高等学校教材

大学物理简明教程（上册）

主编　李国臣　李淑青

高等教育出版社

高　等　学　校　教　材

大学物理简明教程（上册）

Daxue Wuli Jianming Jiaocheng

主　编　李国臣　李淑青
副主编　冯中营　王爱国

高等教育出版社·北京

内容提要

本书根据《理工科类大学物理课程教学基本要求》（2010 年版）编写而成，内容简明，重点突出，分为上、下两册，共 14 章。上册包括力学、振动与波动、热力学基础，下册包括电磁学、光学、量子物理简介。

本书为应用型工科院校而编写，全书突出应用并与生活及生产实践紧密结合。在每章的习题中提供了物理知识应用题，旨在学以致用，知行合一。

本书适合 112 课时的教学，也可用于少课时教学，可作为工科类本科院校非物理类专业的教材。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理简明教程.上册 / 李国臣，李淑青主编.--北京：高等教育出版社，2016.4

ISBN 978-7-04-044366-0

Ⅰ.①大… Ⅱ.①李… ②李… Ⅲ.①物理学-高等学校-教材 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 286907 号

策划编辑	张海雁	责任编辑	张海雁	封面设计	赵 阳	版式设计	马 云
插图绘制	杜晓丹	责任校对	刘丽娴	责任印制	刘思涵		

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	山东省高唐印刷有限责任公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	12	版 次	2016 年 4 月第 1 版
字 数	280 千字	印 次	2016 年 4 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	22.60 元

物 料 号 44366-00

前 言

本书是为了适应应用型本科院校而编写的，包括力学、热学、电磁学、光学和近代物理五个部分，共14章，分为上、下两册。

本书的内容紧紧围绕《理工科类大学物理课程教学基本要求》(2010年版)，在现有高中物理的基础上进行阐述，并以工程技术，特别是新技术中广泛应用的基本物理原理为依据，尽量做到科学性和思想性相统一，理论联系实际，秉承知识的应用性、启发性和趣味性相结合的原则。本书具有以下几个特点：第一，书中内容和高中物理知识紧密衔接，针对高中内容中动量属于《新课标选修3—5》、光学属于《新课标选修2—3》，造成目前多数大学物理教材知识与高中内容严重脱节的现象，我们对高中选修的动量和光学部分内容进行了整改，使其与本书紧密结合，让学生在现有的基础上就能学会学懂；第二，侧重知识的应用，无论在各章节的内容中还是在习题中，都引用了大量的实例和图片，使学生更有兴趣学习物理，学以致用；第三，难度适中，鉴于目前师生普遍反映物理公式多、内容难、课时少的现象，我们对知识进行了整合，从而使本书篇幅不大、深入浅出、易教易学，为学生和教师减轻了负担。

本书由李国臣和李淑青担任主编，他们主要负责统稿、编写重点章节和各章习题及审核工作。本书的上册由冯中营和王爱国任副主编，下册由景银兰和任全年任副主编，参加执笔的人有何景婷(第一章)，赵婷婷(第二章)，李淑青(第二章的1、2节，第三、第六、第九、第十二章及习题)，郑素华(第四章)，冯中营(第五章和习题)，王爱国和王晓伟(第七章)，杨文锦(第八章)，刘晓菲(第十章)，任全年(第十一章)，景银兰和刘阳(第十三章)，韦仙(第十四章)。此外，段晓丽、乔士柱、柴立臣、王卫星、王建军、高玉洁也为此书的编写做了相应的工作。编者在此表示诚挚的谢意。

此书还有不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

2015年7月

目 录

第1章　质点运动学

运动学研究如何描述物体的运动,动力学研究物体运动状态变化的原因．质点运动学侧重用几何学的观点研究质点机械运动状态随时间变化的关系．本章主要内容为:位置矢量、位移、速度和加速度等基本概念及质点的曲线运动和相对运动等．

1.1　质点运动的描述

一、参考系　坐标系　质点

自然界中所有物体都在不停地运动,绝对静止不动的物体是不存在的.运动是物质存在的形式,是物质固有的属性,运动和物质是不可分割的,这就是运动的绝对性.为了描述一个物体的运动,必须选择另一个物体作为参考,被选作参考的物体称为**参考系**.在运动学中参考系的选择可以是任意的.在实际问题中,参考系的选择既要考虑问题的性质和需要,又要力求使对运动的描述变得简单.常用的参考系有:太阳参考系(太阳-恒星参考系)、地心参考系(地球-恒星参考系)、地面参考系、质心参考系.例如:确定交通车辆的位置时,可选择固定于地面上的房子或路牌作参考系,这样的参考系叫地面参考系.在不同参考系中,对同一物体的运动具有不同的描述,叫做运动描述的相对性.当我们研究一个物体的运动时,必须选择一个恰当的参考系,只有选定了参考系,运动描述才有意义.

参考系选定以后,为了定量地描述一个物体相对于此参考系的位置,需在此参考系上建立固定的坐标系.最常用的坐标系是笛卡儿直角坐标系.

任何物体都有一定的大小、形状和内部结构.通常情况下,物体运动时,内部各点运动情况不同,为使问题简化,可以采用抽象的办法.如果物体的大小和形状在所研究的问题中不起作用,或者所起的作用可以忽略不计,我们可以近似地把此物体看作一个没有大小和形状而只有质量的点,称为**质点**.一个物体能否当做质点,并不取决于它的实际大小,而是取决于所研究问题的性质.

例如:地球绕太阳公转,地球可当做质点,地球自转,地球不可当做质点.

二、位置矢量　位移

1. 位置矢量

空间任一点 P 的位置,在直角坐标系中可以用一组坐标(x,y,z)来表示,也可以用从坐标原点向 P 点引一有方向的线段 $\boldsymbol{r}$ 来表示,如图 1-1-1 所示.$\boldsymbol{r}$ 称为位置矢量,简称位矢,也叫径矢.

径矢的端点就是质点的位置,矢量在坐标轴上的投影分别为 x,y,z,位置矢量可表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

式中,$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为沿 x、y、z 轴的单位矢量.位置矢量的大小为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

位置矢量的方向余弦为

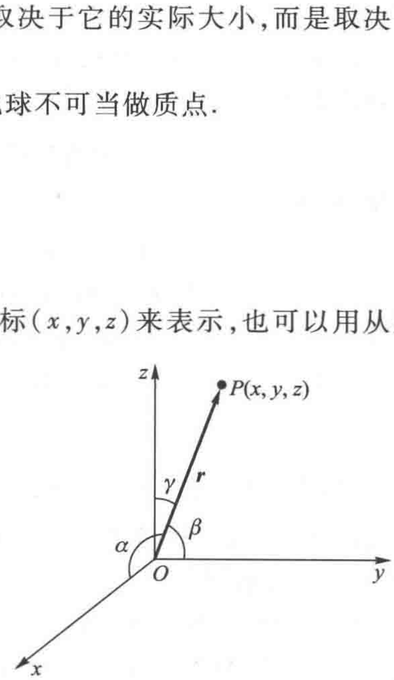

图 1-1-1　质点的位置表示

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z}{r}$$

式中,α、β 和 γ 分别是 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴、y 轴和 z 轴之间的夹角.

质点运动时,质点的空间位置随时间的变化关系可用径矢或坐标表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.1.1}$$

或

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t) \tag{1.1.2}$$

式(1.1.1)、式(1.1.2)称为质点的运动方程,前式为矢量形式,后式为标量形式.

当质点在 Oxy 平面内运动时,式(1.1.2)可简化为

$$x=x(t),\quad y=y(t)$$

知道了运动方程,质点的整个运动情况也就清楚了,所以运动学的主要任务之一就是根据各种问题的具体条件,求解质点的运动方程.

运动质点在空间所经过的径迹称为轨迹.轨迹为直线的运动称为直线运动,轨迹为曲线的运动称为曲线运动.从式(1.1.2)中消去 t 后可得轨迹方程,而式(1.1.2)是轨迹的参数方程.例如,一运动质点的运动方程为

$$\boldsymbol{r}=a\cos\omega t\boldsymbol{i}+a\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

由 $x=a\cos\omega t$,$y=a\sin\omega t$ 消去 t 便得其轨迹方程为

$$x^2+y^2=a^2$$

位置矢量具有大小、方向,服从矢量加法.位置矢量具有瞬时性,质点在运动过程中,不同时刻的位置矢量不同.位置矢量描述质点的运动状态,前面已经讲过,它具有相对性.运动质点的某一空间位置,用不同的坐标系来描写,表达式是不一样的.

式(1.1.1)表明:质点的实际运动是各分运动的矢量合成,这个由空间的几何性质所决定的各分运动和实际运动的关系叫做运动叠加(或合成)原理.

2. 位移

设曲线 AB 是质点轨迹的一部分,如图 1-1-2 所示.t 时刻质点在 A 点处;$t+\Delta t$ 时刻,质点到达 B 点处.A、B 两点的径矢为 $\boldsymbol{r}_A$ 和 $\boldsymbol{r}_B$;在 Δt 内,质点位置变化可以由 A 到 B 的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示,称为质点的**位移**.显然

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A=\Delta\boldsymbol{r} \tag{1.1.3}$$

$\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A$ 表示径矢 $\boldsymbol{r}$ 在 Δt 时间内的增量,所以用 $\Delta\boldsymbol{r}$ 表示.$\Delta\boldsymbol{r}$ 即质点在 $t\sim t+\Delta t$ 这一段时间内的位移.

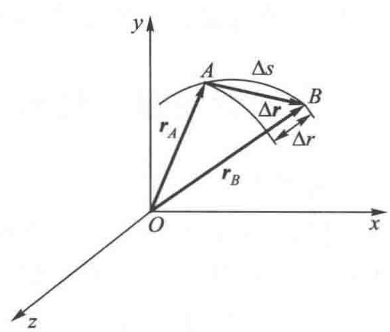

图 1-1-2 位移矢量

应该注意:(1) 位移表示质点位置的改变,并非质点所经历的路程.如图 1-1-2 所示,$\Delta\boldsymbol{r}$ 为矢量,它的量值 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 即割线 AB 的长度,而路程 Δs 是标量,即曲线 $\widehat{AB}$ 的长度.只有在时间 Δt 趋近于零时 Δs 和 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 可视为相等.即使在直线运动中,位移和路程也是两个截然不同的概念.

(2) $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 不等于 Δr.$\Delta r=r(t+\Delta t)-r(t)$,它反映 Δt 时间内质点相对于原点的径向长度变化.一般地说 $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r$,如图 1-1-2 所示.

(3) 位置矢量和位移在量值上都表示长度,在国际单位制(SI)中,长度的单位为米(m).

三、速度 加速度

1. 速度

为了描述质点运动的快慢程度和方向,引入速度的概念.如图 1-1-3 所示,设质点沿曲线运动,在 Δt 时间内质点位移为 $\Delta \boldsymbol{r}$,则位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 与时间 Δt 的比值叫做该时间间隔内质点的平均速度,即

$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.1.4}$$

一般来说,平均速度的大小和方向与所取的时间间隔以及对应时间间隔的位移有关.对于不同的时间间隔,所对应的平均速度一般不相同,平均速度只能粗略地反映在某一段时间内质点运动的快慢和方向.

为了精确地描述质点运动的快慢程度和方向,必须研究每一时刻的运动情况,即**瞬时速度**.在求任意时刻 t 到 $t+\Delta t$ 时间内的平均速度时,若取的时间间隔 Δt 越短,则平均速度就越接近时刻 t 的瞬时速度.

那么 t 时刻的瞬时速度为当时间间隔趋于零时的平均速度,其数学表达式为

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.5}$$

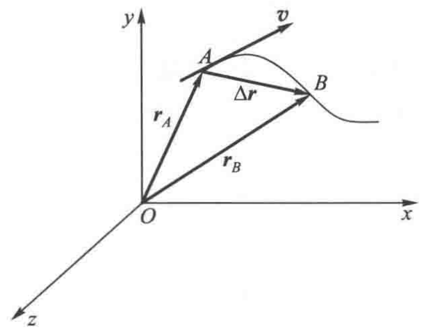

图 1-1-3 速度矢量

它等于位置矢量对时间的一阶导数.通常所说的物体运动速度,总是指它的瞬时速度.速度矢量的方向沿平均速度的极限方向,即沿轨迹曲线上该点的切线并指向质点前进的一方.在直角坐标系中,可将速度表示为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1.1.6}$$

式中,v_x、v_y、v_z 分别为速度矢量在三个坐标轴上的投影或分量.速度的大小为

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \tag{1.1.7}$$

在描述质点运动时,通常还用到速率的概念.若在 Δt 时间内,质点通过的路程为 Δs,则路程 Δs 与时间间隔 Δt 的比值 $\Delta s/\Delta t$ 叫做该时间间隔内的平均速率,可表示为 $v=\Delta s/\Delta t$.显然,一般情况下平均速度的大小不等于平均速率,这是因为 $|\Delta \boldsymbol{r}|\neq\Delta s$.平均速度与平均速率是两个不同的概念,切不可混淆.通过平均速率可以引入瞬时速率的概念.当 $\Delta t\to 0$ 时,平均速率的极限叫做质点在 t 时刻的瞬时速率,可表示为

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.8}$$

瞬时速率简称为速率.速度和速率是两个不同的概念,但由于 $\Delta t\to 0$ 时,$|\Delta \boldsymbol{r}|\to\Delta s$,即 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$,所以

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.9}$$

可见,瞬时速度的大小等于该时刻的瞬时速率.

2. 加速度

为了描述质点运动速度随时间变化的情况,引入加速度的概念.如图 1-1-4 所示,设质点沿曲线运动,在 t 时刻位于 A 点,其速度为 $\boldsymbol{v}(t)$;在 $t+\Delta t$ 时刻位于 B 点,其速度为 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$.在 Δt 时间内,速度矢量增量为

$$\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)$$

仿照速度定义方法,Δt 时间内速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 与时间间隔 Δt 的比值 $\Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$,叫做质点在 Δt 时间内的平均加速度,即 $\overline{\boldsymbol{a}}=\Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$.显然,平均加速度为矢量,其大小 $|\overline{\boldsymbol{a}}|=|\Delta\boldsymbol{v}|/\Delta t$,方向与 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向相同.为了精确描述质点在某一瞬时时刻速度变化的实际情况,定义当 $\Delta t\to 0$ 时,平均加速度的极限,叫做质点在时刻 t 的**瞬时加速度**,简称加速度,可表示为

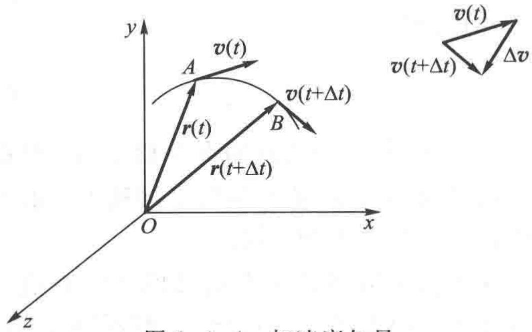

图 1-1-4 加速度矢量

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.1.10}$$

即质点的加速度等于速度对时间的一阶导数,或等于位置矢量对时间的二阶导数.在直角坐标系中,加速度 $\boldsymbol{a}$ 可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\\&=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的投影为

$$\left.\begin{aligned}a_x&=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\a_y&=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\\a_z&=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned}\right\} \tag{1.1.12}$$

加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{1.1.13}$$

加速度的方向可由其方向余弦决定,即

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{a},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{a},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{a} \tag{1.1.14}$$

根据加速度的定义,加速度的方向为 $\Delta t\to 0$ 时 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的极限方向.一般而言,加速度的方向与速度的方向并不相同.当质点沿直线运动时,若质点作加速运动,则加速度 $\boldsymbol{a}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 方向

相同；若质点作减速运动，则加速度 $\boldsymbol{a}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 方向相反.当质点沿曲线运动时，若质点作加速运动，则加速度 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角 $0\leqslant\theta<\pi/2$；若质点作减速运动，则加速度 $\boldsymbol{a}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 的夹角 $\pi/2<\theta\leqslant\pi$；若质点作匀速率运动，则加速度 $\boldsymbol{a}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 相互垂直，其夹角 $\theta=\pi/2$.在国际单位制(SI)中，速度和加速度的单位分别为米每秒($\mathrm{m\cdot s^{-1}}$)、米每二次方秒($\mathrm{m\cdot s^{-2}}$).由以上讨论可以看出，如果知道了质点的运动学方程，就能确定质点的全部运动状况.因此，运动学方程是运动学的核心.运动学的任务之一，就是要根据各种问题的具体情况，求出质点的运动学方程.

例 1-1 设质点沿 x 轴运动，其运动方程为 $x=3t^2-t^3$，式中 x 以 m 为单位，t 以 s 为单位.求：(1) 质点在 3 s 末的速度和加速度；(2) 第 1 s 末到第 3 s 末时间内的位移.

解：(1) 在直角坐标系中，可将运动质点的速度、加速度分别表示为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\\&=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

当质点在 x 轴运动时

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t-3t^2,\quad a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=6-6t$$

$t=3$ s 时

$$v_x=-9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},\quad a_x=-12\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(2) 第 1 s 末到第 3 s 末时间内的位移为

$$\Delta x=x(3)-x(1)=-2\ \mathrm{m}$$

例 1-2 一质点在 Oxy 平面内运动，其运动方程为 $x=4t$，$y=6-2t^2$，式中 x、y 以 m 为单位，t 以 s 为单位.

(1) 求质点的轨迹方程.

(2) 求 2 s 末质点的位置矢量、速度矢量及加速度矢量.

(3) 在什么时刻，质点离原点最近？其距离是多少？

解：(1) 由运动方程 $x=4t$ 和 $y=6-2t^2$ 消去 t 得轨道方程为

$$y=6-2t^2=6-2\left(\frac{x^2}{16}\right)=6-\frac{x^2}{8}$$

(2) 位置矢量 $\boldsymbol{r}=4t\boldsymbol{i}+(6-2t^2)\boldsymbol{j}$，第 2 s 末位置矢量 $\boldsymbol{r}(2)$ 为

$$\boldsymbol{r}(2)=(8\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}$$

速度矢量 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=4\boldsymbol{i}+(-4t)\boldsymbol{j}=4\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j}$，第 2 s 末速度 $\boldsymbol{v}(2)$ 为

$$\boldsymbol{v}(2)=(4\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j})\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

加速度矢量 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-4\boldsymbol{j}$，第 2 s 末加速度仍为 $-4\boldsymbol{j}$，本题加速度大小为 4 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，方向沿 y

轴负方向.

(3) 质点到原点的距离 r 为

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{16t^2+(6-2t^2)^2}=\sqrt{4t^4-8t^2+36}=2\sqrt{t^4-2t^2+9}$$

由$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0$得

$$4t^3-4t=0$$

解得 $t_1=0, t_2=1\ \mathrm{s}, t_3=-1\ \mathrm{s}$(舍去).而 $t_1=0, r_1=6\ \mathrm{m}; t_2=1\ \mathrm{s}, r_2\doteq 5.66\ \mathrm{m}$.所以,$t=1\ \mathrm{s}$ 时质点离原点最近,距离为 5.66 m.

例 1-3 某物体的运动规律为$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2t$,式中 k 为大于零的常量,当 $t=0$ 时,初速度大小为 v_0,求速率 v 与时间的关系.

解: 由$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2t$,得$-\dfrac{\mathrm{d}v}{v^2}=kt\mathrm{d}t$.由题意知 $t=0, v=v_0$,所以

$$\int_{v_0}^{v}-\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=\int_0^t kt\mathrm{d}t$$

积分并整理得

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{2}kt^2$$

四、质点运动学的两类问题

有了运动方程,不仅可以知道质点任意时刻所处的位置,通过微分还可以确定其速度和加速度;反过来,若已知质点的速度或加速度,则根据初始条件,通过积分可以建立起质点的运动方程.这就是运动学中常见的两类问题.

例 1-4 设质点沿 x 轴作匀加速直线运动,已知加速度 a 为一常量,且 $t=0$ 时刻,质点的初位置为 x_0,初速度为 v_0,求任一时刻质点的运动状态.

解: 由 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$得 $\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$,两边积分得

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t$$

即

$$v-v_0=at \quad 或 \quad v=v_0+at \tag{1}$$

再由 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$得 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t=(v_0+at)\mathrm{d}t$,然后对两边积分得

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t(v_0+at)\mathrm{d}t$$

即

$$x-x_0=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \quad (位移公式) \tag{2}$$

或

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \quad （运动方程） \tag{3}$$

若由

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

便有

$$v\mathrm{d}v=a\mathrm{d}x$$

对两边积分

$$\int_{v_0}^{v}v\mathrm{d}v=\int_{x_0}^{x}a\mathrm{d}x$$

得

$$\frac{1}{2}(v^2-v_0^2)=a(x-x_0)$$

或

$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0) \tag{4}$$

以上(1)、(2)、(3)、(4)便是匀加速直线运动的基本公式.

例 1-5　如图 1-1-5 所示，一小球从屋檐落下，在 0.25 s 内经过 3 m 高的窗户，问窗顶距屋檐有多远？

解：以屋檐为坐标原点 O，竖直向下为 y 轴正向，设球过窗户顶时速度为 v_0，此时开始计时.则有

$$y=y_0+v_0t+\frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

$t=0.25$ s 时，

$$y-y_0=3\ \mathrm{m} \tag{2}$$

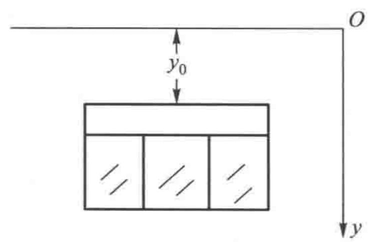

图 1-1-5　例 1-5 图

由式(1)、(2)得

$$v_0=\frac{y-y_0-\frac{1}{2}gt^2}{t}=\frac{3-\frac{1}{2}\times10\times\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1/4}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=10.75\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

再由 $v_0^2=2gy_0$ 得

$$y_0=\frac{v_0^2}{2g}=5.78\ \mathrm{m}$$

例 1-6　从离地 $h=8.0$ m 的高处，以抛射角 $\theta_0=30°$，初速度 $v_0=10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 抛出一个小球.问小球在何时、何处落地？并求落地时速度的大小、方向.

解：小球作抛体运动，建立如图 1-1-6 所示坐标系，其运动方程为

$$x=v_0t\cos\theta_0$$

$$y=v_0t\sin\theta_0-\frac{1}{2}gt^2$$

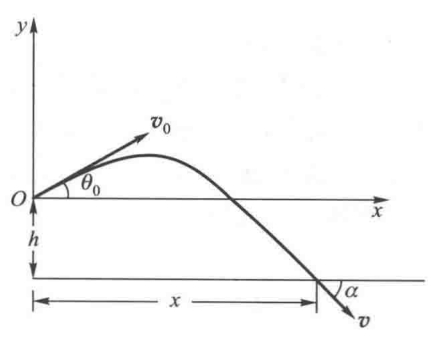

图 1-1-6　例 1-6 图

轨迹方程为

$$y=\tan\theta_0 x-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0}$$

由小球落地，以 $y=-8.0\ \mathrm{m}$，$g=10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$代入轨道方程，得

$$-8=x_1\tan 30^\circ-\frac{10x_1^2}{2\times10^2\times(\cos 30^\circ)^2}$$

即

$$\frac{x_1^2}{15}-0.58x_1-8=0$$

$$x_1=\frac{0.58\pm\sqrt{(-0.58)^2+\frac{4}{15}\times8}}{2/15}\ \mathrm{m}=\begin{cases}16.1\ \mathrm{m}\\-7.4\ \mathrm{m}(\text{舍去})\end{cases}$$

即落在距抛点水平距离为 16.1 m 处.

再由 $x=x_1=v_0\cos\theta_0 t$，得落地时刻为

$$t=\frac{x_1}{v_0\cos\theta_0}=\frac{16.1}{10\times\cos 30^\circ}\ \mathrm{s}=1.86\ \mathrm{s}$$

速度的大小为

$$v_x=v_0\cos\theta_0=10\times\cos 30^\circ\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=8.66\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$v_y=v_0\sin\theta_0-gt=(10\times\sin 30^\circ-10\times1.86)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=-13.6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=16.1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$\boldsymbol{v}$ 与 x 轴的夹角为

$$\alpha=\arctan\frac{v_y}{v_x}=\arctan\left(\frac{-13.6}{8.66}\right)=-57.5^\circ$$

1.2 圆周运动

一、圆周运动中的切向、法向加速度

1. 匀速率圆周运动

质点作圆周运动时，如果每一时刻的速率都相等，则这种运动称为匀速率圆周运动.设圆周的半径为 R，圆心为 O，t 时刻质点在圆周上 A 点，速度为 $\boldsymbol{v}_A$，$t+\Delta t$ 时刻质点沿圆周到达 B 点，速度为 $\boldsymbol{v}_B$，$\boldsymbol{v}_A$ 与 $\boldsymbol{v}_B$ 大小相等均等于 v，且 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 分别与半径 OA 和 OB 垂直，如图 1-2-1 所示，则速度的增量为

$$\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A$$

按加速度定义有

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A}{\Delta t}$$

很容易看出，$\triangle AOB$ 与 $\triangle A'O'B'$ 相似，由相似三角形对应边成比例可得

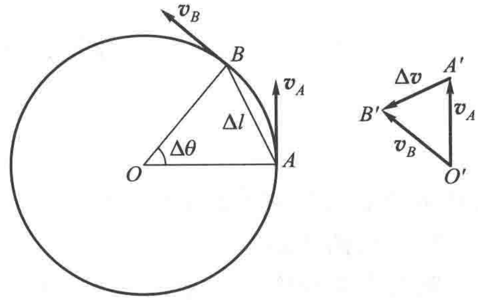

图 1-2-1 匀速率圆周运动

$$\frac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{v}=\frac{\Delta l}{R}$$

式中，Δl 为 AB 弦的长度.上式两边同除以 Δt 得

$$\frac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{\Delta t}=\frac{v}{R}\frac{\Delta l}{\Delta t}$$

当 Δt 趋于零时，B 点趋于 A 点，弦长 Δl 趋于弧长 Δs，于是求得加速度的大小为

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{R}\frac{\Delta l}{\Delta t}=\frac{v}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{v^2}{R}\qquad(1.2.1)$$

加速度的方向即 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的极限方向.当 Δt 趋于零，角 $\Delta\theta$ 趋于零，$\Delta \boldsymbol{v}$ 的极限方向垂直于 $\boldsymbol{v}_A$，所以在 A 点处加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向沿半径 OA 指向圆心.这个加速度通常称为**向心加速度**，它反映了速度方向随时间的改变.

2. 变速率圆周运动

质点的速率随时间变化的圆周运动叫做变速率圆周运动.如图 1-2-2 所示，质点在 t 时刻与 $t+\Delta t$ 时刻分别在圆周上 A、B 两点处，其速度分别为 $\boldsymbol{v}_A$、$\boldsymbol{v}_B$.则

$$\Delta \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A$$

在速度三角形 CE 边上截取 $CF=CD$，则可将 $\Delta \boldsymbol{v}$ 分解为两个矢量：$\Delta \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}$（即 $\overrightarrow{DF}$）和 $\Delta \boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}$（即 $\overrightarrow{FE}$），于是 $\Delta \boldsymbol{v}=\Delta \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}+\Delta \boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}$，两边同除 Δt 得平均加速度 $\overline{\boldsymbol{a}}$ 为

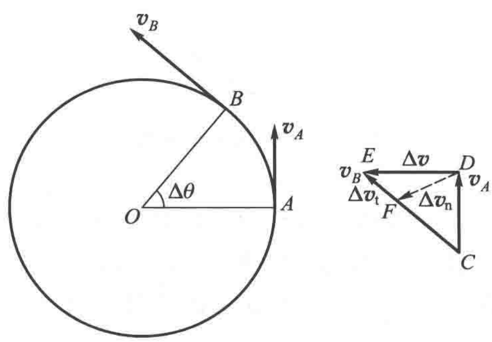

图 1-2-2 变速率圆周运动

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}}{\Delta t}+\frac{\Delta \boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}}{\Delta t}$$

瞬时加速度 $\boldsymbol{a}$ 为

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}}{\Delta t}\qquad(1.2.2)$$

式中，$\Delta \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}$ 与匀速率圆周运动的 $\Delta \boldsymbol{v}$ 相当，$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}/\Delta t$ 所表示的分加速度就是向心加速度，也叫**法向加速度**，用 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$ 表示，它反映速度方向的变化.$\Delta \boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}$ 的极限方向与 $\boldsymbol{v}_A$ 方向一致，在 A 点的切线方向上，所以 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta \boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}}{\Delta t}$ 表示的分加速度叫**切向加速度**，用 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$ 表示，它反映速度大小的变化.

由式(1.2.1)知法向加速度大小 $a_{\mathrm{n}}=v^2/R$，式中 R 为圆半径，v 为质点所在点的瞬时速率.而切向加速度大小 $a_{\mathrm{t}}=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，等于瞬时速率的时间变化率.

总加速度为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}\qquad(1.2.3)$$

$\boldsymbol{a}$ 的大小与方向(图 1-2-3)如下：