gaodeng yuanxiao tongshi | 高等院校**通识教育** “十三五”规划教材 | jiaoyu shisanwu guihua jiaocai

线性代数
同步精讲及练习

◎ 赵志新 吴春青 徐明华 主编

Linear Algebra

中国工信出版集团
人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

gaodeng yuanxiao tongshi | 高等院校**通识教育**
“十三五”规划教材 | jiaoyu shisanwu guihua jiaocai

线性代数
同步精讲及练习

◎ 赵志新 吴春青 徐明华 主编

Linear Algebra

人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

线性代数同步精讲及练习 / 赵志新，吴春青，徐明华主编. -- 北京 : 人民邮电出版社，2016.2（2016.7重印）
高等院校通识教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-115-41081-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①赵… ②吴… ③徐… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第001457号

内 容 提 要

本书是根据编者的教材《线性代数》（高等教育出版社，2012 年）的章节顺序编写，所用术语、符号也与之一致. 每章第一部分是本章知识结构图——让读者对本章的知识一目了然，第二部分是学习要求——既有对知识点的要求，也有对能力的要求，第三部分是内容提要，归纳本章的主要内容，便于读者复习，第四部分是释疑解难，针对本章的重点和难点以及学生在学习本章时遇到的一些共同性问题，编选出若干问题予以分析、解答，以帮助读者释疑解难并加深理解. 第五和第六部分为典型例题解析和应用与提高，让读者从中体会到解题的精妙. 例题涵盖线性代数教学的典型例子，近年来精彩的考研题. 第七部分为本章综合测试，主要让读者通过测试检测一下本章的学习情况.

本书在编写过程中力求叙述清晰，说理详尽，通俗易懂，深入浅出，对重点内容列举了大量有代表性的例题，以实例解释这些概念及内容，目的是使读者易于理解和掌握这些概念及难点.

本书可作为高等学校工科、理科（非数学专业）与经济管理类学科的线性代数教材（32～40 学时）配套用书，也可供相关专业的成人教育学生和工程技术人员使用.

◆ 主　　编　赵志新　吴春青　徐明华
责任编辑　王亚娜
责任印制　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：12.5　2016 年 2 月第 1 版
字数：300 千字　2016 年 7 月北京第 2 次印刷

定价：32.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前言

本书是编者所编教材《线性代数》(高等教育出版社，2012 年）的配套用书.

线性代数是大学数学教育中的一门主要的基础课程. 它是大学工科、经济类、管理类等各专业学生必修的基础课，也是硕士研究生入学考试的必考内容，更是现代化建设中的重要工具.

线性代数的基本概念、理论和方法具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的实用性. 不少读者学习后觉得内容似乎懂了，但到分析、解决问题时，概念容易混淆，能力明显不足. 为了解决这个矛盾，更好地让读者和学生理解概念，增强解题的能力，特编写了本书.

本书在编写过程中力求叙述清晰，说理详尽，通俗易懂，深入浅出，对重点内容列举了大量有代表性的例题，以实例解释这些概念及内容，目的是使读者易于理解和掌握这些概念及难点. 全书在致力于内容的科学性与系统性的同时，注重开发出例题的内涵，在例题讲解中适时穿插一些评注，阐明解题的思路和方法，有助于读者掌握举一反三的学习方法.

本书由徐明华、王峰、赵志新、吴春青共同策划，赵志新、吴春青和徐明华主编. 本书在编写过程中，得到了常州大学各级领导及同事们的大力支持，特别得到了学校教材委员会的大力支持，特在此深表谢意.

本书可作为高等学校工科、理科（非数学专业）与经济管理类学科的线性代数教材（32～40 学时）配套用书，也可供相关专业的成人教育学生和工程技术人员使用.

由于编者水平有限，书中不妥甚至谬误之处在所难免，恳请读者批评指正.

编者

2015 年 11 月于江苏常州

目录

第一章

行列式

一、 本章知识结构图

- 行列式
  - 概念
    - 不同行不同列的 n 个元素之积的代数和
    - 展开式中项的符号
    - 展开式所有项数为 $n!$
  - 性质
    - $D=D^{\mathrm{T}}$
    - 互换行列式的两行(列)，其值反号
    - $D=kD_1$
    - $D=D_1+D_2$
    - $D \overset{r_i+kr_j}{=\!=\!=\!=} D_1$
  - 展开式
    - 代数余子式
    - 展开公式
      - $D=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$
      - $D=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$
  - 计算
    - 数字型
      - 三角形法
      - 公式法
      - 递推法
      - 归纳法
    - 抽象型
      - 用行列式的性质
      - 用矩阵的性质
      - 用特征值及相似性质
  - 应用
    - 克拉默法则

二、 学习要求

1. 内容：二、三阶行列式及计算；n 阶行列式的定义；行列式的性质；行列式的按行(列)展开；克拉默(Cramer)法则.

2. 要求：掌握二、三阶行列式及对角线法则；知道行列式的定义；掌握行列式的性质；了解余子式、代数余子式；掌握行列式按行(列)的展开法则；能够综合利用行列式的性质及按行(列)展开法则计算简单的 n 阶行列式；了解解线性方程组的克拉默法则；知道克拉默法则在线性方程组解的存在性判别中的作用.

3. 重点：二、三阶行列式的计算；行列式的性质；利用性质将行列式化为上三角行列式或利用按行(列)展开方法，计算四阶及简单的 n 阶行列式；克拉默法则及其在线性方程组解的存在性判定中的作用.

4. 难点：行列式的定义；n 阶行列式的计算.

5. 知识目标：了解排列逆序数的概念；知道 n 阶行列式的定义；掌握行列式的性质；知道余子式、代数余子式的概念；掌握展开定理；知道行列式与线性方程组解之间的关系.

6. 能力目标：能够利用对角线法则计算二阶、三阶行列式；能够利用行列式的定义计算 n 阶三角形等特殊行列式；能够利用行列式的性质、按行(列)展开方法计算简单行列式；能够综合行列式各类计算办法计算行列式，提高综合解决问题的能力；会用克拉默法则求解线性方程组，能够根据方程组的系数行列式判断非齐次线性方程组是否有解和齐次线性方程组是否有非零解.

三、 内容提要

行列式最早是由解线性方程组产生的一种算式. 十九世纪以后，矩阵概念的引入使得行列式在许多领域都有广泛的应用. 本章着重叙述了 n 阶行列式的定义、n 阶行列式的计算及其应用. 本章的重点就是行列式的计算.

(一) n 阶行列式的定义

$$n\text{ 阶行列式}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

其中 t 为这个排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数.

(二) 行列式的性质

1. 行列式 D 与它的转置行列式相等，即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

2. 互换行列式的两行(列)，行列式变号. 由此即得：若行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

3. 如果行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

4. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式不变.

(三) 行列式的计算

1. 定义法.
2. 化成三角形行列式法.
3. 降阶法. 这是行列式计算中最基本的方法.
4. 分解之和法.
5. 数学归纳法.
6. 应用范德蒙行列式进行计算等.

(四) 行列式的应用

如果 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_{1n} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

的系数行列式不等于零，即 $D\neq 0$，则上述线性方程组有唯一解，且其解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$　$j=1, 2, \cdots, n$.

四、 释疑解难

问题 1　行列式定义的实质是什么?

答：由 n 阶行列式 D 的定义可以知道：D 就是行列式中所有取自不同行、不同列的 n 个元素之积的代数和，记为 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，而每项所带的符号是唯一确定的，撇开每个项随带的符号，就是：凡是取自 D 中不同行、不同列的 n 个元素之积，一定是 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中的一项；反过来，$\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中任一项也一定是 D

中不同行、不同列的 n 个元素之积. 利用这个原则以及每一项的“定号”规则，对行列式的一些问题的解决可起到事半功倍的作用.

例如，考虑以 λ 为参数的 4 阶行列式(该行列式在第四章中有重要的应用)：

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda \end{vmatrix},$$

不进行具体计算，由行列式定义即得出以下结论.

(1) $D(\lambda)$是一个关于 λ 的 4 次多项式，这是因为 $D(\lambda)$中有正项$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)(a_{44}-\lambda)$，而其他各项的 λ 的幂次均低于 4，而且该多项式中 λ^4 的系数等于 1.

(2) 多项式 $D(\lambda)$中 λ^3 的系数是$-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$，即为主对角线元素之和的相反数，这是因为 $D(\lambda)$中的任一项，若它不含某主对角线元素作为其因子，则它至少不含两个主对角线元素作为其因子. 于是，除了$(a_{33}-\lambda)(a_{44}-\lambda)(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)$项外，其余各项的 λ 的幂次至多是 2；也即 $D(\lambda)$中 λ^3 的系数就是$(a_{33}-\lambda)(a_{44}-\lambda)(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)$中 λ^3 的系数，而后者显然是$-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$.

问题 2 为什么 $n(n\geqslant 4)$阶行列式不能按对角线展开?

答：二阶、三阶行列式可以按对角线展开，而四阶及四阶以上的行列式不能按对角线展开，因为它不符合 $n(n\geqslant 4)$阶行列式的定义. 例如，对于四阶行列式，如果按对角线法则，则只能写出 8 项，这显然是错误的，因为按照行列式的定义可知，四阶行列式一共有 4! 项，即四阶行列式是 24 项的代数和. 另外，按对角线做出的项的符号也不一定正确，比如，乘积项 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$其列排列 4123 的逆序数为 3，应取负号而不是正号. 所以，在计算 $n(n\geqslant 4)$阶行列式时，对角线法则失效.

问题 3 计算行列式的常用方法有那些?

答：计算行列式的方法通常有

(1) 用对角线法则计算行列式，它只适合二、三阶行列式；

(2) 用 n 阶行列式的定义计算行列式；

显然有

上三角形行列式 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

下三角形行列式 $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

对角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，

另外 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$.

(3) 利用行列式的性质计算行列式；

(4) 利用行列式按某一行(列)展开定理计算 n 阶行列式；

(5) 利用数学归纳法计算 n 阶行列式；

(6) 利用递推公式计算 n 阶行列式；

(7) 利用范德蒙行列式的结论计算特殊的 n 阶行列式；

(8) 利用升阶(加边)法计算 n 阶行列式；

(9) 化三角形法计算 n 阶行列式；

(10) 综合运用上述各法计算 n 阶行列式.

在实际计算中，又常常根据行列式的具体特点，采用相应的方法(有时需要几种方法结合使用). 请注意学习、总结例题中的计算方法，由此及彼，举一反三，逐步提高计算能力.

问题 4　(1) 余子式与代数余子式有什么特点？(2) 它们之间有什么联系？

答：(1) 对于给定的 n 阶行列式，那么元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij} 仅与位置(i, j)有关，而与 D 中第 i 行、第 j 列元素的大小和正负无关.

(2) 它们之间的联系是 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，因而当 $i+j$ 为偶数时，二者相同，即 $A_{ij}=M_{ij}$；当 $i+j$ 为奇数时，二者相反，$A_{ij}=-M_{ij}$.

问题 5　什么是行列式按行(列)展开定理？它有何应用？

答：行列式按行(列)展开定理是指下述两个定理.

定理 1　n 阶行列式 D 等于它的任意一行(列)所有元素与它们对应的代数余子式的乘积之和，即

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \\ &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad (j=1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

定理 2　行列式的某一行(列)所有元素与另一行(一列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \qquad (i\neq j),$$
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \qquad (i\neq j).$$

应用一　计算行列式的值.

行列式按某一行(列)展开能将高阶行列式的计算转化为若干个低价行列式的计算，是计算数字行列式的常用方法. 值得注意的是，展开前往往先利用行列式的性质，将某行(列)的元素尽可能多消成零，然后利用定理或者推论：

推论：一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都是为零，那么这行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij}A_{ij}$$

例 1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值

解 观察，注意到第 3 列元素相对简单有规律一点，所以选择第 3 列，利用行列式的性质，保留一个非零元素，其余的都化为零.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-2r_1}}{\underset{r_4-r_1}{=}} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+2c_2}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -9.$$

应用二 求某行(列)元素的代数余子式的(代数)和

已知行列式 D 及其元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 和任意 n 个数 k_1，k_2，…，k_n，求和式 $\sum\limits_{j=1}^{n}k_jA_{ij}$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_iA_{ij}$.

首先应注意，上面的和式均表示某个行列式 $\widetilde{D}$，其第 i 行或第 j 列元素为 k_1，k_2，…，k_n，因此将 D 的第 i 行或第 j 列元素改为 k_1，k_2，…，k_n，即为 $\widetilde{D}$. 写出 $\widetilde{D}$ 后，再算出 $\widetilde{D}$，即为所求的和式.

如果 k_1，k_2，…，k_n 恰为 D 中某行但不是第 i 行，或为某列但不是第 j 列，则上述和式的值为 0.

例 2 已知 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & -8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$，求 $A_{11}-2A_{12}+3A_{13}-4A_{14}$.

解 注意到 $a_{31}=2$，$a_{32}=-4$，$a_{33}=6$，$a_{34}=-8$，

那么由行列式的性质，$a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}+a_{34}A_{14}=0$

即 $\qquad 2A_{11}-4A_{12}+6A_{13}-8A_{14}=2(A_{11}-2A_{12}+3A_{13}-4A_{14})=0.$

注：不要直接去计算代数余子式，那样很麻烦.

例 3　设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，求第 4 行元素余子式之和.

解　【分析：注意本题是要求第 4 行元素的余子式的和，而不是代数余子式的和，这是有差别的. 一种办法是直接计算，分别求出四个余子式；另一种是将余子式转化为代数余子式，再根据行列式的展开定理归结为一个 4 阶行列式的计算.】

用 $A_{4j}(j=1, 2, 3, 4)$表示第 4 行各元素的代数余子式，由于 $A_{4j}=(-1)^{4+j}M_{4j}$ 于是有

$$\begin{aligned} M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44} &= -A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -28. \end{aligned}$$

五、 典型例题解析

例 4　一个 n 阶行列式中等于零的元素的个数比 n^2-n 多，则此行列式等于________.

解　应填 0，因为 n 阶行列式共有 n^2 个元素，如果 D 是 n 阶行列式，而且其中等于零的元素的个数比 n^2-n 多，则不等于零的元素的个数比 $n^2-(n^2-n)=n$ 少. 这样，D 的展开式中每项至少有一个因子 0，从而 $D=0$.

例 5　设 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ x & 2x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4x \end{vmatrix}$，求 $f(x)$中 x^4 的系数和 x^3 的系数.

解　由行列式的定义，含 x^4 的项为 4 个取自不同行不同列的 x 的一次多项式的乘积，这样的项只有一项，即主对角线上元素的乘积为 $4!\ x^4$. 含有 x^3 的项为 3 个取自不同行不同列的 x 的一次多项式的乘积，再乘上一个常数(由于要求不同行不同列，这个常数唯一确定)这样的项也只有一项，即为(1, 2)，(2, 1)，(3, 3)，(4, 4)位置元素的乘积，所以为 $-4!\ x^3$(注意符号为负).

例 6　已知 $abcd=1$，则 $\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}=$________.

解　0. 因为原行列式可以写成 $D=D_1+D_2$，

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}=abcd\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}\overset{abcd=1}{=}-D_2$$

所以 $D=D_1+D_2=0$.

例 7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 在行列式中，第三行(或第 2 列)中已经有一个元素为零，故可利用行列式的性质，使第 3 行(第 2 列)出现尽可能多的零元素，再将行列式按该行(或列)展开，使行列式降阶. 该方法常称为“降阶法”.

$$D\underset{r_4-3r_1}{\overset{r_2+r_1}{=}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}=(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}\overset{r_3+r_2}{=}\begin{vmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}=8.$$

例 8 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 201 & 102 & -99 & 98 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

解 利用行列式的性质结合 D 的特点，先拆分再计算，有

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 201 & 102 & -99 & 98 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 200+1 & 100+2 & -100+1 & 100-2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\4&2&1&-1\\200&100&-100&100\\1&2&1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&1&1\\4&2&1&-1\\1&2&1&-2\\1&2&1&-2\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}2&1&1&1\\4&2&1&-1\\2&1&-1&1\\1&2&1&-2\end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix}0&0&2&0\\4&2&1&-1\\2&1&-1&1\\1&2&1&-2\end{vmatrix}=200\begin{vmatrix}4&2&-1\\2&1&1\\1&2&-2\end{vmatrix}=200\begin{vmatrix}6&3&0\\2&1&1\\5&4&0\end{vmatrix}$$

$$=-200\begin{vmatrix}6&3\\5&4\end{vmatrix}=-1800.$$

例 9　化简行列式 $D_3=\begin{vmatrix}\lambda-1&3&-3\\-3&\lambda+5&-3\\-6&6&\lambda-4\end{vmatrix}$

解　$D_3\overset{c_1+c_2}{=}\begin{vmatrix}\lambda+2&3&-3\\\lambda+2&\lambda+5&-3\\0&6&\lambda-4\end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{=}\begin{vmatrix}\lambda+2&3&-3\\0&\lambda+2&0\\0&6&\lambda-4\end{vmatrix}$

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda+2&0\\6&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-4).$$

例 10　设四阶行列式 D_4 的第二行元素分别为 1，-5，0，8.

(1) 当 $D_4=4$ 并且第 2 行的元素所对应的代数余子式分别为 4，a，-3，2 时，求 a 的值；

(2) 当第 4 行元素对应的余子式依以为 4，a，-3，2，求 a 的值.

解　(1) 依题意，根据代数余子式的知识，有

$$D_4=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}=4$$

即：

$$1\times4+(-5)a-3\times0+8\times2=4$$

所以

$$a=\frac{16}{5}.$$

(2) 根据代数余子式的知识，有

$$a_{21}A_{41}+a_{22}A_{42}+a_{23}A_{43}+a_{24}A_{44}=0$$

或者：

$$a_{21}(-1)^{4+1}M_{41}+a_{22}(-1)^{4+2}M_{42}+a_{23}(-1)^{4+3}M_{43}+a_{24}(-1)^{4+4}M_{44}=0$$

即：

$$1\times(-4)+(-5)a+3\times0+8\times2=0$$

所以

$$a=\frac{12}{5}.$$

例 11 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&1+x&-1\\1&x-1&1&-1\\1+x&-1&1&-1\end{vmatrix}.$$

解 （法一）$D=\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&1+x&-1\\1&x-1&1&-1\\1+x&-1&1&-1\end{vmatrix}\overset{c_1+c_2}{\underset{c_3+c_4}{=}}\begin{vmatrix}0&-1&x&x-1\\0&-1&x&-1\\x&x-1&0&-1\\x&-1&0&-1\end{vmatrix}$

$$\overset{r_2-r_1}{\underset{r_4-r_3}{=}}\begin{vmatrix}0&-1&x&x-1\\0&0&0&-x\\x&x-1&0&-1\\0&-x&0&0\end{vmatrix}=x^4.$$

（法二）$D=\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&1+x&-1\\1&x-1&1&-1\\1+x&-1&1&-1\end{vmatrix}\overset{c_1+c_2+c_3+c_4}{=}\begin{vmatrix}x&-1&1&x-1\\x&-1&1+x&-1\\x&x-1&1&-1\\x&-1&1&-1\end{vmatrix}$

$$=x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&1+x&-1\\1&x-1&1&-1\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\0&0&x&-x\\0&x&0&-x\\0&0&0&-x\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}0&x&-x\\x&0&-x\\0&0&-x\end{vmatrix}=x^4.$$

（法三）$D=\begin{vmatrix}1+0&-1&1&x-1\\1+0&-1&1+x&-1\\1+0&x-1&1&-1\\1+x&-1&1&-1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&1+x&-1\\1&x-1&1&-1\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&-1&1&x-1\\0&-1&1+x&-1\\0&x-1&1&-1\\x&-1&1&-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&0&x\\1&0&x&0\\1&x&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&-1&1&x-1\\0&-1&1+x&-1\\0&x-1&1&-1\\x&-1&1&-1\end{vmatrix}$$

$$=x^3-x\begin{vmatrix}-1&1&x-1\\-1&x+1&-1\\x-1&1&-1\end{vmatrix}$$

$$=x^3-x\left[\begin{vmatrix}0&1&x-1\\0&x+1&-1\\x&1&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&1&x-1\\-1&x+1&-1\\-1&1&-1\end{vmatrix}\right]$$

$$=x^3-x\left[x\begin{vmatrix}1 & x-1\\ x+1 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 0 & x\\ -1 & x & 0\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}\right]$$

$$=x^3-x[x(-1-x^2+1)+x^2]=x^4.$$

例 12 若 $\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ 1 & 0 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 0 & 6\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=8$，计算行列式 $\begin{vmatrix}a+1 & 2 & 2 & 2\\ b & 1 & 0 & 2\\ c+2 & 3 & -1 & 2\\ d+4 & 5 & 5 & 2\end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix}a+1 & 2 & 2 & 2\\ b & 1 & 0 & 2\\ c+2 & 3 & -1 & 2\\ d+4 & 5 & 5 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 2 & 2 & 2\\ b & 1 & 0 & 2\\ c & 3 & -1 & 2\\ d & 5 & 5 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & -1 & 2\\ 4 & 5 & 5 & 2\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}a & 2 & 2 & 1\\ b & 1 & 0 & 1\\ c & 3 & -1 & 1\\ d & 5 & 5 & 1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -1 & 1\\ 4 & 5 & 5 & 1\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}a & 2 & 2 & 1\\ b & 1 & 0 & 1\\ c & 3 & -1 & 1\\ d & 5 & 5 & 1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 2 & -1 & 1\\ 4 & 4 & 5 & 1\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}a & 2 & 2 & 1\\ b & 1 & 0 & 1\\ c & 3 & -1 & 1\\ d & 5 & 5 & 1\end{vmatrix}=16.$$

例 13 解方程组 $\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3+\cdots+a_1^{n-1}x_n=1\\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3+\cdots+a_2^{n-1}x_n=1\\ \cdots\\ x_1+a_nx_2+a_n^2x_3+\cdots+a_n^{n-1}x_n=1\end{cases}$

式中 $a_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 互不相同.

解 由于此方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)\neq 0,$$

故由克拉默法则知方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \ x_2=\frac{D_2}{D}, \ \cdots, \ x_n=\frac{D_n}{D}$$

式中，$D_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为用常数项 1，1，…，1 代替 D 的第 i 列所构成的行列

式，则由行列式的性质易知 $D_1=D$，$D_2=\cdots=D_n=0$，于是原方程组的唯一解为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}=(1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$.

例 14 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}.$$

解 这行列式中每行元素的和均相等，因此可把第 2，$\cdots$，n 列都加到第 1 列上去.

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1+x_2+\cdots+x_n-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1+x_2+\cdots+x_n-m & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1+x_2+\cdots+x_n-m & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1+x_2+\cdots+x_n-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$=(x_1+x_2+\cdots+x_n-m)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$=(x_1+x_2+\cdots+x_n-m)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$=(x_1+x_2+\cdots+x_n-m)(-m)^{n-1}.$$

六、 应用与提高

例 15 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} (x_i\neq 0, i=1, 2, \cdots, n)$$

解 观察行列式的特点以及 $x_i\neq 0(i=1, 2, \cdots, n)$，第 $i(i=2, \cdots, n)$列提取公因子 x_i，有