张启华 著

叶轮机械流体力学基础

科学出版社

叶轮机械流体力学基础

张启华　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书凝聚了作者多年来在叶轮机械研究中所积累的重要理论方法和设计技术。通过本书的学习将为读者运用流体力学知识分析解决叶轮机械流动问题及开展设计实践打下扎实的基础。本书主要内容包括经典流动问题的精确解、二维机翼绕流的势流理论及计算方法、湍流统计理论基础、湍流模拟理论基础、叶轮机械流动模型、叶轮机械设计模型、气泡及颗粒两相流模型，以及张量分析基础和曲线坐标系下流体基本方程的推导等。本书注重理论体系的完整、系统和实用性，通过理论与实例相结合，阐释模型背后的物理意义，强调研究思路与求解技术的贯通，既可作为教学用，也可供科研参考。

本书可用于叶轮机械、流体力学及相关理工科专业本科生和研究生的教材，也可供高等院校教师和科研院所技术人员在理论研究和工程实践中参考。

图书在版编目(CIP)数据

叶轮机械流体力学基础/张启华著. —北京: 科学出版社, 2016.12

ISBN 978-7-03-051017-4

Ⅰ. ①叶… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①叶轮机械流体动力学 Ⅳ. ①TK12

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 287594 号

责任编辑: 惠 雪 曾佳佳 / 责任校对: 钟 洋
责任印制: 张 倩 / 封面设计: 许 瑞

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京通州皇家印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 12 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2016 年 12 月第一次印刷 印张:18 1/4
字数: 368 000

定价: 89.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

叶轮机械涵盖了泵、风机 (通风机、压缩机)、(飞机、船舶) 螺旋桨以及 (水力、气力、风力、海洋) 透平等。随着社会工业化程度的日益提高，对叶轮机械性能的要求也更为苛刻。然而，叶轮内部流动涉及三维叶片结构及高速旋转，许多流动现象至今依然难以捉摸，从而制约进一步挖掘机器潜力的可能。随着试验和数值计算获得流场信息日渐丰富，利用好这些信息既是机遇，也是挑战，显然，掌握必要的流体力学基础知识是不可或缺的前提。同时，叶轮机械流动理论研究无论对认识复杂流动现象，还是设计具有重要的指导意义。

本书首先介绍经典流动问题的精确解 (第 1 章)，如绕球体 Stokes 流动以及边界层的解析解；其次，介绍二维机翼绕流的势流理论及计算方法 (第 2 章)；第三，介绍湍流统计理论基础和湍流模拟理论基础 (第 3 章、第 4 章)；上述内容为流体力学基础知识；第四，介绍叶轮机械流动模型和叶轮机械设计模型 (第 5 章、第 6 章)，通过基本流动模型分析叶轮机械中的曲率、旋转特性，解析其原理，并强调运用旋转坐标系考察流动问题的重要性，再通过螺线设计法、叶片载荷模型、均匀流线设计法、共形映射基础、径向平衡模型的介绍，阐释离心式、轴流式叶轮设计的基础；第五，介绍气泡及颗粒两相流模型 (第 7 章)；第六，介绍张量分析基础 (附录 A1)、包括向量张量分析、线性代数运算、张量分析、曲线坐标系及坐标变换等基础；还给出曲线坐标系下流体基本运动方程的推导 (附录 A2)。

著名航空学家冯・卡门曾经说过，好的设计源于经验，而好的经验则来源于错误的设计。显然，好的理论指导无疑会事半功倍。希望本书的出版能为读者带来思考、领悟和收获，作者就倍感欣慰。

本书取材源自作者多年来在流体机械科研实践中总结的理论和技术方法，力求做到思路清晰、简明扼要，同时又能将物理内涵呈现给读者。由于作者水平有限，难免存在疏漏之处，恳请读者批评指正。

作　者
2016 年 8 月

符 号 表

希腊字符

Γ	环量，$\mathrm{m^2/s}$
δ	边界层厚度，m
ε	湍动能耗散率，$\mathrm{m^2/s^3}$
η	Kolmogorov 长度微尺度，m
μ	动力黏度，$\mathrm{kg/(m\cdot s)}$
μ_t	湍流动力黏度，$\mathrm{kg/(m\cdot s)}$
ν	运动黏度，$\mathrm{m^2/s}$
ρ	密度，$\mathrm{kg/m^3}$
$\boldsymbol{\sigma}$	应力张量，Pa
τ	Kolmogorov 时间微尺度，s；或表示雷诺应力张量，Pa
$\mathcal{T}$	时间尺度，s
$\mathcal{U}$	速度尺度，m/s
ϕ	势函数，$\mathrm{m^2/s}$
ψ	流函数，$\mathrm{m^2/s}$
Ω	涡量，$\mathrm{s^{-1}}$
Ω_i	涡量 Ω 的 i 分量，$\mathrm{s^{-1}}$

运算符

$\det()$	表示矩阵的行列式
$\langle\rangle$	表示系综平均，或脉动量的关联式
$\|\|$	表示标量的绝对值，或向量的模，或矩阵行列式
$\cdot$	标量积
$\times$	向量积

英文字符

E	单位质量流体的湍流脉动动能，$\mathrm{m^2/s^2}$
$E(k)$	波数谱，或能谱，$\mathrm{m^3/s^2}$
f	体积力，$\mathrm{N/m^3}$
F	物体表面受力，N
$\boldsymbol{g}$	重力加速度，$\mathrm{m/s^2}$
h	比焓，$\mathrm{J/kg = m^2/s^2}$

k	湍动能，m^2/s^2；或能谱中的波数，m^{-1}
ℓ	长度尺度，m
L	参考长度，m
M	脉动速度矩，m^2/s^2
p	压力，Pa
$\boldsymbol{r}$	位置向量，或矢径，m
$\boldsymbol{S}$	应变率张量，s^{-1}
t	时间，s
$\boldsymbol{u}$	速度向量，m/s
U	参考速度，m/s
v	Kolmogorov 速度微尺度，m/s

上标

$\wedge$	表示归一化，或单位化
$-$	表示取统计平均
$\sim$	表示空间滤波平均
$'$	表示脉动量
$*$	表示量纲一化
i	表示逆分量

下标

d	表示二维截面阻力系数
D	表示三维表面阻力系数
f	表示摩擦系数
i	表示协分量
l	表示二维截面升力系数，或表示二维机翼的下表面
L	表示三维表面升力系数
min	表示最小值
p	表示压力面，或表示压力系数
s	表示吸力面
u	表示二维机翼的上表面
0	表示初始值，或无穷远自由流边界值，或热力学滞止值
∞	表示无穷远值
$\parallel$	表示平行方向
$\perp$	表示垂直方向

目　　录

第 1 章　经典流动问题的精确解

自然界与工业中的绝大多数流动可用 Navier-Stokes 方程表述，然而其精确解却只存在于少数简化情形下。本章首先通过对不可压缩 Navier-Stokes 方程的量纲一化，分别给出黏性占主导和惯性占主导的两种简化模型，即 Stokes 方程和 Euler 方程。其次，介绍绕球体 Stokes 流动、Blasius 层流边界层、平面滞止点流动、旋转圆盘上方流动、平板边界层尾流、平面射流、Ekman 层流动的解析解。中间延伸探讨了湍流边界层速度剖面的求解，以及 Kármán 动量积分方程。这些流动问题各具特色，在求解的过程中既需注意技巧的运用，同时，更要注意观察和抓住流动现象背后的物理内涵。

1.1　量纲为一的基本方程

1.1.1　黏性占主导

我们先给出不可压缩流动 Navier-Stokes 方程如下：

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u} \tag{1.1}$$

用量纲为一的量$x^* = \dfrac{x}{L}$、$\boldsymbol{u}^* = \dfrac{\boldsymbol{u}}{U}$、$t^* = \dfrac{t}{L/U}$、$p^* = \dfrac{pL}{\mu U}$ 分别表示长度、速度、时间和压力尺度，代入不可压缩 Navier-Stokes 方程 (1.1)，有

$$\left(\frac{U^2}{L}\right)\frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t^*} + \left(\frac{U^2}{L}\right)\boldsymbol{u}^* \cdot \nabla \boldsymbol{u}^* = -\left(\frac{\mu U}{L^2}\right)\frac{1}{\rho}\nabla p^* + \left(\frac{U}{L^2}\right)\nu \nabla^2 \boldsymbol{u}^* \tag{1.2}$$

将式 (1.2) 两端同除以 $\dfrac{\mu U}{\rho L^2}$，注意微分算子 $\nabla = \dfrac{1}{L}$，$\nabla^2 = \dfrac{1}{L^2}$，及雷诺数 $Re = \dfrac{UL}{\mu/\rho}$，则式 (1.2) 变为

$$Re\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t^*} + \boldsymbol{u}^* \cdot \nabla \boldsymbol{u}^*\right) = -\nabla p^* + \nabla^2 \boldsymbol{u}^* \tag{1.3}$$

对于黏性占主导，即雷诺数 Re 非常小的情形，比如 $Re \ll 1$ 时，式 (1.3) 左边可以忽略不计。这样，式 (1.3) 则变为

$$0 = -\nabla p^* + \nabla^2 \boldsymbol{u}^* \tag{1.4}$$

恢复为具有量纲的形式，即忽略式 (1.1) 左边项，有

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u}-\nabla p=0 \tag{1.5}$$

这就是不可压缩流动的 Stokes 方程。

1.1.2　惯性占主导

我们用量纲为一的量 $x^*=\dfrac{x}{L}$、$\boldsymbol{u}^*=\dfrac{\boldsymbol{u}}{U}$、$t^*=\dfrac{t}{L/U}$、$p^*=\dfrac{p}{\rho U^2}$ 分别表示长度、速度、时间和压力尺度，代入不可压缩 Navier-Stokes 方程 (1.7)，有

$$\left(\frac{U^2}{L}\right)\frac{\partial\boldsymbol{u}^*}{\partial t^*}+\left(\frac{U^2}{L}\right)\boldsymbol{u}^*\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*=-\left(\frac{\rho U^2}{L}\right)\frac{1}{\rho}\nabla p^*+\left(\frac{U}{L^2}\right)\nu\nabla^2\boldsymbol{u}^* \tag{1.6}$$

将上式两端同除以 $\left(\dfrac{U^2}{L}\right)$，有

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}^*}{\partial t^*}+\boldsymbol{u}^*\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*=-\nabla p^*+\left(\frac{1}{Re}\right)\nabla^2\boldsymbol{u}^* \tag{1.7}$$

对于惯性占主导的流动，比如，$Re\to\infty$ 时，将式 (1.7) 右端第二项略去，有

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}^*}{\partial t^*}+\boldsymbol{u}^*\cdot\nabla\boldsymbol{u}^*=-\nabla p^* \tag{1.8}$$

恢复为有量纲方程，为

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{1.9}$$

这就是 Euler 方程，即忽略黏性项的 Navier-Stokes 方程。

1.2　绕球体 Stokes 流动

我们来分析黏性绕球体 Stokes 流动，此时，雷诺数 $Re\ll 1$，即满足式 (1.5)。这里，为便于分析，我们采用球坐标系，将坐标系固系于球体，坐标原点位于球心。这样，从该参考系观察，球体始终都是处于静止状态。设均匀来流方向沿着 $\theta=0$ 所在 r 坐标轴正向，注意到，此时流动沿 ϕ 方向是轴对称的，有 $u_\phi=0, \dfrac{\partial}{\partial\phi}=0$，即流动简化为 r-θ 平面内的二维流动，这样，Stokes 方程式 (1.5) 变为

$$\begin{aligned}&\mu\left(\nabla^2u_r-\frac{2u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}-\frac{2u_\theta\cot\theta}{r^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial r}=0\\&\mu\left(\nabla^2u_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r^2\sin\theta\sin\theta}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}=0\end{aligned} \tag{1.10}$$

其中，Laplace 算子 ∇^2 项展开为

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{1.11}$$

这样，代入式 (1.10) 得到完整的方程为

$$\begin{aligned}&\mu\left(\frac{\partial^2u_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u_r}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{2u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}-\frac{2u_\theta\cot\theta}{r^2}\right)\\&-\frac{\partial p}{\partial r}=0\\&\mu\left(\frac{\partial^2u_\theta}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right)\\&-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}=0\end{aligned} \tag{1.12}$$

这样，由 ϕ 方向对称性可知，球坐标系下的连续性方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2u_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta u_\theta\right)=0 \tag{1.13}$$

该问题的边界条件为

$$\begin{aligned}&u_r\left(r=R\right)=u_\theta\left(r=R\right)=0\\&u_r\left(r\to\infty\right)=u_0\cos\theta,\quad u_\theta\left(r\to\infty\right)=-u_0\sin\theta\end{aligned} \tag{1.14}$$

式中，R 为球体半径；u_0 为无穷远自由流动速度。

这里，假设方程的解有如下形式：

$$\begin{aligned}u_r&=u_0\cos\theta\left(1+\frac{b}{r}+\frac{c}{r^2}+\frac{d}{r^3}\right)\\u_\theta&=-u_0\sin\theta\left(1+\frac{e}{r}+\frac{f}{r^2}+\frac{g}{r^3}\right)\end{aligned} \tag{1.15}$$

将各个导数项写出

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_r}{\partial r}=u_0\cos\theta\left(-\frac{b}{r^2}-\frac{2c}{r^3}-\frac{3d}{r^4}\right),\quad \frac{\partial^2u_r}{\partial r^2}=u_0\cos\theta\left(\frac{2b}{r^3}+\frac{6c}{r^4}+\frac{12d}{r^5}\right)\\&\frac{\partial u_r}{\partial\theta}=-u_0\sin\theta\left(1+\frac{b}{r}+\frac{c}{r^2}+\frac{d}{r^3}\right),\quad \frac{\partial^2u_r}{\partial\theta^2}=-u_0\cos\theta\left(1+\frac{b}{r}+\frac{c}{r^2}+\frac{d}{r^3}\right)\\&\frac{\partial u_\theta}{\partial r}=u_0\sin\theta\left(\frac{e}{r^2}+\frac{2f}{r^3}+\frac{3g}{r^4}\right),\quad \frac{\partial^2u_\theta}{\partial r^2}=u_0\sin\theta\left(-\frac{2e}{r^3}-\frac{6f}{r^4}-\frac{12g}{r^5}\right)\\&\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}=-u_0\cos\theta\left(1+\frac{e}{r}+\frac{f}{r^2}+\frac{g}{r^3}\right),\quad \frac{\partial^2u_\theta}{\partial\theta^2}=u_0\sin\theta\left(1+\frac{e}{r}+\frac{f}{r^2}+\frac{g}{r^3}\right)\end{aligned} \tag{1.16}$$

代入连续性方程，有

$$u_0\cos\theta\left(-\frac{b}{r^2}-\frac{2c}{r^3}-\frac{3d}{r^4}\right)+\frac{2}{r}u_0\cos\theta\left(1+\frac{b}{r}+\frac{c}{r^2}+\frac{d}{r^3}\right)$$
$$-\frac{1}{r}u_0\cos\theta\left(1+\frac{e}{r}+\frac{f}{r^2}+\frac{g}{r^3}\right)-\frac{\cot\theta}{r}u_0\sin\theta\left(1+\frac{e}{r}+\frac{f}{r^2}+\frac{g}{r^3}\right)=0 \tag{1.17}$$

上式对任意 r 都成立，因此，r 的各次幂的系数都应为零，有

$$\begin{array}{ll}\dfrac{1}{r} & 2-1-1=0\\ \dfrac{1}{r^2} & -b+2b-e-e=0\ \Rightarrow b=2e\\ \dfrac{1}{r^3} & -2c+2c-2f=0\ \Rightarrow f=0\\ \dfrac{1}{r^4} & -3d+2d-g-g=0\Rightarrow d=-2g\end{array} \tag{1.18}$$

将式 (1.15) 和式 (1.16) 代入式 (1.12) 中 u_r 的运动方程，有

$$\mu\left[u_0\cos\theta\left(\frac{2b}{r^3}+\frac{6c}{r^4}+\frac{12d}{r^5}\right)+\frac{2}{r}u_0\cos\theta\left(-\frac{b}{r^2}-\frac{2c}{r^3}-\frac{3d}{r^4}\right)\right.$$
$$-\frac{1}{r^2}u_0\cos\theta\left(1+\frac{b}{r}+\frac{c}{r^2}+\frac{d}{r^3}\right)-\frac{\cot\theta}{r^2}u_0\sin\theta\left(1+\frac{b}{r}+\frac{c}{r^2}+\frac{d}{r^3}\right)$$
$$-\frac{2}{r^2}u_0\cos\theta\left(1+\frac{b}{r}+\frac{c}{r^2}+\frac{d}{r^3}\right)+\frac{2}{r^2}u_0\cos\theta\left(1+\frac{e}{r}+\frac{f}{r^2}+\frac{g}{r^3}\right)$$
$$\left.+\frac{2\cot\theta}{r^2}u_0\sin\theta\left(1+\frac{e}{r}+\frac{f}{r^2}+\frac{g}{r^3}\right)\right]-\frac{\partial p}{\partial r}=0 \tag{1.19}$$

对于式 (1.19), 将 r 的各次幂的系数关系代入式 (1.18)，变为

$$\mu u_0\cos\theta\left(\frac{2b-2b-b-b-2b+2e+2e}{r^3}\right.$$
$$+\frac{6c-4c-c-c-2c+2f+2f}{r^4}$$
$$\left.+\frac{12d-6d-d-d-2d+2g+2g}{r^5}\right)-\frac{\partial p}{\partial r}=0 \tag{1.20}$$

整理后变为

$$\mu u_0\cos\theta\left(\frac{-4b+4e}{r^3}+\frac{-2c}{r^4}+\frac{2d+4g}{r^5}\right)-\frac{\partial p}{\partial r}=0 \tag{1.21}$$

将式 (1.15) 和式 (1.16) 代入式 (1.12) 中 u_θ 的运动方程，有

$$\mu\left[u_0\sin\theta\left(-\frac{2e}{r^3}-\frac{6f}{r^4}-\frac{12g}{r^5}\right)+\frac{2}{r}u_0\sin\theta\left(\frac{e}{r^2}+\frac{2f}{r^3}+\frac{3g}{r^4}\right)\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{r^2}u_0\sin\theta\left(1+\frac{e}{r}+\frac{f}{r^2}+\frac{g}{r^3}\right)-\frac{\cot\theta}{r^2}u_0\cos\theta\left(1+\frac{e}{r}+\frac{f}{r^2}+\frac{g}{r^3}\right)\\
&-\frac{2}{r^2}u_0\sin\theta\left(1+\frac{b}{r}+\frac{c}{r^2}+\frac{d}{r^3}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_0\sin\theta\left(1+\frac{e}{r}+\frac{f}{r^2}+\frac{g}{r^3}\right)\\
&-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}=0
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

整理变为

$$
\begin{aligned}
&\mu u_0\sin\theta\left(\frac{-2e+2e+e-\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}e-2b+\dfrac{1}{\sin^2\theta}e}{r^3}\right.\\
&+\frac{-6f+4f+f-\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}f-2c+\dfrac{1}{\sin^2\theta}f}{r^4}\\
&\left.+\frac{-12g+6g+g-\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}g-2d+\dfrac{1}{\sin^2\theta}g}{r^5}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}=0
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

进一步整理后变为

$$
\mu u_0\sin\theta\left(\frac{2e-2b}{r^3}+\frac{-2c}{r^4}+\frac{-4g-2d}{r^5}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}=0 \tag{1.24}
$$

对式 (1.21) 积分，其压力可写为

$$
\mu u_0\cos\theta\left(\frac{2b-2e}{r^2}+\frac{2c}{3r^3}-\frac{d+2g}{2r^4}\right)+f(\theta)=p-p_0 \tag{1.25}
$$

对式 (1.24) 积分，其压力可写为

$$
\mu u_0\cos\theta\left(\frac{2b-2e}{r^2}+\frac{2c}{r^3}+\frac{4g+2d}{r^4}\right)+f(r)=p-p_0 \tag{1.26}
$$

式 (1.25) 和式 (1.26) 中各项系数应相同，有

$$
\begin{aligned}
&2c=\frac{2c}{3}\\
&-\frac{(d+2g)}{2}=4g+2d\\
&f(\theta)=f(r)
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

可得，$c=0$ 和 $d=-2g$。注意，当压力取无穷远自由流处 $(r\to\infty)$ 的压力，即 $p=p_0$ 时，由式 (1.25) 和式 (1.26) 可知，常数 $f(\theta)=f(r)=0$。

再应用如下边界条件，即

$$
\begin{aligned}
u_r\,(r=R)=0 \Rightarrow 0=\left(1+\frac{b}{R}+\frac{c}{R^2}+\frac{d}{R^3}\right)\\
u_\theta\,(r=R)=0 \Rightarrow 0=\left(1+\frac{e}{R}+\frac{f}{R^2}+\frac{g}{R^3}\right)
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

将前面已得出的参数 $c=0$、$f=0$、$d=-2g$ 和 $b=2e$，代入上式有

$$
\begin{aligned}
0=\left(1+\frac{2e}{R}+\frac{-2g}{R^3}\right)\\
0=\left(1+\frac{e}{R}+\frac{g}{R^3}\right)
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

解出 $e=-\dfrac{3}{4}R$、$g=-\dfrac{1}{4}R^3$、$d=\dfrac{1}{2}R^3$、$b=-\dfrac{3}{2}R$，并代入式 (1.15) 有

$$
\begin{aligned}
u_r=u_0\cos\theta\left(1-\frac{3R}{2r}+\frac{R^3}{2r^3}\right)\\
u_\theta=-u_0\sin\theta\left(1-\frac{3R}{4r}-\frac{R^3}{4r^3}\right)
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

同样地，将上述参数解代入式 (1.25) 有

$$
\mu u_0\cos\theta\left(-\frac{3R}{2r^2}\right)=p-p_0 \tag{1.31}
$$

我们再计算出单位面积上所受的力，沿 $\theta=0$ 方向的分量如下：

$$
\begin{aligned}
\sigma&=-\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)_{r=R}\sin\theta-(p-p_0)\cos\theta\\
&=\mu u_0\sin^2\theta\left(\frac{3R}{4r^2}+\frac{3R^3}{4r^4}\right)\Bigg|_{r=R}-\mu u_0\cos^2\theta\left(-\frac{3R}{2r^2}\right)\Bigg|_{r=R}\\
&=\mu u_0\sin^2\theta\frac{3}{2R}+\mu u_0\cos^2\theta\frac{3}{2R}=\frac{3}{2}\frac{\mu u_0}{R}
\end{aligned}
\tag{1.32}
$$

这样，总的作用力 D 等于应力乘以球面积，为

$$
D=\sigma\times 4\pi R^2=\frac{3}{2}\frac{\mu u_0}{R}\times 4\pi R^2=6\pi R\mu u_0 \tag{1.33}
$$

如果用球的直径作为特征长度 $L=2R$，u_0 为特征速度，可以写出球体的阻力系数如下：

$$
C_D=\frac{D}{\frac{1}{2}\rho u_0^2L^2}=\frac{6\pi R\mu u_0}{2\rho u_0^2R^2}=\frac{6\pi}{2Ru_0\rho/\mu}=\frac{6\pi}{Re} \tag{1.34}
$$

注意，式中雷诺数是以 $L=2R$ 为长度尺度的。对于 $Re\ll 1$，上述结果已被试验所证明。

1.3 Hele-Shaw 流动

Hele-Shaw(1898) 发明了一种流动显示装置，该装置是采用两块相距非常小距离的平行玻璃板，在两块玻璃板之间嵌入任意截面形状的物体，当含有染色剂的黏性流体缓慢流过两层玻璃板间的狭小间隙时，人们就能够清楚地看到真实的绕流流线。Hele-Shaw 发现平板内的流动与势流流动 (无黏无旋流体) 几乎是一样的。而 Hele-Shaw 流动也常见于我们周围，比如，在注塑模充填过程、流经多孔介质情形以及微流体等。

如果以平板间隙 $2h$ 作为特征尺度，Hele-Shaw 流动的雷诺数是很小的，即 $Re \ll 1$，也同样适用 Stokes 方程式 (1.5)。考虑到便利性，我们把坐标 $x-y$ 平面取在两层玻璃间隙的中间平面上，可以写出一个满足式 (1.5) 的解，具体如下：

$$
\begin{aligned}
&u = u_0(x,y)\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right), \quad v = v_0(x,y)\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right), \quad w=0 \\
&p = -\frac{2\mu}{h^2}\int_{x_0}^{x} u_0(x,y)\,\mathrm{d}x = -\frac{2\mu}{h^2}\int_{y_0}^{y} v_0(x,y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{1.35}
$$

式中，$u_0(x,y)$ 和 $v_0(x,y)$ 为二维势流流动的速度分布函数；w 为 z 方向的速度分量；对应的压力分布为 $p_0(x,y)$。

这样，满足势流方程组如下：

$$
u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0}{\partial x} \tag{1.36a}
$$

$$
u_0\frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0}{\partial y} \tag{1.36b}
$$

$$
\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \tag{1.36c}
$$

由式 (1.36c) 可看出基本解式 (1.35) 满足连续性方程，由于 $w=0$，自动满足 z 方向的动量方程。再由无旋条件可知

$$
\frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \tag{1.37}
$$

结合式 (1.36c) 有 $\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0$，及 $\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0$。这样，代入式 (1.5) 即满足等式成立。由此可以看出，式 (1.35) 确实是满足 Stokes 方程的解。而在 $z=\mathrm{Const}$ 的平面上，Stokes 流动的流线与势流流线是完全重合的。在 $z=\pm h$ 处，根据式 (1.35)，自动满足无滑移条件。但在绕流物体的表面，式 (1.35) 不能满足