普通高等教育“十三五”规划教材

高等代数

主　编　唐再良
副主编　赵甫荣　江跃勇　万吉湘　唐天国

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育“十三五”规划教材

高等代数

主　编　唐再良

副主编　赵甫荣　江跃勇　万吉湘　唐天国

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是四川省高等教育质量工程教改课题《突出探索再现 挖掘课程文化 注重前沿应用——代数学课程内容调整充实的探索与实践》的主要成果之一。在编写过程中，作者结合近40年的教学经验和教研成果，吸取了国内外教学、科研前沿成果和教材编写的成功做法，并经过多次试用修改。本书内容选取和编写理念突出学科应用和信息前沿特色，知识模块设计上兼顾科学性、工具性和系统性，知识呈现上注重数学思维与学生认知特点的有机结合，便于教师选用和读者自学。

本书共9章：加减消元法与行列式、方程组解的算法与矩阵、高次方程与多项式、方程组的解与n维向量空间、代数系统与向量空间、相似矩阵与线性变换、几何空间与度量空间、二次型与双线性函数、多项式矩阵与约当型，其中带有“*”的章节可作为选学内容。

本书既可作为数学与应用数学等相关专业本专科“高等代数”或“线性代数”课程的教材，也可作为广大数学爱好者及相关专业学生自学或考研的参考读物。

图书在版编目（CIP）数据

高等代数 / 唐再良主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2016.8
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-5170-4540-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①唐… Ⅲ. ①高等代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第162456号

策划编辑：寇文杰　责任编辑：张玉玲　加工编辑：张天娇　封面设计：李　佳

书　名	普通高等教育“十三五”规划教材 **高等代数**
作　者	主　编　唐再良 副主编　赵甫荣　江跃勇　万吉湘　唐天国
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	虎彩印艺股份有限公司
规　格	170mm×227mm　16开本　31.5印张　653千字
版　次	2016年8月第1版　2016年8月第1次印刷
印　数	001—700册
定　价	59.00元

前　言

高等代数是数学与应用数学专业一门重要的专业基础课程。多年来，一些专家学者和教师，结合自己的研究成果和教学经验，编写出版了不同版本的优秀教材。随着高等教育改革的深入，近年来一些教材又进行了修订再版，也有一些教师探索编写了创新性教材，但这些教材仍然存在需要进一步探索完善的情况：第一，新知识、新方法、新思想、新应用等不断涌现，但这些内容在现有教材中没有得到很好地体现；第二，高等代数的方法和思想在现代科技和日常生活中的应用日益广泛，而现有教材基本上都是从理论到理论，对高等代数知识的应用介绍太少，加之高等代数本身的抽象性，使得学生对学了高等代数有什么用处感到茫然，进而影响学习质量；第三，随着高等教育专业调整与改革的不断深入，专业的综合性越来越强，例如过去的数学或数学教育专业主要的培养目标是师范生，而现在普遍调整为数学与应用数学专业，培养目标已远不止师范生，但现有教材基本上还是原来的体系和结构，不仅内容安排是以师范生为目标，而且局限于高等代数学科之内；第四，现有高等代数教材在编写理念上对知识的系统性和数学思维的特点考虑比较充分，但对刚入校的大一学生的认知特点考虑不够，致使学生普遍反映教材看不懂，影响教学效果，不少师生反映在后继课程要用到高等代数的知识时，还得重新补课。

本教材是四川省高等教育质量工程教改课题《突出探索再现 挖掘课程文化 注重前沿应用——代数学课程内容调整充实的探索与实践》的研究成果之一，在全书构架和编写过程中，既融合了课题的研究成果，又吸取借鉴了国内外教材编写的成功做法。为了力图弥补现有教材在以上方面的不足，编者在以下几个方面进行了尝试和探索：将算法知识等内容引入课程；介绍高等代数知识在现代科技与生活中的应用实现案例；将知识在生活、生产、科技等实际问题中的具体背景再现出来，改变知识呈现载体和方式，解决教师备课难、学生学习难和内容枯燥抽象的问题。

按照“问题是数学的生命”的理念，根据高等代数课程的特点、功能、发展趋势及其在数学、经济、科技等不同领域的应用情况和培养目标的要求，在编写过程中，以解方程为主线，按照“问题－探究－解决－应用－问题”的形式进行呈现，重新调整了内容结构模块，同时每个模块后设计了具有一定梯度和应用背景的习题，每章配有总习题，题目大部分选自近年各高校研究生入学考试题，便于教师选用和不同层次学生自学。

根据高等教育专业综合性越来越强、培养目标社会适应面越来越广和学生数学素养和知识基础参差不齐的发展特点，在编写过程中，坚持了教材知识的科学性、工具性、实用性相统一的原则，内容选取基本涵盖课程教学大纲和现有教材

全部内容，体现了适应不同层次学生学习选取以及不同培养目标需要的开放兼容的新型课程体系理念。遵循高等教育规律，在课程内容的安排上，特别注重了新体例选取和方便教师教学、学生自学或选学，且不失课程本身科学性等特点的体现；在内容设计上，精选对相关专业人才培养有重要价值的应用案例，同时将高等代数的前沿知识、最新研究成果等进行适当的介绍。

本教材由从事高校数学教学近40年并负责“高等代数”精品课程的唐再良教授任主编，负责全书构架、提纲拟定和统稿。具体编写分工如下：第1章、第2章由南充职业技术学院唐天国老师编写，第3～5章由绵阳师范学院万吉湘老师编写，第6章、第7章由绵阳师范学院江跃勇副教授编写，第8章、第9章由绵阳师范学院赵甫荣副教授编写。中国科学院王明生研究员对教材内容进行了全面审查，并提出了许多宝贵建议，加拿大滑铁卢大学蒋绍全教授为教材的编写思路和体例提供了很多帮助，另外本书还借鉴了国内外专家学者的论著或教材内容，由于涉及文献较多，书后未能一一列出，敬请谅解。

由于编写时间仓促，加之一些编写构想还是一种尝试探索，书中挂一漏万在所难免，恳请读者和同行批评指正，以便在再版中进一步修改完善。

编　者

2016年7月

目　　录

第 1 章　加减消元法与行列式

在我们的世界里，“未知”可以说无处不在．这些“未知”中，有些是由于人类智慧和认识的限制所致，有些也许是永恒之谜，它们就像地球上人迹罕至的高山雪域一样，吸引着人们一次次去攀登探险，把未至（未知）变成已至（已知）．在数学中，形形色色的方程无疑是最为简明的“未知”的表示方式．方程与现实生活密切相关，“已知”和“未知”的关系也很复杂，其中最简单的就是一次关系即线性关系．下面我们来看关于营养食谱问题的一个例子：

一个饮食专家计划一份膳食，提供一定量的维生素 C、钙和镁．其中用到 3 种食物，它们的质量用适当的单位计量．这些食品提供的营养以及食谱需要的营养由表 1-1 给出．

表 1-1　营养食谱问题

营养	单位食谱所含的营养（毫克）			需要的营养总量（毫克）
	食物 1	食物 2	食物 3	
维生素 C	10	20	20	100
钙	50	40	10	300
镁	30	10	40	200

设 x_1, x_2, x_3 分别表示这 3 种食物的量，根据表 1-1 中的数据，可得线性方程组

$$\begin{cases}10x_1+20x_2+20x_3=100\\50x_1+40x_2+10x_3=300\\30x_1+10x_2+40x_3=200\end{cases}.$$

这是一个含有 3 个方程 3 个未知数的方程组，我们已熟悉，可用加减消元法求解．但在实际中遇到的问题，即使是线性关系，但其未知量和方程的个数远不止 3 个．问题常常被转化为一个 n 个未知量 n 个方程构成的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{1-1}$$

的求解问题．这类方程组如何求解？本章将从加减消元法入手，引入**行列式**这一工具来讨论这个问题．

1.1 加减消元法与二、三阶行列式

我们来分析用加减消元法解二元一次方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$的过程：

由（1）$\times a_{22}$可得：

$$a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}.$$

由（2）$\times a_{12}$可得：

$$a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12}.$$

两式相减，消去x_2可得：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\ x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

类似地，消去x_1可得：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\ x_2 = b_2a_{11} - a_{21}b_1.$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，原方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

其中，$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$由方程组未知数的四个系数确定.

若记 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = D$，$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2 = D_1$，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21} = D_2.$$

其中D_1和D_2分别是将D的第一列和第二列用方程组右端的常数列替代后得到的.

则当$D \neq 0$时，原方程的唯一解为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \tag{1-2}$$

类似地，对于三元一次方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$有同样的结果：

当$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$时，原方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}. \tag{1-3}$$

其中 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

对于方程组（1-1）是否也有同样的结果？如果是的话，即：

当 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，方程组（1-1）有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}. \tag{1-4}$$

其中：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \cdots,\ D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$（*）称为行列式．那么在这种情况下，方程组（1-1）的求解问题就转化为行列式的计算问题了．

行列式（*）如何计算？为了讨论方便，我们先引入二、三阶行列式的概念：

定义 1-1 符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为**二阶行列式**，它代表 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 这一算式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1-5}$$

它是由两行两列的 $2\times 2=2^2=4$ 个数组成，其中 a_{ij}（$i=1,2$； $j=1,2$）称为这个行列式的**元素**，第一个下标 i 代表 a_{ij} 所在的行号，称为元素 a_{ij} 的**行标**，表明该元素位于行列式的第 i 行；第二个下标 j 代表 a_{ij} 所在的列号，称为元素 a_{ij} 的**列标**，表明该元素位于行列式的第 j 列．也可以称 a_{ij} 为行列式的 $\boldsymbol{(i,j)}$ **元**，如 a_{12} 表示该行列式中位于第1行、第2列位置的元素或称 a_{12} 为该行列式的 $(1,2)$ 元．

式（1-5）可以使用对角线法则来记忆（如图 1-1 所示）：若把 a_{11} 到 a_{22} 的实联线称为主对角线，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚联线称为副对角线，则式（1-5）左端的二阶行列式可由式（1-5）右端的算式计算，它是该行列式主对角线元素之积减去副对角线元素之积所得之差．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1-1

式（1-5）右端通常称为其左端对应的**二阶行列式的展开式**.

例 1-1 求解二元一次方程组

$$\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x+2y=5 \\ x+(\sqrt{2}+1)y=-1 \end{cases}.$$

解 由于：

$$D=\begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & 2 \\ 1 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix}=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)-2\times 1=-1\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix}=5(\sqrt{2}+1)-2\times(-1)=7+5\sqrt{2},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=(\sqrt{2}-1)\times(-1)-5\times 1=-4-\sqrt{2},$$

故由（1-2）可得所求方程组的唯一解为：

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{7+5\sqrt{2}}{-1}=-7-5\sqrt{2},\quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{-4-\sqrt{2}}{-1}=4+\sqrt{2}.$$

类似地，我们可以引入三阶行列式的概念：

定义 1-2 符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为**三阶行列式**，记为 D，它代表

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

这一算式，即

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (1\text{-}6)$$

它是由三行三列的 $3\times 3=3^2=9$ 个元素组成，关于三阶行列式其他相关概念，与二阶行列式类似，不再重述.

为了揭示式（1-6）右端的算式与左端的行列式元素的关系，类似于图 1-1，我们画出如图 1-2 所示的图形.

其中从左上角到右下角这条对角线称为**主对角线**，从右上角到左下角这条对角线称为**副对角线**，可以看出，对于式（1-6）右端的 6 项，其左端行列式主对角线上元素的乘积项和位于主对角线的平行线上的元素与对角上的元素的乘积项（要求这些作为乘积因子的元素都位于不同行和不同列），前面都取正号（如图 1-2 中的实连线所示）；其左端行列式副对角线上元素的乘积项和位于副对角线的平行线上的元素与对角上的元素的乘积项（要求这些作为乘积因子的元素都位于不同

行和不同列)，前面都取负号（如图 1-2 中的虚连线所示).

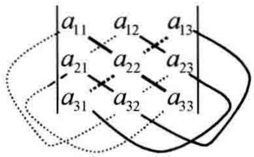

图 1-2

这种计算三阶行列式的方法同样称为对角线法则，它与计算二阶行列式的对角线法则显然是一致的.

式（1-6）右端同样称为其左端对应的**三阶行列式的展开式**.

例 1-2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}4 & -2 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}.$$

解 根据对角线法则：

$$\begin{aligned}D&=4\times3\times2+(-2)\times(-1)\times3+1\times0\times4\\&\quad-1\times3\times3-(-2)\times0\times2-4\times(-1)\times4\\&=24+6+0-9-0-(-16)=37\,.\end{aligned}$$

例 1-3 求解方程

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ 1 & -3 & 9\\ 1 & x & x^2\end{vmatrix}=0\,.$$

解 用对角线法则计算方程左端的行列式，原方程变为：

$$-3x^2-18+4x-(-12)-(-2x^2)-9x=-x^2-5x-6=0\,,$$

从而解得 $x=-3$ 或 $x=-2$.

根据二阶与三阶行列式的定义，能否把行列式的概念推广到四阶、五阶以至 n 阶呢？为此，我们来观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

的展开式

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1-7}$$

中每一项的构成规律.

首先注意到其中每一项均为 3 个元素的乘积 $a_{1i}a_{2j}a_{3k}$ ，并带有一个正号或负号. 这 3 个元素的第一个下标依次为 $1,2,3$ ，这说明 $a_{1i}a_{2j}a_{3k}$ 是行列式每一行各取

一个元素相乘的结果．由于数的乘法满足交换律，所以这里 3 个元素按行的自然顺序（从小到大）排列，这样我们只需将注意力集中在第二个下标 i,j,k 的变化上．下面写出式（1-7）6 项中第二个下标的排列：

$$(123),\ (231),\ (312), \tag{1-8}$$

$$(321),\ (213),\ (132). \tag{1-9}$$

它们恰好是 $1,2,3$ 的全排列．这说明每一项在 3 个行中所取的元素是来自于 3 个不同的列，也就是说，各项的乘积是由每一行每一列各取一个且仅取一个元素相乘得到的．对于 $1,2,3$ 全排列的每一项，对应一个乘积 $a_{1i}a_{2j}a_{3k}$，而 $1,2,3$ 一共有 6 个全排列，所以式（1-7）一共有 6 项．

其次分析式（1-7）各项所带的符号．由于各项的第一个下标都按自然顺序排列，所以各项所带的符号仅与第二个下标的排列有关．为了说明其中的关系，这就有必要了解有关排列的一些基本知识．

习题 1-1

1．利用对角线法则计算下列三阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$．

2．用二、三阶行列式解下列方程组：

（1）$\begin{cases} \sqrt{2}x-(\sqrt{5}-1)y=2-\sqrt{3} \\ (\sqrt{5}+1)x+\sqrt{3}y=2+\sqrt{3} \end{cases}$；　　（2）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1+2x_2+3x_3=14 \\ x_1+4x_2+9x_3=36 \end{cases}$．

3．用加减消元和行列式两种方法解方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ -2x_1+x_2-x_3=-3 \\ x_1-4x_2+2x_3=-5 \end{cases}$．

1.2　*n* 元排列

排列组合是组合数学的主要内容之一，而组合数学已成为信息时代的数学．它不仅在计算机科学领域有着广泛应用，而且在其他科学技术、日常生活、数学学

科的其他分支都有着重要的应用. 在这一节里，我们将对排列的一些简单知识作一个简要介绍.

定义 1-3 由$1,2,\cdots,n$组成的一个有序数组 $j_1j_2\cdots j_n$ 称为一个 ***n* 元排列**，记为 $j_1j_2\cdots j_n$.

例如，23145 就是一个 5 元排列，461325 就是一个 6 元排列. 我们知道，所有不同的 n 元排列的总数为$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots2\cdot1=n!$种. 例如，不同的 3 元排列共有 3！=6 种，不同的 7 元排列共有 7！=5040 种.

显然，排列$1,2,\cdots,n$也是一个 n 级排列，它具有递增的特点，并按自然顺序排列而成，我们称其为**自然排列**. 例如，一个 7 元自然排列就为 1234567. 而类似 7 元排列 7645132 等一类排列，它们都或多或少出现 7 与 6、6 与 4 等这样大数排在小数前面而破坏自然顺序的一对数. 此时，我们称这样的一对数构成一个**逆序**. 于是我们有：

定义 1-4 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个**逆序**（或**反序**），一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**，排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

常用以下方法计算这个排列的逆序数 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ ：先数排在 1 前面比 1 大的数码的个数，记为 m_1 ，然后把 1 划去；再数排在 2 前面比 2 大的数码的个数，记为 m_2 ，然后把 2 划去；如此继续下去，最后设排在 n 前面比 n 大的数码的个数为 m_n （显然 $m_n=0$ ）. 那么，这个排列的逆序数就是 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ ，即：

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=m_1+m_2+\cdots+m_n .$$

例 1-4 确定下列排列中反序的数目：

（1）81325764；

（2）$2,4,6,8,\cdots,2n,1,3,5,\cdots,2n-1$.

解 （1） $\tau(81325764)=1+2+1+4+1+2+1=12$ ；

（2） $\tau(246\cdots(2n))135\cdots(2n-1))=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

例 1-5 设 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的反序数是 k ，求排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的反序数.

解 因为 $n(n-1)\cdots21$ 的反序数为 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ，所以，若 $i_1i_2\cdots i_n$ 的反序数是 k ，则

$$\tau(i_ni_{n-1}\cdots i_1)+\tau(i_1i_2\cdots i_n)=\tau(i_ni_{n-1}\cdots i_1)+k=\frac{n(n-1)}{2} .$$

因此，排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的反序数为 $\dfrac{n(n-1)}{2}-k$.

定义 1-5 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.
例如，3241 是偶排列；561324 是奇排列；$12\cdots n$ 的逆序数为零，因而是偶排列.

定义 1-6 把一个排列中某两个数的位置互换，其余的数的位置不动，就得到另一个排列，这样一个变换称为一个**对换**. 特别地，把相邻两个元素对换，叫做