁碰撞的结果．由于分子是时刻不停地、杂乱无章地运动着，速度和轨道都是随机的，因而对器壁的碰撞也是随机的．初看起来器壁所受的压力是不稳定的，可是实验证明，由于分子数目非常大，各分子运动所具有的随机性在集体中互相抵消、互相平衡，使得器壁所受的总压力呈现一种稳定性．分子数目越大，压力越稳定.

从上述各例可以看到，随机现象也包含着规律性，它可在相同条件下的大量重复试验或观察中呈现出来．这种规律性称为**随机现象的统计规律性**.

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律的一门数学学科.

二、随机事件与样本空间

对随机现象的研究，总是要进行观察、测量或做各种试验．例如，掷一硬币，观察哪面朝上；向一目标进行射击，观察是否命中；从一批产品中随机抽一产品，检查它是否合格等等．仔细分析这些试验，可以发现这些试验具有如下的共同特点：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验的所有可能结果不止一个，而且是事先已知的；

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但究竟出现哪一个结果，试验前不能确切预言．

如投掷硬币，试验是可以在相同条件下重复进行的，试验的可能结果有两个，即正面和反面；每次试验必出现其中之一，但投掷之前是不可能预言正面出现还是反面出现．

人们将满足上述三个条件的试验，称为**随机试验**，简称**试验**，以字母 E 表示．试验的每一个可能结果称为**样本点**，也称为**基本事件**，用 ω 表示．样本点的全体（或基本事件的全体构成的集合）称为**样本空间**，记为 Ω ．

在讨论一个随机试验时，首先要明确它的样本空间．对一个具体的试验来说，其样本空间可以由试验的具体内容确定，先看下面几个例子．

例 1 掷一枚均匀对称的硬币，观察正反面出现的情况．这是个随机试验，可能结果有两个：正（正面朝上），反（反面朝上）．故样本空间 $\Omega=\{正,反\}$ ．

例 2 将上述硬币掷两次，观察正反面出现的情况．这也是一个随机试验，可能结果有四个：（正正），（正反），（反正），（反反）．括号中的字分别代表两次投掷的结果，故样本空间 $\Omega=\{(正正),(正反),(反正),(反反)\}$ ．

例 3 记录某电话交换台在一段时间内接到的呼叫次数．这个试验的样本点（记录结果）是一非负整数，由于难以规定一个呼叫次数的上界，所以样本空间为 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$ ．

例 4 从一批灯泡中抽取一只灯泡，测试它的使用寿命．设 t 表示寿命，则样本空间 $\Omega=\{t:t\geqslant 0\}$ ．

例 5 观察某地区一昼夜最低温度 x 和最高温度 y ．设这个地区的温度不会小于 T_0 也不会大于 T_1 ，则样本空间 $\Omega=\{(x,y):T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}$ ．

随机现象的某些样本点组成的集合称为**随机事件**，简称**事件**，常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示．有了样本空间的概念便可以用集合的语言来定义事件．下面先从一个例子来分析．

例 6 在例 2 中，若设事件 $A=$ “第一次出现正面”．在一次试验中，A 发生当且仅当在这次试验中出现样本点 (正正),(正反) 中的一个．这样可以认为 A 是由 (正正),(正反) 组成的，而将 A 定义为它们组成的集合 $A=\{(正正),(正反)\}$ ．又如事件 $B=$ “两次出现同一面”，B 发生当且仅当现样本点 (正正),(反反) 中的一个出现，而将 B 定义为集合 $B=\{(正正),(反反)\}$ ．类似地，事件 $C=$ “至少有一次出现正面”，可定义为集合 $C=\{(正正),(正反),(反正)\}$ ．

一般地，人们将事件定义为样本点（基本事件）的某个集合，即样本空间的某个子集．称事件 A 发生，当且仅当 A 中某一样本点出现．

样本空间 Ω 和空集 $\varnothing$ 作为 Ω 的子集也看作事件．由于 Ω 包含所有的样本点，故在每次试验中，必有一个样本点 $\omega\in\Omega$ 发生，即在试验中，事件 Ω 必然发生，因此 Ω 是**必然事件**．又因在 $\varnothing$ 中不包含任何一个样本点，故在任一次试验中，$\varnothing$ 永远不会发生，因此 $\varnothing$ 是**不可能事**

件. 常用 Ω , $\varnothing$ 分别表示必然事件与不可能事件.

必然事件与不可能事件可以说不是随机事件，但为了今后研究的方便，还是把它们作为随机事件的两个极端情形来处理.

再看几个事件的例子.

例 7　在例 3 中，如果设 $A=$ “呼叫次数不超过三次”，$B=$ “呼叫次数大于五次”，则 $A=\{0,1,2,3\}, B=\{6,7,8,\cdots\}$.

例 8　在例 4 中，设 $A=$ “寿命小于五小时”，则 $A=\{t:0\leqslant t<5\}$.

习题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 记录一个小班一次数学考试的平均分数（设以百分制记分）.

(2) 生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数.

(3) 对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记“正品”，不合格的记“次品”. 如连续查出 2 个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查的结果.

(4) 在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.

2. 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 抛三枚硬币;

(2) 抛三颗骰子;

(3) 连续抛一枚硬币，直至出现正面为止;

(4) 在某十字路口，一小时内通过的机动车辆数;

(5) 某城市一天内的用电量.

3. 写出下列随机试验的样本空间及表示下列事件的样本点集合.

(1) 10 件产品中有 1 件是不合格品，从中任取 2 件得 1 件不合格品.

(2) 一个口袋中有 2 个白球、3 个黑球、4 个红球，从中任取一球，①得白球，②得红球.

第二节　事件关系与运算

在实际问题中，往往要在同一个试验中同时研究几个事件以及它们之间的联系. 详细分析事件之间的关系，不仅帮助人们更深入地认识事件的本质，而且可大大简化一些复杂的事件.

为直观起见，概率论中常用平面上的一个矩形域表示样本空间 Ω ，矩形内的每一点表示样本点，并用一个圆或其他几何图形表示事件 A ，如图 1.1 所示，这类图形称为**维恩(Venn)图**.

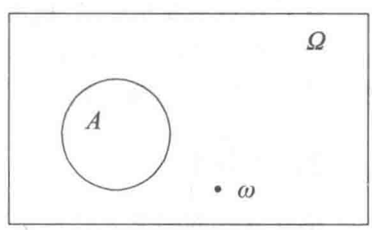

图 1.1　事件 A 的维恩 (Venn) 图

一、事件间的关系

下面的讨论总是假设在同一样本空间 Ω（即同一个随机现象）中进行. 事件间的关系与集合间的关系一样主要有以下几种:

1. 包含关系

若事件 A 中的每一个样本点都属于事件 B，则称事件 B **包含**事件 A，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

显然，这时事件 A 发生必然导致事件 B 发生，故 B 包含 A 也常定义为:“若 A 发生必然导致 B 发生，则称 B 包含 A”.

例如，在上节例 6 中，由于 $A=\{(正正),(正反)\}$，$C=\{(正正),(正反),(反正)\}$，故有 $A \subset C$.

对任意事件 A，有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

2. 相等关系

如果事件 A 与事件 B 满足：属于 A 的样本点必属于 B，而且属于 B 的样本点必属于 A，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B **相等**，记为 $A=B$.

例 9　掷两颗骰子，以 A 记事件“两颗骰子的点数之和为奇数”，以 B 记事件“两颗骰子的点数为一奇一偶”. 很容易证明：A 发生必然导致 B 发生，而且 B 发生必然导致 A 发生，所以 $A=B$.

3. 互不相容

如果 A 与 B 没有相同的样本点，则称 A 与 B **互不相容**. 用概率论的语言说：A 与 B 互不相容就是事件 A 与事件 B 不可能同时发生.

如在电视机寿命试验中，“寿命小于 1 万小时”与“寿命大于 5 万小时”是两个互不相容的事件，因为它们不可能同时发生.

二、事件运算

事件的运算与集合的运算相当，有并、交、差和余四种运算.

1. 事件的并

事件 A 与 B 的**并**，记为 $A \cup B$. 其含义为“由事件 A 与 B 中所有的样本点（相同的只计入一次）组成的新事件”. 或用概率论的语言说，“事件 A 与 B 中至少有一个发生”.

如在掷一颗骰子的试验中，记事件 $A=$“出现奇数点”$=\{1,3,5\}$，记事件 $B=$“出现的点数不超过 3”$=\{1,2,3\}$，则 A 与 B 的并为 $A \cup B=\{1,2,3,5\}$.

2. 事件的交

事件 A 与 B 的**交**，记为 $A \cap B$，或简记为 AB. 其含义为“由事件 A 与 B 中相同的样本点组成的新事件”，或用概率论的语言说：“事件 A 与 B 同时发生”.

如在掷一颗骰子的试验中，记事件 $A=$ “出现奇数点” $=\{1,3,5\}$，记事件 $B=$ “出现的点数不超过 3” $=\{1,2,3\}$，则 A 与 B 的交为 $AB=\{1,3\}$.

若事件 A 与 B 互不相容，则其交必为不可能事件，即 $AB=\varnothing$，反之亦然. 这表明：$AB=\varnothing$ 就意味着 A 与 B 是互不相容事件.

事件的并与交运算可推广到有限个或可列个事件. 譬如有事件 $A_1,A_2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 称为有限并，$\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 称为可列并；$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 称为有限交，$\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 称为可列交.

3. 事件的差

事件 A 对 B 的**差**，记为 $A-B$. 其含义为“由在事件 A 中而不在事件 B 中的样本点组成的新事件”，或用概率论的语言说：“事件 A 发生而事件 B 不发生”.

如在掷一颗骰子的试验中，记事件 $A=$ “出现奇数点” $=\{1,3,5\}$，记事件 $B=$ “出现的点数不超过 3” $=\{1,2,3\}$，则 A 对 B 的差为 $A-B=\{5\}$.

4. 对立事件

事件 A 的**对立事件**，记为 $\overline{A}$. 其含义为“由在 Ω 中而不在 A 中的样本点组成的新事件”，或用概率论的语言说：“A 不发生”，即 $\overline{A}=\Omega-A$.

注意：对立事件是相互的，即 A 的对立事件是 $\overline{A}$，而 $\overline{A}$ 的对立事件是 A，即 $\overline{\overline{A}}=A$. 必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 互为对立事件，即 $\overline{\Omega}=\varnothing,\ \overline{\varnothing}=\Omega$.

如在掷一颗骰子的试验中，记事件 $A=$ “出现奇数点” $=\{1,3,5\}$ 的对立事件是 $\overline{A}=\{2,4,6\}$，事件 $B=$ “出现的点数不超过 3” $=\{1,2,3\}$ 的对立事件是 $\overline{B}=\{4,5,6\}$.

A 与 B 互为对立事件的充要条件是：$A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$.

此性质也可作为对立事件的另一种定义，即如果事件 A 与 B 满足：$A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$，则称 A 与 B 互为对立事件，记为 $\overline{A}=B,\ \overline{B}=A$.

例 10　设 A,B,C 是某个随机现象的三个事件，则

(1) 事件“A 与 B 发生，C 不发生”可表示为：$AB\overline{C}$；

(2) 事件“A,B,C 中至少有一个发生”可表示为：$A\cup B\cup C$；

(3) 事件“A,B,C 中至少有两个发生”可表示为：$AB\cup AC\cup BC$；

(4) 事件“A,B,C 中恰好有两个发生”可表示为：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup \overline{A}BC$；

(5) 事件“A,B,C 中同时发生”可表示为：ABC；

(6) 事件“A,B,C 都不发生”可表示为：$\overline{ABC}$；

(7) 事件“A,B,C 不全发生”可表示为：$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

三、事件的运算性质

1. 交换律

$$A\cup B=B\cup A,\quad AB=BA \tag{1-1}$$

2．结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \tag{1-2}$$

$$(AB)C=A(BC) \tag{1-3}$$

3．分配律

$$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC \tag{1-4}$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C) \tag{1-5}$$

4．对偶律（德·摩根公式）

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \tag{1-6}$$

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B} \tag{1-7}$$

对偶原理在事件的运算中经常用到，它可以推广到更多个事件的情况，即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i} \tag{1-8}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i} \tag{1-9}$$

用语言表述为："事件并的对立事件等于对立事件的交，事件交的对立事件等于对立事件的并."

例 11 在检查某种圆柱形零件时，要求它的长度和直径都必须合格. 设 A,B,C 分别表示事件"直径合格"、"长度合格"、"产品合格"，则

（1）$C\subset A,C\subset B$；

（2）$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 分别表示"直径不合格"、"长度不合格"、"产品不合格"；

（3）$C=A\cap B$；

（4）$\overline{C}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

（5）$C=A-\overline{B}$.

习题 1.2

1．在抛三枚硬币的试验中写出下列事件的集合表示：

$A=$"至少出现一个正面"； $B=$"最多出现一个正面"；

$C=$"恰好出现一个正面"； $D=$"出现三面相同".

2．在数学系的学生中任选一名学生，令事件 A 表示被选学生是男生，事件 B 表示被选学生是三年级学生，事件 C 表示该生是运动员.

（1）叙述 $AB\overline{C}$ 的意义. （2）在什么条件下 $ABC=C$ 成立？

（3）什么时候关系式 $C\subset B$ 是正确的？ （4）什么时候 $\overline{A}=B$ 成立？

3．一个工人生产了 n 个零件，以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是合格品（$1\leqslant i\leqslant n$）．用 A_i 表示下列事件：

（1）没有一个零件是不合格品；　（2）至少有一个零件是不合格品；

（3）仅仅只有一个零件是不合格品；　（4）至少有两个零件是不合格品．

4．证明下列各式：

（1）$A\cup B=B\cup A$；　（2）$A\cap B=B\cap A$；

（3）$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；　（4）$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

（5）$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$；　（6）$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$．

5．试问下列命题是否成立？

（1）$A-(B-C)=(A-B)\cup C$；　（2）若 $AB=\varnothing$ 且 $C\subset A$，则 $BC=\varnothing$；

（3）$(A\cup B)-B=A$；　（4）$(A-B)\cup B=A$．

6．试用维恩图说明，当事件 A 与 B 互不相容时，能否得出结论：$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容．

第三节　频率与概率

对一个事件（除必然事件和不可能事件外）来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生．而我们希望知道的是某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大．例如，为了确定水坝的高度，就要知道“河流在造水坝地段每年的最大洪水达到某一高度”这一事件发生的可能性大小，而且也希望找到一个合适的数来表征事件在一次试验中发生的可能性大小．为此，首先引入频率，因为它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率．

一、频　率

定义 1.1　在相同条件下，进行 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数．比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**，记为 $f_n(A)$．

由定义易见，频率具有下述基本性质：

（1）$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$．

（2）$f_n(\Omega)=1$．

（3）若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，因此其大小就表示事件 A 发生的频繁程度．频率越大，事件 A 就越频繁发生．这意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性就大，反之亦然．因而，直观的想法是用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性大小．但是

否可行，先看下面的例子．

例 12 考虑“抛硬币”这个试验．将一枚硬币抛 5 次、50 次、500 次，各做 10 遍，得到的数据如表 1.1 所示（其中记事件 $H =$“正面朝上”，n_H 表示事件 H 发生的频数，$f_n(H)$ 表示事件 H 发生的频率）．

表 1.1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

这种试验历史上有人做过，得到表 1.2 所示的数据．

表 1.2

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.507 0
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从上述数据可以看出：抛硬币次数 n 较小时，频率 $f_n(H)$ 在 0 与 1 之间随机波动，其幅度较大．但随着 n 的增大，频率 $f_n(H)$ 呈现出稳定性．即当 n 逐渐增大时，$f_n(H)$ 总是在 0.5 附近摆动，而逐渐稳定于 0.5．

大量实验证实，当重复试验的次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，并逐渐稳定于某个常数．这种“频率稳定性”，即通常所说的统计规律性．也就是说，大量重复试验，计算频率 $f_n(A)$，并用它来表征事件 A 发生可能性的大小是合适的．但是，在实际中，我们不可能对每一个事件都做大量的试验，然后求得事件的频率，以表征事件发生可能性的大小．同时，为了理论研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质得到了启发，并给出如下表征事件发生可能性大小的概率的定义．

二、概 率

定义 1.2 设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间. 对于 E 的每一个事件 A 赋于一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的**概率**，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

（1）非负性：对于每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$.

（2）规范性：对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$.

（3）可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j, A_iA_j=\varnothing(i,j=1,2,\cdots)$，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots \tag{1-10}$$

在第六章中将证明，当 $n\to\infty$ 时频率 $f_n(A)$ 在一定意义下将接近于概率 $P(A)$. 基于这一事实，我们有理由用概率 $P(A)$ 来表征事件 A 在一次试验中发生的可能性大小.

由概率定义，可以推出概率的一些性质.

性质 1 不可能事件的概率为 0，即 $P(\varnothing)=0$.

证明 令 $A_n=\varnothing(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$ 且 $A_iA_j=\varnothing\quad(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$. 由概率的可列可加性（1-10）得

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing)$$

由概率的非负性知 $P(\varnothing)\geqslant 0$，故由上式知 $P(\varnothing)=0$.

性质 2（有限可加性） 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1-11}$$

证明 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，即有 $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$，则由（1-10）式得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+0\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)\end{aligned}$$

性质 3 若 $A\supset B$, 则

$$P(A-B)=P(A)-P(B) \tag{1-12}$$

$$P(A)\geqslant P(B) \tag{1-13}$$

证明 因为当 $A\supset B$ 时，有

$$A=B\cup(A-B)\quad 且\quad B\cap(A-B)=\varnothing$$

再由概率的有限可加性得

$$P(A)=P(B)+P(A-B)$$

移项即得证（1-12）式.

又由概率的非负性 $P(A-B)\geqslant 0$ 知：$P(A)\geqslant P(B)$.

性质 4 对于任一事件 A，$P(A)\leqslant 1$.

证明 因 $A\subset \Omega$，由性质 3 得：$P(A)\leqslant P(\Omega)=1$.

性质 5（逆事件的概率） 对于任一事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

证明 因为 $A\cup\overline{A}=\Omega,\ A\overline{A}=\varnothing$，故

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$$

性质 6（加法公式） 对任意两个事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1-14}$$

证明 因为 $A\cup B=A\cup(B-AB),\ A\cap(B-AB)=\varnothing$，故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)$$

又因为 $AB\subset B$，从而由性质 3 即得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

系 $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$.

可应用归纳法将加法公式推广到任意有限个事件.

性质 7 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)$$

这个式子称为概率的**一般加法公式**.

例 13 设 A,B 互不相容，且 $P(A)=p,P(B)=q$，试求 $P(A\cup B)$，$P(\overline{A}\cup B)$，$P(AB)$，$P(\overline{A}B)$.

解 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=p+q$.

$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})=1-p$.

$P(AB)=0$.

$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB)=q$.

例 14 设 A,B,C 为三个事件，且 $AB\subset C$，证明 $P(A)+P(B)-P(C)\leqslant 1$.

证明 因为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

又 $AB\subset C$，所以

$$P(AB)\leqslant P(C)$$

故

$$P(A)+P(B)-P(C)\leqslant P(A\cup B)\leqslant 1$$

即

$$P(A)+P(B)-P(C)\leqslant 1$$