第三版

(3nd ed.)

常用不等式

Applied Inequalities

匡继昌 著

By Kuang Jichang

山东科学技术出版社

Shandong Science and Technology Press

常用不等式

Applied Inequalities

第三版

(3nd ed.)

匡继昌 著

By Kuang Jichang

山东科学技术出版社

Shandong Science and Technology Press

图书在版编目（C I P）数据

常用不等式/匡继昌著．—3 版．—济南：山东科学技术出版社，2004．1
ISBN 7－5331－3618－7

Ⅰ．常…　Ⅱ．匡…　Ⅲ．不等式　Ⅳ．0178

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 099335 号

常用不等式
（第三版）
匡继昌　著

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：(0531)2065109
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@jn-public.sd.cninfo.net
发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：(0531)2020432
印刷者：山东人民印刷厂
地址：泰安市灵山大街东首
邮编：271000　电话：(0538)6119320

开本：787mm × 1092mm　1/16
印张：47
字数：1100 千
版次：2004 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
印数：1－3000

ISBN 7－5331－3618－7　　O·112
定价：68.00 元

内容提要

本书第三版是对1993年第二版的内容全面更新和改写,充分反映了20世纪以来,特别是20世纪90年代以来不等式理论和方法的最新进展.全书共分17章,包含了美国数学评论(MR)2000主题分类中所有关于不等式论题的40个三级分类项目,还包括了国内外历年来大、中学生各类数学竞赛和研究生入学考试中所出现的新的不等式,以及工程技术问题中常用的不等式;所收录的不等式由第二版的3600个增加到5千多个,第三版还总结了不等式的常用证法50种,提出了152个未解决或值得进一步研究的问题.由于不等式在数学各个领域和科学技术中都是不可缺少的基本工具,加上本书起点低,因而本书的读者面是非常广泛的,各种不同专业水平的读者,不论是大中学师生,数学研究者,还是工程技术人员,都可以从中找到各自感兴趣的有用材料和研究课题.

第三版前言

本书第二版出版后受到国内外广泛好评.美国“数学评论”(MR)两次为本书发表评论,指出本书极有价值,并向全世界的研究学者、数学教师、工程师和各国的数学、科学、工程技术图书馆推荐.SCI和国内外著名杂志对本书的引用率越来越高,使得本书由国内走向国际.著名数学家Fan Ky教授多次从美国来信指出:本书第二版“内容之丰富,显然比哪一本关于不等式的书都超过很多,非常钦佩!它必定是一本有久远影响的巨著.…… 因此我极赞成您写一本英文版的”.著名数学家徐利治教授则多次指出,“Fan先生的意见是十分正确的,与我不谋而合”.第二版一问世后很快销售一空,国内的读者则希望能重印.

不等式一直是20世纪非常活跃而又有吸引力的研究领域,特别是该世纪90年代不等式研究空前活跃,研究的深度和广度都在迅速扩大.美国数学评论(MR)为此迅速作出反应,将有关不等式的三级主题分类由MR1991的28个增加到MR2000的40个.除了原有的国际性杂志,如[301],[305],[308],[309],[326],[327],[330]等大量发表有关不等式研究的新成果外,又先后创办了几个国际性不等式专业杂志(如[302]、[303]、[304]等),国内则有[351]等,新的不等式著作也大量出版,从本书参考文献中看出,20世纪90年代出版的就占近一半,但是这些著作大多限于一般不等式的某些特殊专题,缺乏概括反映不等式在数学各个领域发展的著作,这就是说,本书仍然起着现有著作所不可替代的作用.

从1993年起,作者下定决心对第二版重写,历时10年,几易其稿,删去了第二版中次要的一些不等式,而收录的不等式反而上升至5000多个,包含了MR2000主题分类中所有关于不等式论题的40个三级分类项目和国内外历年来大、中学生各级各类数学竞赛和研究生入学考试中所出现的新的不等式.初稿完成后,发现篇幅仍过于庞大,于是又删去了一些不等式,更多的是删去

了已收录的许多证明.由于不等式在数学各个领域和科学技术中都是不可缺少的基本工具,正如美国“数学评论”为本书第二版写的评论中所指出的那样,“不等式的重要性无论怎么强调都不会过分”,因此,本书的读者面是非常广泛的.而为了兼顾不等式的研究者,我们除了尽可能指出不等式的出处(不一定是原始出处)外,还专门写了一章不等式的50种常用证法,提出了152个未解决或值得进一步研究的课题.总之本书第三版无论是广度还是深度都远远超过了第二版.

本书无疑是一部专著,同时又力图使它具有工具书的功能,为了使读者查阅方便,在内容编排方面作了许多考虑,并用详细目录来代替按笔划排列的主题与作者索引.

为了照顾不同专业水平的广大读者,本书将起点放低,不但不等式的叙述遵循由初等向高等逐步推广的原则,而且仍大量收录了初等不等式,具有中等水平的读者完全可以从书中找到大量自己感兴趣的有用材料和研究课题.当然,初等不等式的大量收录,不仅仅是为了兼顾中等文化水平的读者和中学数学教学和各类数学竞赛培训的需要,而是初等不等式在大学数学教学与研究中,仍占有十分重要的地位.例如,[61]指出,“在逼近论的研究中,就常常为寻找一个形状简单,直观易懂但远非简单易证的初等不等式而深陷困境.”从证明方法上看,许多初等不等式的证明常常用到高等数学的工具,可以充分体现初等数学与高等数学在思想方法上的继承性和相互渗透性.

作者衷心感谢老一辈著名数学家徐利治教授,Fan ky 教授,胡克教授,Yang Yisong 教授等的关怀和指导,他们多年来一直关心本书的修订和英文版的出版工作,先后提出了许多极为宝贵的指导意见,热情寄来各种不等式的新文献,并且一直热心为国内外专家、学者推荐本书;作者非常感谢 Debnath. L. 教授(美国),Rassias,Th. M. 教授(希腊),以及南斯拉夫、印度、新加坡等国的许多教授和国内的祁锋、杨必成、高明哲、王挽澜、石焕南等教授和一大批专家学者、读者,作者与他们建立了长期友好合作交流与合作研究的联系,使作者深受教益;作者还要感谢台湾淡江大学杨国胜教授和“Tamkang J. of Math.”杂志编辑部对本书修订的关心和支持.没有上述的关心和支持,要想完成本书的修订是不可能的.

作者还要感谢北京九章图书有限公司和晁洪先生为本书修订和出版发行所作的努力,他们在沟通读者、作者与出版社三方面的联系以及加强中外数学

图书的交流等方面做了大量卓有成效的工作,正因如此,本书才得以出版.

作者特别感谢山东科学技术出版社为出版本书第三版所作的巨大努力,感谢本书责任编辑为编辑出版本书所付出的辛勤劳动.

由于文献浩繁,又受学识水平和文献资料的限制,本书仍无法完全避免差错,恳请广大读者赐教.

匡继昌

2003 年 10 月于湖南师范大学数学系

第二版前言

本书自第一版问世以来，受到国内外的好评．继在湖南师范大学被评为优秀专著后，1991 年又在第一次全国优秀数学传播类图书评选中被评为七本数学传播优秀图书之一（见“中国数学会通讯”1991 年第 2 期 P12～13）．美国“数学评论”、德国“数学文摘”和国内多家报刊杂志先后发表了热情洋溢的评论，指出这是“一本很有价值和受欢迎的数学不等式新文献”，这都是对作者极大的鼓励和鞭策．

鉴于不等式理论的惊人发展和广大读者对不等式日益增长的兴趣，作者对第一版进行了修订和补充．收集的不等式从 1600 多个增加到 3600 多个．另附有不等式常用证法 42 种及 100 个未解决的不等式问题．

新收录的不等式，主要来自两方面：其一是不等式理论的新发展．70 年代以来不等式的研究成果超过了前 300 年的六、七倍．例如，1989 年出版的 Recent Advances in Geometric Inequalities（见[19]），收集的几何不等式就达 3000 多个；不等式的方法和论题的范围也在迅速扩大；“国际一般不等式会议”每 2—3 年就举行一次，并出版会议文集（见〔5〕、〔54〕）．由于文献浩繁，许多国家都投入了很大的人力物力，而且是跨国的数学家通力合作，收集资料，出版专著，以此作为推动数学发展的一项基本建设．但国内外出版的这些著作，一般只限于不等式的某些专题，如“几何不等式”，“三角不等式”“数论中的不等式”等等（见本书所附的参考文献），还未见有概括反映不等式在数学各个领域发展的书．本书试图填补这一空白，并注意反映我国学者的工作．其二是来自教学和科研中用得较多的不等式及国内外各种数学竞赛、高考、研究生入学考试中新出现的不等式．它们往往在现行不等式著作和不等式的专题文献中都是难于查找的．据统计，在历年高考中用到不等式知识和方法的试题占总分的1/3以上（见[348]1990，10：12～15）．在各种数学竞赛和大学的教学与研究中，不等式更是必不可少的技巧性工具

第二版仍重视初等不等式,这不仅是中学数学的需要,近代数学的发展也离不开它.例如熟知的Hölder不等式和Minkowski不等式是建立L^p空间的基本工具;在复变函数理论、函数空间嵌入理论、变分计算、黎曼流形、近代调和分析等分支的发展中都离不开几何不等式;甚至从一个量的非负何时导致另一个量的非负的问题看来十分简单,却发展成正算子理论和微分不等式理论,而拟线性化理论则是动态规则理论和正算子理论的融合(见[54]2).

本书力图从浩繁的文献中理出一条主线,以便用较小的篇幅向读者提供尽可能多的信息.因此,对材料的编排方式作过多种尝试,尽可能使读者查阅方便,而且还能从上下文的联系中得到解决问题和发现新不等式的启示.

作者衷心感谢徐利治教授、陆善镇教授多年的教导.他们对本书的修订提出过许多宝贵的建议,并寄来了新作.徐先生曾多次强调学习和掌握不等式的重要性,告诫年青的数学工作者及早掌握这些方法和技巧.(见[8]前言).

作者非常感谢著名不等式专家王挽澜教授、陈计先生以及单墫、李宗铎等教授和许多读者的支持和鼓励,有的还寄来了已发表或尚未发表的佳作.作者还感谢本单位的领导和师生的大力支持和帮助.

作者还要特别感谢湖南教育出版社在学术著作的出版陷入困境的艰难条件下,仍克服重重困难,出版拙作,感谢欧阳维诚和责任编辑胡坚等同志的帮助和为编辑出版本书所付出的辛勤劳动.许多读者赞扬这是“独具慧眼”.

作者作了极大的努力来确保书中结果的准确可靠,除了常见的和容易证明的结果外,大多作了提示或给出了文献出处.但由于本书内容涉及面广,文献浩繁,受学识水平和资料的限制,无法对有关文献作系统的考查工作.例如,本书冠有人名的不等式,一般是按习惯称,但有时不见得合适,因为可能有别的学者更早地发现了这些结果,而许多著名的不等式,往往是几代人奋斗的结晶.由于水平有限,难免差错,恳请广大读者赐教.

匡继昌

1992年2月于湖南师范大学数学系

美国“数学评论”MR91c:26001
对“常用不等式”(第一版)的评论

This book is a collection of more than 1600 inequalities arising in various fields of mathematics. The materials overlap part of the celebrated book by Hardy, Littlewood and Polya, yet contain a large number of results that have become known from developments in fields other than analysis. The style of presentation of the book is similar to that of Hardy, Littlewood and Polya. In most places proofs are omitted, but a hint or a discussion concerning relevant references is usually given. Although the selection of some of the contents reflects the author's own personal preference, the book is certainly a useful and welcome addition to the literature on mathematical inequalities.

Yisong Yang (I-NM-S)

美国“数学评论”MR95j:26001
对“常用不等式”(第二版)的评论

This is a much enlarged and improved edition of a monograph under the same title. The first edition was published in 1989 [MR91c: 26001], and contained about 1600 inequalities collected from various fields with about 470 book pages. The present edition contains more than 3600 inequalities and has about 800 pages. The style of presentation of materials remains the same as in the first edition. The author classifies these inequalities into 10 large families under the following chapter headings; 1. Fundamental inequalities, 2. Basic inequalities, 3. Inequalities involving special functions, 4. Inequalities involving complex numbers and analytic functions, 5. Matrix and determinant inequalities, 6. Sequence and series inequalities, 7. Differential inequalities, 8. Integral inequalities. 9. Inequalities involving operators. 10. Inequalities arising from probability and statistics. Chapter 11 discusses some commonly used methods in proving inequalities. In the Appendix the author also lists some 100 open problems. The importance of inequalities can never be overemphasized. Numerous inequalities are spread out in the vast literature. This book will certainly be a very useful resource. It is clear that the author has made enthusiastic and ambitious efforts towards a comprehensive collection of inequalities. As in the first edition, the proofs are often sketchy or sometimes only some lines of hint are given instead of giving a complete proof. However, readers with sound mastery of mathematical analysis should have no diffculty filling the gaps or convincing themselves of the results. Furthermore, the author makes frequent careful citations of the literature so that the original source may be consulted by the reader when there is such a need. This book may be used by researchers, mathematics teachers, engineers. I recommend it to any mathematics, science, or engineering library without hesitation. It will be a valuable addition to any mathematics book collection.

The reader will find that there are no subject indices and author indices in the book. The way the literature is cited does not follow certain standard conventions widely adopted in scientific works. In the reviewer's opinion, the author could improve the book significantly if some of the unimportant inequalities were eliminated and other more useful inequlities were added with sufficient highlights. For example, it would be more useful if the book contained additional things, such as the Sobolev type embedding inequalities, eigenvalue inequalities for differential operators. e. g. Laplacian, isoperimetric inequalities. combinatorial inequalities, inequalities arising from graph theory, optimization, control, algebraic topology, and curvature problems.

In conclusion, this book has the potential to become a standard reference.

Yisong Yang (1-PINY; Brooklyn, NY)

符号说明

为节省篇幅和简化排版,在不致引起混淆的情况下,采用以下省略符号:

m,n,k,j,n_k 等表示自然数(不包括数 0),a,b,c,x,y 等表示实数,z,ω,ζ 等表示复数,$z=x+iy,\bar{z}=x-iy,i^2=-1,|z|=\sqrt{x^2+y^2}$,$\mathrm{Re}z=x,\mathrm{Im}z=y,\arg z$ 为 z 的辐角主值,即 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$;$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,$\{x\}=x-[x]$.

$\sum a_k$ 表示 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 或 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$,$\sum a_{jk}$ 表示 $\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}$ 或 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{jk}$,$\prod a_k$ 表示 $\prod\limits_{k=1}^{n}a_k$ 或 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}a_k$,其中 j,k 的变化范围由上下文判别,在一个不等式中含有 a,b,c 等字母时,$\sum$、$\prod$ 分别表示循环和、积.例如,$\sum f(a)=f(a)+f(b)+f(c)$,$\sum f(a,b)=f(a,b)+f(b,c)+f(c,a)$,$\prod f(a)=f(a)f(b)f(c)$ 等,(第 3 ~ 4 章用得最多).

$\exp x$ 表示 e^x,$\log x$ 表示 $\ln x$(以 e 为底).

$$\log^+|f(x)|=\begin{cases}\log|f(x)|, & 若\ |f(x)|\geqslant 1,\\ 0, & 若\ |f(x)|<1.\end{cases}$$

x 的符号函数 $\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & 若\ x>0\\ 0, & 若\ x=0\\ -1, & 若\ x<0.\end{cases}$ $\quad\varphi_A(x)=\begin{cases}1, x\in A\\ 0, x\notin A\end{cases}$ 表示 A 的特征函数.

$R^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n):-\infty<x_k<\infty,1\leqslant k\leqslant n\}$ 表示 n 维欧氏空间,对于 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$.$\|x\|=(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^2)^{1/2}$.$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为多重指标,其中 $\alpha_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 为非负整数,$|\alpha|=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k,\alpha!=\prod\limits_{k=1}^{n}\alpha_k!$,$D^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$ 表示微分算子.

$\dbinom{\alpha}{k}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\quad(\alpha\in R^1,k\in N)$,$\dbinom{\alpha}{0}=1$,特别当 $\alpha=n$ 为自然数时,

$$\binom{n}{k}=C_n^k=\begin{cases}\dfrac{n!}{k!(n-k)!}, & 若\ n\geqslant k,\\ 0, & 若\ n<k.\end{cases}$$

C^n 表示 n 维酉空间.即 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in C^n$ 时,$x_1,\cdots,x_n$ 均为复数,$y=(y_1,\cdots,y_n)\in C^n$,$(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\bar{y}_k$ 为 x,y 的内积.

若无特别声明,本书出现的集 E 均为测度空间$(X,\sum,\mu)$中可测集.$\mu(E)$ 表示集 E

的测度，$f\in C(E)$ 表示 f 在 E 上连续；$\int f$ 表示积分 $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu$ 或 $\int_{R^n} f(x)\mathrm{d}x$，积分区域由上下文判别，当 f 是周期为 $T=2\pi$ 的一元函数时，$\int f$ 表示 $\int_T f(x)\mathrm{d}x$ 或 $\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$. $f\in L^p(E)$ 表示 f 在 E 上 p 次 (L) 可积，当 f 是周期 2π 的函数时，记为 $f\in L_{2\pi}^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$.

$$\| f\|_X=\begin{cases}\| f\|_C=\sup\{\mid f(x)\mid : x\in E\}, & \text{若 } f\in C(E),\\ \| f\|_p=\left(\int_E \mid f(x)\mid^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}, & \text{若 } f\in L^p(E), 1\leqslant p<\infty,\end{cases}$$

$\| f\|_\infty=\inf\limits_{\mu(A)=0}\{\sup\limits_{x\in E-A}\mid f(x)\mid\}$, $\| f\|_{p,\omega}=\left(\int_E \mid f(x)\mid^p\omega(x)\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\quad(1\leqslant p<\infty)$，其中 $\omega(x)$ 是 E 上非负权函数. 而 $\| f\|$ 表示泛函 f 的范数. $f\in BV[a,b]$ 表示 f 是 $[a,b]$ 上有界变差函数，$f\in AC[a,b]$ 表示 f 是 $[a,b]$ 上绝对连续函数. 数列 $a=(a_1,\cdots,a_n,\cdots)\in l^p(1\leqslant p<\infty)$ 的加权范数记为 $\| a\|_{p,\omega}=\left(\sum\mid a_k\mid^p\omega_k\right)^{1/p}$，式中 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n,\cdots,)$, $\forall\,\omega_k>0$. $\{f>\alpha\}=\{x\in E: f(x)>\alpha\}$ 为 f 的水平集，$\alpha\in R^1$.

题号"N.2－2－18"表示第二章第 2 节第 18 题，"N.3－28(1)"表示第 3 章第 28 题第 1 小题，题号后"MC"表示数学竞赛试题(Mathematical Competition)，其中"MCM"表示中学生数学竞赛试题，"MCU"表示大学生数学竞赛试题或研究生入学试题，"IMO"表示数学奥林匹克试题，算术几何平均不等式记为 AG 不等式.

引用期刊文献时，按期刊名. 年份，卷号(期号)：页码次序；外文期刊按国际标准缩写，例如[305]1986，93(6)：466－468；表示"美国数学月刊"，1986 年第 93 卷第 6 期，第 466－468 页.

Contents

目　录*

第一章　基本不等式

---

* 为读者阅读方便,目录包含按笔画排列的主题与作者索引