

灰色系统丛书

刘思峰 主编

# 灰色运算基础与 灰色投入产出分析

李桥兴 著



科学出版社

灰色系统丛书

刘思峰 主编

# 灰色运算基础与 灰色投入产出分析

李桥兴 著

国家自然科学基金项目（71173106）：区域主导产业发展的高能效实现机制研究

中国博士后科学基金第二批特别资助项目（200902321）：灰色投入产出模型的覆盖解研究

中国博士后科学基金（20080430822）：灰色数学基础的理论和应用研究

贵州大学文科重点学科及特色学科重大科研项目（GDZT201604）：基于大数据视域的不确定系统理论比较研究及应用

江苏省教育厅高校哲学社会科学研究重点项目（2011ZDIXM057）：加快推进江苏创新发展的战略设计与突破口选择

江苏大学高级技术人才项目（13JDG124）：区域战略性新兴产业发展的市场环境培育问题研究

资助

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书通过建立灰色运算方法创新不确定投入产出分析技术。全书共分两个部分：第一篇包括第1章至第3章，建立灰色运算基础，提出灰色运算的概念体系和覆盖计算方法；第二篇包括第4章至第13章，建立灰色投入产出分析方法体系，提出包括全国价值型、全国实物型、动态型、部门型、企业型、地区和地区间型、投入占用产出型、固定资产型和非线性型等灰色模型并给出各灰色模型及灰色系数的覆盖计算公式。全书采用若干算例和模拟案例说明灰色运算的可靠性和灰色模型的计算有效性，是作者十余年来关于灰色系统理论数学基础和不确定型投入产出分析研究的总结。

本书可作为管理科学与工程、应用经济学、系统科学、控制科学与工程和数学等学科领域的高校教师、研究生和高年级本科生的教学和科研参考用书，也可以用作政府部门和企事业单位等相关人员的分析工具。

---

### 图书在版编目 ( CIP ) 数据

灰色运算基础与灰色投入产出分析/李桥兴著. —北京：科学出版社，2017.2

（灰色系统丛书）

ISBN 978-7-03-051294-9

I. ①灰… II. ①李… III. ①灰色系统理论 IV. ①N941.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 319411 号

---

责任编辑：方小丽 李 莉 陶 璇 / 责任校对：王 瑞

责任印制：徐晓晨 / 封面设计：无极书装

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2017 年 2 月 第 一 版 开本：720×1000 1/16

2017 年 2 月 第一次印刷 印张：11 3/4

字数：240 000

定价：72.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

## 丛 书 序

灰色系统理论是 1982 年中国学者邓聚龙教授创立的一门以“小数据, 贫信息”不确定性系统为研究对象的新学说。新生事物往往对年轻人有较大吸引力, 在灰色系统研究者中, 青年学者所占比例较大。虽然随着这一新理论日益被社会广泛接受, 一大批灰色系统研究者获得了国家和省部级科研基金的资助, 但在各个时期仍有不少对灰色系统研究有兴趣的新人暂时缺乏经费支持。因此, 中国高等科学技术中心(China Center of Advanced Science and Technology, CCAST)的长期持续支持对于一门成长中的新学科无疑是雪中送炭。学术因争辩而产生共鸣。热烈的交流、研讨碰撞出思想的火花, 促进灰色系统研究工作不断取得新的进展和突破。

由科学出版社推出的这套“灰色系统丛书”, 包括灰色系统的理论、方法研究及其在医学、水文、人口、资源、环境、经济预测、作物栽培、复杂装备研制、电子信息装备试验、空管系统安全监测与预警、冰凌灾害预测分析、宏观经济投入产出分析、农村经济系统分析、粮食生产与粮食安全、食品安全风险评估及预警、创新管理、能源政策、联网审计等众多领域的成功应用, 是近 10 年来灰色系统理论研究和应用创新成果的集中展示。

CCAST 是著名科学家李政道先生在世界实验室、中国科学院和国家自然科学基金委员会等部门支持下创办的学术机构, 旨在为中国学者创造一个具有世界水平的宽松环境, 促进国内外研究机构和科学家之间的交流与合作; 支持国内科学家不受干扰地进行前沿性的基础研究和探索, 让他们能够在国内做出具有世界水平的研究成果。近 30 年来, CCAST 每年都支持数十次学术活动, 参加活动的科学家数以万计, 用很少的钱办成了促进中国创新发展的大事。CCAST(特别是学术主任叶铭汉院士)对灰色系统学术会议的持续支持, 极大地促进了灰色系统理论这门中国原创新兴学科的快速成长。经过 30 多年的发展, 灰色系统理论已被全球学术界所认识和接受。多种不同语种的灰色系统理论学术著作相继出版, 全世界有数千种学术期刊接收、刊登灰色系统论文, 其中包括各个科学领域的国际顶级期刊。

2005 年, 经中国科学技术协会(以下简称中国科协)和中华人民共和国民政部批准, 中国优选法统筹法与经济数学研究会成立了灰色系统专业委员会, 挂靠南京航空航天大学。国家自然科学基金委员会、CCAST、南京航空航天大学和上海市浦东新区教育学会对灰色系统学术活动给予大力支持。2007 年, 全球最大的学

术组织 IEEE 总部批准成立 IEEE SMC 灰色系统委员会，在南京航空航天大学举办了首届 IEEE 灰色系统与智能服务国际会议 (GSIS)。2009 年和 2011 年，南京航空航天大学承办了第二届、第三届 IEEE GSIS。2013 年，在澳门大学召开的第四届 IEEE GSIS 得到澳门特别行政区政府资助。2015 年，在英国 De Montfort 大学召开的第五届 IEEE GSIS 得到欧盟资助。2017 年 7 月，第六届 IEEE GSIS 将在瑞典斯德哥尔摩大学举办。

在南京航空航天大学，灰色系统理论已成为经济管理类本科生、硕士生、博士生的一门重要课程，并为全校各专业学生开设了选修课。2008 年，灰色系统理论入选国家精品课程；2013 年，又被遴选为国家精品资源共享课程，成为向所有灰色系统爱好者免费开放的学习资源。

2013 年，笔者与英国 De Montfort 大学杨英杰教授合作，向欧盟委员会提交的题为 Grey Systems and Its Application to Data Mining and Decision Support 的研究计划，以优等评价入选欧盟第 7 研究框架“玛丽·居里国际人才引进行动计划” (Marie Curie International Incoming Fellowships, PEOPLE-IIF-GA-2013-629051)。2014 年，由英国、中国、美国、加拿大等国学者联合申报的英国 Leverhulme Trust 项目以及 26 个欧盟成员国与中国学者联合申报的欧盟 Horizon 2020 研究框架计划项目相继获得资助。2015 年，由中国、英国、美国、加拿大、西班牙、罗马尼亚等国学者共同发起成立了“国际灰色系统与不确定性分析学会” (International Association of Grey Systems and Uncertainty Analysis)。

灰色系统理论作为一门新兴学科已以其强大的生命力自立于科学之林。

这套“灰色系统丛书”将成为灰色系统理论发展史上的一座里程碑。它的出版必将有力地推动灰色系统理论这门新学科的发展和传播，促进其在重大工程领域的实际应用，促进我国相关科学领域的发展。

刘思峰

南京航空航天大学和英国 De Montfort 大学特聘教授  
欧盟玛丽·居里国际人才引进行动计划 Fellow (Senior)  
国际灰色系统与不确定性分析学会主席

2015 年 12 月

## 前 言

20 世纪是系统科学蓬勃发展的时代,而 21 世纪则被英国著名物理学家霍金称为“复杂性科学的世纪”。复杂性科学不仅带来自然科学界的变革,并且渗透到哲学和社会科学等领域。在复杂性科学的大家族里,概率论、模糊系统理论、粗糙集理论、灰色系统理论和未确知数学等被人们归为不确定系统科学,为人们从不同角度认识和改造现实世界中的经济、社会等复杂系统提供了理论和方法工具。在不确定系统理论体系中,灰色系统理论与概率论、模糊系统理论和粗糙集理论等是学者常用的科学研究理论工具,并称为四种不确定系统科学方法论。然而,作为一种新兴的应用方法论,灰色系统理论在很多基本科学问题上还不够完善甚至存在争议,如灰色哲学体系、灰色运算方法体系和灰色技术方法体系等。本书首先着眼于灰色系统理论的数学基础——灰色运算体系,在邓聚龙教授关于灰色系统理论基本观点的基础上,系统定义了灰色朦胧集、灰数、灰色矩阵和灰色函数等基本概念,并提出了灰色运算的概念体系和基本原理。同时,本书在论述灰色运算体系的过程中,间或从哲学角度阐述了灰色系统理论的若干认识论观点。

社会科学在人们改造客观世界的过程中具有不可或缺的作用,是科学研究的重要组成部分。目前,学术界已经出现了众多的经济系统研究方法,其中多元统计方法、博弈论和投入产出技术等是当代主流的经济学研究工具。本书基于现实经济系统是复杂系统的事实,结合灰色系统理论提出灰色投入产出分析技术研究。投入产出分析是用来研究国民经济综合平衡和经济预测的管理科学方法,反映经济系统各部分(如各部门、行业、产品)的投入与产出之间的数量依存关系,并用于经济分析、政策模拟、经济预测、计划制定和经济控制等。随着社会化生产的高度发展和市场竞争的不断加剧,影响国民经济系统的各种不确定性因素也变得相当复杂,因此研究不确定性投入产出分析方法成为理论工作者和实际管理者的关注热点和迫切需要。借助于其他不确定系统科学方法论,人们相继研究了随机类型、模糊类型和区间类型的投入产出分析技术体系。

面对高度复杂的经济系统,人们获取信息的能力总是有限的,因而经济系统就常常表现为贫信息特征。在贫信息条件下,人们获取经济系统各部分的投入值和产出值等统计数据常常是不精确的,并且统计数据的随机特征和模糊特征等往往也难于把握。这些带有贫信息特征的统计数据被灰色系统理论称为灰数。在实际应用中,基于复杂经济系统具有贫信息特征这样一个基本事实,人们致力于改进和完善调查统计的工具和手段,力求得到一个偏差尽可能小的数据范围

(常用区间表示),使灰色投入/产出数据的真实值包含在这个数据范围之内。灰色系统理论把这个包含数据真实值的范围称为灰色统计数据的数值覆盖集(简称覆盖集)。

灰色投入产出分析就是指采用复杂经济系统各部分的投入/产出的灰色数据及其覆盖集制成投入产出表、建立模型并进行应用,从而对经济系统做出有效的分析、预测和控制等。对灰色模型进行求解是采用灰色投入产出分析方法的关键,成为科研工作人员和实际应用者亟待解决的理论问题。根据本书提出的灰色运算方法,作者给出了投入产出分析技术体系中各种灰色模型的计算公式,使人们在获取灰色统计数据覆盖集并满足一定精度条件的情况下,能采用灰色投入产出分析方法对复杂经济系统做出有效的分析、预测和控制等管理活动,降低数据统计工作的调研成本,提高人们对经济系统的抗风险能力。由于灰色投入/产出数据的覆盖集不需要知道数据的随机特征或模糊特征,加上区间类型投入产出模型常常具有不可求解的特征,因而灰色投入产出分析方法具有比随机类型、模糊类型和区间类型投入产出分析方法更好的理论意义和实际应用价值。

本书是作者十余年的工作总结。鉴于作者的能力有限,书中疏漏之处在所难免,欢迎科研工作者、管理者和技术人员批评指正。

李桥兴

2016年11月于贵阳花溪

# 目 录

## 第一篇 灰色运算基础

第 1 章 引论	3
1.1 引言	3
1.2 基础数学知识	6
1.3 灰色系统理论简介	8
第 2 章 灰色运算的基本理论	17
2.1 灰色朦胧集	17
2.2 灰数及其运算	20
2.3 灰色矩阵及其运算	28
2.4 灰色函数及其运算	36
2.5 灰元及其运算	39
第 3 章 覆盖运算与区间运算探析	40
3.1 区间数简介	40
3.2 区间矩阵简介	42

## 第二篇 灰色投入产出分析

第 4 章 确定型投入产出分析简介	47
4.1 全国价值型投入产出分析	47
4.2 全国实物型投入产出分析	48
4.3 动态投入产出分析	50
4.4 部门投入产出分析	51
4.5 投入占用产出分析	53
4.6 企业投入产出分析	54
4.7 固定资产投资投入产出分析	56
4.8 地区和地区间投入产出分析	62
4.9 非线性投入产出分析	67
4.10 不确定投入产出分析研究概况及发展趋势分析	70



<b>第 5 章</b>	<b>全国价值型灰色投入产出分析</b>	72
5.1	全国价值型灰色投入产出表	72
5.2	全国价值型灰色投入产出模型	73
5.3	灰色系数及其覆盖计算公式	73
5.4	灰色模型算法步骤	78
5.5	灰色模型简例	78
<b>第 6 章</b>	<b>全国实物型灰色投入产出分析</b>	81
6.1	全国实物型灰色投入产出表	81
6.2	全国实物型灰色投入产出模型	82
6.3	灰色系数及其覆盖计算公式	83
6.4	灰色模型解公式	85
6.5	灰色模型算法步骤	87
6.6	灰色模型简例	88
<b>第 7 章</b>	<b>灰色动态投入产出分析</b>	90
7.1	灰色动态投入产出模型	90
7.2	灰色系数及其覆盖计算公式	91
7.3	灰色动态投入产出模型解公式	92
7.4	灰色模型算法步骤	97
7.5	灰色模型简例	97
<b>第 8 章</b>	<b>灰色部门投入产出分析</b>	100
8.1	灰色部门投入产出表	100
8.2	灰色部门投入产出模型	102
8.3	灰色系数及其覆盖计算公式	103
8.4	灰色模型算法步骤	105
8.5	灰色模型简例	105
<b>第 9 章</b>	<b>灰色投入占用产出分析</b>	107
9.1	灰色投入占用产出表	107
9.2	灰色投入占用产出模型	108
9.3	灰色系数及其覆盖计算公式	109
9.4	灰色模型算法步骤	111
<b>第 10 章</b>	<b>灰色企业投入产出分析</b>	112
10.1	价值型灰色企业投入产出分析	112
10.2	实物型灰色企业投入产出分析	115
10.3	灰色模型算法步骤	118

---

10.4	灰色模型简例	119
<b>第 11 章</b>	<b>固定资产灰色投入产出分析</b>	<b>123</b>
11.1	固定资产灰色投入产出占用分析	123
11.2	固定资产灰色投入产出投资分析	129
11.3	灰色模型简例	134
<b>第 12 章</b>	<b>灰色地区和地区间投入产出分析</b>	<b>138</b>
12.1	灰色地区投入产出分析	138
12.2	灰色地区间投入产出分析	146
<b>第 13 章</b>	<b>灰色非线性投入产出分析</b>	<b>154</b>
13.1	灰色非线性投入产出模型	154
13.2	灰色模型算法步骤	159
	参考文献	161
	附录 1 名词术语中英文对照	165
	附录 2 Matlab 程序	167

# 第一篇 灰色运算基础

复杂性科学是系统科学发展的新阶段，也是当代科学发展的前沿领域之一。英国著名理论物理学家霍金曾预言“21世纪是复杂性科学的世纪”。复杂性科学的发展，不仅引发了自然科学界的变革，而且也日益渗透到哲学和人文社会科学领域。复杂性科学的理论方法为人类发展提供了一种新思路、新方法和新途径。不确定系统理论是系统科学/复杂性科学学科群的重要分支，在自然科学和人文社会科学等领域有广泛的应用背景和实践价值。在不确定系统理论体系中，概率论、模糊系统理论、粗糙集理论和灰色系统理论等是学者常用的科学研究工具，并称为四种不确定系统科学方法论。

学科的发展历程告诉人们：每一门学科在建立起较完善的学科内容体系之前，都经历了一个较漫长的历史发展过程。例如，概率论经过了500多年的发展，迄今已建立起一门完善的科学体系，其数学基础已经成为数学的一门分支学科，其研究方法(数理统计方法)已经被各领域的专家学者所广泛应用。模糊系统理论在创立之初曾被很多学者(包括国际著名学者)所排斥，但目前也逐渐发展成为一门较成熟的学科体系并开始被学者广泛接受，其多种专业学术期刊如 *Fuzzy Sets and Systems* 等成为 SCI 检索源期刊。粗糙集理论和灰色系统理论在经过近五十年的发展历程之后，也已经初步建立成一门具有较完善内容体系的学科，且逐渐被广大学者接受并应用于各领域的研究工作。然而，作为新兴的不确定系统科学方法论，灰色系统理论相对于其他不确定学科理论而言，还有很多内容不够完善或还存在争议。例如，灰色系统理论的哲学基础目前还不完善；灰色系统理论的数学基础还有争议，等等。这些内容需要广大的学者去深入研究，同时建立一门科学和完善的学科体系也需要学者的长期努力。

本书作者在学习灰色系统理论创立者邓聚龙教授和其他专家学者如刘思峰教授、张岐山教授、王清印教授和罗党教授等相关成果的基础上，经过了十余年的不断探索和努力，初步提出灰色系统理论的哲学体系和数学运算体系，同时也首次提出灰色系统理论的研究对象、研究内容和研究方法等。以上成果将在本书第一篇进行系统介绍。



# 第1章 引 论

## 1.1 引 言

从16世纪意大利的学者研究掷骰子开始,到19世纪末人们探索随机过程,一大批数学家如B. 帕斯卡、P. de 费马、C. 惠更斯、J. 伯努利、A. de 棣莫弗、P. S. 拉普拉斯、P. L. 切比雪夫、A. A. 马尔可夫和A. M. 李雅普诺夫等付出了艰辛的努力。另一方面,18世纪中叶出现的热力学第二定律又促使人们认真思考和总结随机不确定现象的规律。经过学者五个世纪多的辛勤工作,第一门研究不确定现象规律的学科——概率论(Probability Theory)终于建立起来了。其后随着工业化的发展和经济与社会活动在世界范围内涌动,人们探索世界的方式也开始从只关注事物本身,逐渐过渡到通过外部环境获取信息来认识事物并企图达到分析、预测和控制事物本身以及外部环境发展变化的目的,因此诞生了系统论、信息论和控制论。错综复杂的经济和社会环境产生了许多复杂的科学问题,也催生了系统科学学科群的蓬勃发展,使人们对自然界和客观事物演化规律的认识逐步深化。由于外部环境的复杂性和信息获取能力的局限性,人们在认识和改造客观世界的过程中又相继发现了与随机问题不同的其他类型的不确定现象,并分别提出了解决相应不确定问题的其他类型的不确定系统科学方法论。它们分别是美国学者扎德(L. A. Zadeh)教授创立的模糊系统理论(Fuzzy Sets Theory)、荷兰学者帕拉克(Z. Pawlak)教授创立的粗糙集理论(Rough Sets Theory)、中国学者邓聚龙教授创立的灰色系统理论(Grey Systems Theory)和中国学者王光远教授创立的未确知数学理论(Unascertained Mathematics Theory)等。不确定系统科学方法论成为系统科学(复杂性科学)的重要组成部分。

科学发展历程告诉人们,20世纪是系统科学蓬勃发展的时代。复杂性科学作为系统科学发展的新阶段,兴起于20世纪80年代,是当代科学发展的前沿领域之一。复杂性科学不仅带来自然科学界的变革,并且渗透到哲学和社会科学等领域。英国著名物理学家霍金称“21世纪是复杂性科学的世纪”。复杂性科学为人类从不同角度认识和改造现实世界中的经济、社会等复杂系统提供了理论和方法工具。在不确定系统理论体系中,灰色系统理论与概率论、模糊系统理论和粗糙集理论等是学者常用的科学研究工具,并称为四种不确定系统科学方法论。然而,后三种理论在创立之初,都不同程度地经历了曲折的发展历程,如模糊系统理论曾长期

受到很多学者的质疑。他们认为有了概率论这个强大的工具,可以不需要模糊系统理论。粗糙集理论在 Pawlak 教授提出之后,有很长一段时间没有受到学者的关注。灰色系统理论在发展过程中,也同样遭受到了学者的质疑。

1982年,中国学者邓聚龙教授在 *Systems & Control Letters* 发表的论文 *The Control Problems of Grey Systems*, 标志着灰色系统理论这一新学科开始问世。灰色系统理论刚一诞生,就受到国际学术界特别是中国学者和广大实践工作者的积极支持。很多学者以极大的热情开展理论探索并在不同领域进行应用研究。然而中国学者陈俊珍于 1988 年和 1989 年在中国著名学术期刊《系统工程理论与实践》上分别连续发表两篇批评性文章以后,灰色系统理论开始在随后的二十年时间里不断地被一些学者非议和质疑,并导致早期的一些学者退出了灰色系统理论研究队伍。尽管灰色系统理论一直受到学术界不少学者的批评,但是也有部分学者如刘思峰、张岐山、肖新平和温坤礼(中国台湾)等一直坚持该理论的研究工作,并在各自单位的支持下招收研究生,培养新的研究力量。正是这些学者的坚持和新生力量的加入,推动了灰色系统理论的持续成长。经过三十多年的发展,灰色系统理论已经初步建立起学科的理论体系,在众多领域得到较成功的应用,赢得国际学术界的广泛肯定和关注。中国内地、英国、美国、德国、日本、澳大利亚、加拿大、俄罗斯、中国台湾、中国香港等国家和地区的众多学者从事灰色系统理论的研究和应用。1989 年在英国创办的英文版国际学术刊物 *The Journal of Grey System* 已成为《英国科学文摘》(SA)、《美国数学评论》(MR)、《德国数学文摘》(MA)和美国《科学引文索引数据库》(SCI)等重要国际文摘机构的核心期刊。台湾的英文版期刊 *Journal of Grey System* 也得到学者的密切关注和热心支持。著名的国际图书出版商 Emerald Group Publishing Limited 在 2010 年创办了灰色系统学术期刊 *Grey Systems: Theory and Application*。国际学术界有 1000 余种学术期刊接受和刊登灰色系统论文,如 *Applied Mathematical Modelling*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *Applied Mathematics and Computation*, *Expert Systems With Applications* 等。美国计算机学会会刊、中国台湾《模糊数学通讯》、系统与控制国际杂志 *Kybernetes* (SCI 刊源)等出版了灰色系统专辑。2006 年以来,中国期刊全文数据库平均每年发表的灰色系统应用性论文达 1000 篇以上;被 EI 数据库检索的论文平均每年 700 余篇,被 SCI 和 SSCI 检索的论文也达到平均每年 200 余篇。世界上有 100 多所大学如华中科技大学、南京航空航天大学、武汉理工大学、福州大学、“台湾中央大学”、台湾成功大学、大同工学院,美国马里兰大学,日本神奈川大学,维也纳经济大学等知名高校或开设灰色系统理论课程,或招收和培养灰色系统专业方向的博士、硕士研究生。著名出版机构如中国的科学出版社、华中理工大学出版社、科学技术文献出版社、台湾全华科技图书出版社、台湾高立

图书有限公司,日本理工出版会,美国 IIGSS 学术出版社,德国 Springer-Verlag 出版社等出版灰色系统学术著作 100 余种。各专业领域的专家学者结合灰色系统理论提出了一批新兴边缘学科如灰色水文学、灰色地质学、灰色育种学、灰色哲学、灰色投入产出分析、灰色复杂网络和灰色可拓分析等。灰色系统理论的应用范围已拓展到工业、农业、社会、经济、能源、交通、石油、地质、水利、气象、生态、环境、医学、教育、体育、军事、法学、金融等众多领域,成功地解决了生产、生活和科学研究中的大量实际问题,如黄有评教授对灰影像压缩技术中数据的处理、徐忠祥教授等完成的新疆塔里木盆地油气灰色预测等。许多重要国际会议如不确定性系统建模国际会议、系统预测控制国际会议、国际一般系统研究会年会、系统与控制世界组织年会、计算机与工业工程国际会议、IEEE 系统、人与控制国际会议等把灰色系统理论列为讨论专题。2007 年国际电气与电子工程师协会 (IEEE) 设立了灰色系统委员会并每隔两年举办一次灰色系统国际会议,对促进世界系统科学界进一步了解和传播灰色系统理论起到了积极的作用。

但是,尽管灰色系统理论的研究工作取得了很多可喜的成果,我们还应该认识到,目前灰色系统理论的基础问题还存在很多争议,其理论体系还有待于完善。直至今日,灰色系统理论的主要观点还在争论之中,如灰色系统理论与概率论、模糊系统理论和粗糙集理论在认识论观点的区别与联系、灰色信息处理技术与其他信息分析经典方法的区别与联系、灰色模型 GM(1, 1) 体系与灰色函数的区别与联系等。特别地,灰色运算体系作为灰色系统理论的数学基础,是灰色系统理论成为一门成熟学科的前提。但是,迄今为止,灰色数学的基本概念还在探索之中并有待于学术观点的统一和完善。

在现实生活中,面对高度复杂的经济系统和社会系统,人们收集信息的能力总是有限的,因此人们致力于改进和完善调查统计的工具和手段,力求得到一个偏差尽可能小的数据范围(常用区间表示),使数据的真实值包含在这个范围之内。另外,人们对经济和社会系统进行预测、决策和控制等管理活动,其预测、决策和控制等活动的本身也是不精确的。正确的活动结果也只能是保证真实值落在一个偏差尽可能小的数据范围内。显然,人们获取包含真实值的数据范围与概率论的事件发生频率、模糊认识的隶属度函数和经典数学的区间数等属于不同的概念体系和认识手段。正是经济和社会系统存在各种各样的不确定性现象,也必然蕴涵着随机因素、模糊条件和贫信息现象等。为了推进灰色系统理论的快速发展,促进国际学者的交流与合作,使人们正确使用概率论、模糊系统理论、粗糙集理论和灰色系统理论等解决现实世界中大量存在的不确定问题,本书在众多学者的研究成果基础上,系统介绍作者十余年来关于灰色运算基本原理和基本方法的研究成果,同时结合人们在经济生活中常用的经济数量分析工具——投入产出分析,

提出灰色投入产出分析技术体系,使人们能够在获取复杂经济系统各部分只包含投入/产出真实值的数据范围情况下,达到有效分析、预测和控制复杂经济系统发展的目的。

## 1.2 基础数学知识

本书中灰色运算有关定理的证明需要用到一些基础数学知识。本节对此做简单介绍。

**定义 1.2.1** 给定向量  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 称  $\|X\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$  为向量  $X$  的  $p$  范数, 其中实数  $p$  满足  $1 \leq p < +\infty$ 。

**定义 1.2.2** 给定矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  和任意向量  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 称

$$\|A\|_p = \max_{X \neq O} \frac{\|AX\|_p}{\|X\|_p}$$

为矩阵  $A$  的  $p$  范数, 其中  $O$  为零矩阵或零向量。

**引理 1.2.1** 若方阵  $A$  满足  $\|A\|_p < 1$  ( $1 \leq p \leq +\infty$ ), 则矩阵  $I \pm A$  可逆且有

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^k + \dots \text{ 和 } (I + A)^{-1} = I - A + A^2 + \dots + (-1)^k A^k + \dots$$

**引理 1.2.2** 对方阵  $Q$  和  $B$ , 若  $Q$  可逆且满足  $\|BQ^{-1}\|_p < 1$ , 则  $Q \pm B$  可逆且有

$$(Q - B)^{-1} = Q^{-1} + Q^{-1}(I - BQ^{-1})^{-1}BQ^{-1} \text{ 和 } (Q + B)^{-1} = Q^{-1} - Q^{-1}(I + BQ^{-1})^{-1}BQ^{-1};$$

若  $\|Q^{-1}\|_p = \beta$  且  $\|BQ^{-1}\|_p = \alpha$ , 则有  $\|(Q \pm B)^{-1}\|_p \leq \beta / (1 - \alpha)$ 。

**引理 1.2.3** 若  $B_1 = (b_{ij}^-)_{m \times n}$  和  $B_2 = (b_{ij}^+)_{m \times n}$  满足  $|b_{ij}^-| \leq b_{ij}^+$  ( $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ ), 则  $\|B_1\|_p \leq \|B_2\|_p$ 。

**证明** 对任意向量  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 下式

$$\left| \sum_{j=1}^n b_{ij}^- x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |b_{ij}^- x_j| \leq \sum_{j=1}^n b_{ij}^+ |x_j| \leq \sum_{j=1}^n b_{ij}^+ |x_j|, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

成立, 则有

$$\sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n b_{ij}^- x_j \right|^p \leq \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n b_{ij}^+ |x_j| \right|^p \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n b_{ij}^- x_j \right|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p} \leq \frac{\sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n (b_{ij}^+ |x_j|) \right|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p};$$



又由以下公式

$$X_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})^T \neq O, \quad |X_0| = (|x_{10}|, |x_{20}|, \dots, |x_{n0}|)^T, \quad \|B_1\|_p = \frac{\|B_1 X_0\|_p}{\|X_0\|_p},$$

则根据定义 1.2.1 和定义 1.2.2, 有

$$\|B_1\|_p \leq \left[ \frac{\sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n (b_{ij}^+ |x_{j0}|) \right|^p}{\sum_{j=1}^n |x_{j0}|^p} \right]^{1/p} = \frac{\|(B_2 |X_0|)\|_p}{\|(|X_0|)\|_p} \leq \|B_2\|_p.$$

**引理 1.2.4** 矩阵  $C = (c_{ij})_{m \times n}$  对任意  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  和  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 有  $|c_{ij}| \leq \|C\|_p$  成立。

**证明** 对任意给定  $i_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$  和  $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 有  $|c_{i_0 j_0}| \leq \left( \sum_{i=1}^n |c_{i j_0}|^p \right)^{1/p}$ 。

设  $X_0 = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ , 即第  $j_0$  行元素为 1 外其余元素都是 0, 则有

$$\|C\|_p \geq \frac{\|CX_0\|_p}{\|X_0\|_p} = \left( \sum_{i=1}^n |c_{i j_0}|^p \right)^{1/p} \geq |c_{i_0 j_0}|. \quad \text{证毕}$$

**引理 1.2.5** 记矩阵函数为  $\exp A = \sum_{m=0}^{\infty} A^m / m! = I + A + A^2/2 + \dots + A^m / m! + \dots$ , 则非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + f(t), \\ X(t_0) = v \end{cases}$$

有且仅有唯一解  $X(t) = \exp[(t-t_0)A]v + \int_{t_0}^t \exp[(t-s)A]f(s)ds$ , 其中  $\dot{X}(t)$  表示向量  $X(t)$  关于时间  $t$  的微分。

**引理 1.2.6** 在笛卡儿直角坐标系内给定  $m$  个点如下:

$$(x^{(1)}, y^{(1)}), (x^{(2)}, y^{(2)}), \dots, (x^{(m)}, y^{(m)}),$$

设  $\phi^{(i)}$  是点  $(x^{(i)}, y^{(i)})$  的权重且满足

$$\phi^{(i)} \geq 0 (i=1, 2, \dots, m) \text{ 和 } \sum_{i=1}^m \phi^{(i)} = 1,$$

且  $p^{(k)}(x)$  为由下式给出的关于  $x$  的  $k$  次多项式