# 有限体积法和非结构动网格

刘　君　徐春光　白晓征　著

科学出版社

# 有限体积法和非结构动网格

刘　君　徐春光　白晓征　著

科学出版社
北　京

## 内 容 简 介

本书讲述采用非结构动网格技术数值模拟高速飞行器的气动弹性和多体分离等存在相对运动界面的流固耦合问题的计算方法。第 2 章推导建立 ALE 形式的流体动力学方程。第 3 章介绍有限体积法的基本原理和分析理论。第 4 章讨论有限体积法中模拟激波的算法。第 5 章分析流固耦合界面条件的离散算法。第 6 章是网格变形技术和离散几何守恒律，实际问题常结合网格重构来解决大变形或大位移。第 7 章讲述在新旧网格之间传递流场信息时保持二阶精度的新算法和保持物理量守恒的插值算法。第 8 章介绍基于有限体积法的非平衡流动解耦算法理论。最后给出体现以上算法特色的应用算例。

本书适合航空航天领域从事流固耦合教学和科研的教师、研究生作为教学用书，也适合相关行业研究人员和工程技术人员参考学习。

**图书在版编目(CIP)数据**

有限体积法和非结构动网格/刘君，徐春光，白晓征著．—北京：科学出版社，2016

ISBN 978-7-03-048396-6

Ⅰ. 有…　Ⅱ. ①刘…②徐…③白…　Ⅲ. ①计算流体力学②传热计算③非定常流动-网格-计算方法　Ⅳ. ①O35②TK124

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 117213 号

责任编辑：魏英杰 / 责任校对：桂伟利
责任印制：张　倩 / 封面设计：陈　敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
三河市骏杰印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2016 年 6 月第　一　版　开本：720×1000 1/16
2016 年 6 月第一次印刷　印张：15 1/2
字数：310 000

**定价：110.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前　言

流固耦合问题在飞行器设计中有重要的应用需求，涉及流体力学和固体力学等交叉学科，试验非常困难，发展趋势是采用数值模拟开展研究。流固耦合数值模拟方法在一般的计算流体力学理论中很少论述，也不同于一般计算固体力学问题，是一门新的技术学科分支。我在国防科学技术大学教书的时候，每次修改研究生培养方案时都要求开设一定比例新课程，认真编写教案，这样基本上著作初稿也写出来了。2003 年开设“超声速流动与燃烧”课程时写过一本书，2008 年开设“流固耦合计算方法”课程，系统整理课题组从 1998 年开始的非结构网格相关研究成果，2009 年出版《非结构动网格计算方法及其在包含运动边界的流场模拟中的应用》。专研和教学的主要差异在于前者只要研究者自己的感悟，后者需要教师按照逻辑关系表达出来让学生理解，课堂教学互动，学生有些问题常能促进教师学术思考。专著作为教材已用于 4 届研究生教学，为回答硕士生和博士生的提问，不断增加相关理论，同时课题组新成果在以上专著中也没有体现。完善和丰富教学内容，并系统介绍研究新成果是写作本书的主要目的。

本书讨论的流固耦合问题主要包括两大类：一类是流场中有多个飞行体，它们之间有相对运动，称为多体分离问题；另一类是物体表面的变形对流场影响不容忽视的情况，称为物体变形引起的流固耦合问题。这两类问题的共同特点是包含有相对运动边界的非定常流动，本书主要介绍采用变形网格有限体积法数值模拟这类流固耦合现象时在控制方程、网格、离散方法、边界条件等方面的理论和算法。全书内容按照如下次序安排：从常比热量热完全气体动力学基本方程出发推导 ALE 形式，然后给出描述湍流、非平衡流的控制方程；针对格心格式，进行有限体积方法离散，通过细致分析计算方法的近似过程，介绍稳定性分析理论，提出相容性(格式精度)的验证性方法。为了说明有限体积法模拟激波的原理和多种对流项通量计算格式的本质，补充双曲型守恒律方程的弱解理论。在数学上计算流体力学属于偏微分方程的初边值问题，边界条件非常重要，以上流固耦合问题在两相交界面上传递流体和固体之间相互作用，因此专门讨论 ALE 形式有限体积方法计算运动边界的特殊问题及其处理，为了实现高精度需要构建离散几何守恒律。对网格变形技术综述和简单介绍两种算法以后，主要讨论离散几何守恒律和网格局部重构后流场信息传递方法。多体分离问题常采用发动机作为分离动力，流场内涉及燃气组分或化学反应，有限体积法计算非平衡流动控制方程源项时存在精度问题，新型解耦算法可以很好解决。最后，给出体现以上算法特色的应用算例，包

括解决“接触/脱离”计算区域拓扑变化的“虚拟网格通气”技术等。

本书主要阅读对象是完成相关理论学习，并准备开展运动界面应用问题研究的研究生。目前国内细致论述有限体积方法的计算流体力学教科书不多，涉及非结构动网格技术的专门著作很少，本书介绍数值模拟流固耦合现象的力学理论和计算方法，使学生了解流固耦合问题的应用领域和研究进展，掌握应用流体力学和固体力学基本知识解决解决飞行器设计中遇到的飞行器多体分离、结构响应、气动弹性和武器装备研究中遇到的爆炸冲击响应问题的数值模拟方法，培养学生开展交叉学科研究的能力，为研究生开展进一步的方法探索或应用研究奠定理论基础。

本书研究工作先后得到国家自然科学基金面上项目(批准号 11272074 和 91541117)和重点项目(批准号 11532016)的资助，研究工作还在继续。

本人有幸师从张涵信院士学习，在计算流体力学进入中国蓬勃发展之初得到系统的专业训练，中国空气动力研究与发展中心的张来平研究员提供的二维非结构静止网格计算程序是我们编程的起点，在此表示衷心感谢！

感谢郭正、王巍、周松柏、刘瑜博士，本书也凝聚了他们的心血。感谢我现在指导的研究生，他们不懈努力使我能够专心思考和写作、啜茶看书，从容生活。

限于水平，书中不妥之处在所难免，诚望读者提出宝贵意见。

刘君

大连理工大学

# 目　录

# 第1章 引 言

有限体积法是个理论问题，将其讨论清楚有助于学科发展；动网格是个技术问题，说清其原理可以拓展应用范围。有限体积法和动网格结合起来主要用于模拟航空航天领域非常关心的、流场内包含有相对运动边界的非定常流动引起的流固耦合问题。

## 1.1 有限体积法的理论问题

有限体积法(finite volume method，FVM)，早期也译为有限容积法或控制体法，很早就随着计算传热学中著名的SIMPLE算法在国内得到普遍应用[1,2]，但是能够准确分辨激波的弱解理论不适合建立在交错网格上的SIMPLE算法，可压缩流的经典CFD著作[3-9]中很少专门论述有限体积法。近年来，因其适应任意形状的非结构网格而在复杂外形的计算上具有明显优势，有限体积法被国外CFD商业软件广泛采用，国内出版的CFD教材常提及这种算法[10-18]，“它比有限差分算法和有限单元算法发展更快，在计算流体力学中已经占有相当重要的地位”[19]。但是，考察以上提及FVM的著作，除了“有限差分法是从描述这些(流体运动)基本守恒律的微分方程出发构造离散方程，而有限体积法是以积分型守恒方程为出发点，通过对流体运动的体积域的离散来构造离散方程”[12]这样的定性结论外，在对具体计算理论，如相容性、稳定性、TVD、Riemann分解、数值耗散和色散等均是针对有限差分法(finite difference scheme，FDS)进行分析的，很少有专门分析FVM的理论模型。

造成这种局面的主要原因是有些作者引用国外文献，“微分类方法(如有限差分法)和积分类方法(如有限体积法)的不同导致了几何项处理不同，这会对计算精度和效率产生影响，但都是非本质的。也就是说，有限差分法和有限体积法的不同主要是对网格的几何处理方法不同，而两者没有本质区别”[15]。“有限差分法和有限体积法是密切相关的。事实上，在矩形网格上，两者可以做到完全等价”[15,16]。按照这种观点，至少在结构网格(矩形网格)上FVM等价于FDS。但是，也有教材或著作中对FVM和FDS等价有不同看法，认为“对于较均匀的网格，如果坐标变换函数的计算具有高精度，那么有限差分法可以通过多点格式或紧致格式获得高精度，但对于有限体积法很难获得二阶以上精度”[10]，表明FVM不能简单等同于FDS。

有些文献把难以构造高精度 FVM 格式限制为“对于多维问题而言”[15,16]，这意味着存在一维的 FVM，至少表明一维 FVM 和多维 FVM 存在差异，但是有些文献直接把 TVD、ENO 等高精度格式推广到多维结构化网格的有限体积法中[14-16,19]，进一步还采用算子分裂算法把多维问题分裂为几个一维问题的来建立多维非线性对流方程的有限体积法，采用 Lax-Wendroff 格式求解[19]。由于很多高校开设 CFD 课程，从规范教学和学科发展的角度有必要清晰论述这两个问题。

综合分析以上 CFD 教材中关于 FVM 的分歧，主要来自于对 FVM 的理解不同，目前主要有以下三种定义。

① 只要算法构造过程中采用积分运算就称为 FVM。

② 只把构造过程中空间项采用积分运算的算法称为 FVM。

③ 特指采用高斯定理把体积分转换为面积分以后建立的算法。

定义①包括 Godunov 守恒格式，这是只能用于一维 Riemann 问题的格式，既不是 FDS，也不是 FVM，因此这种定义不正确。定义②将构造 ENO、WENO 和紧致格式时采用的积分型模板函数和 FVM 混淆了，第 3 章会对此专门讨论，此处直接引用分析结论：高精度格式使用的模板是沿单一坐标方向相邻点信息构建的单变量函数，无论采用拟合型，还是积分型函数，本质是在空间特定点上函数值或其导数值的近似，即使对于结构化网格，模板函数用于 FDS 和 FVM 的精度不同，高精度的积分型格式也很难构造出“真正的”高精度 FVM。我们认为采用定义③较为准确。

这里强调“真正的”FVM，是因为有些文献把一些 FDS 也归类为 FVM。下面介绍这种观点的来历。考虑二维线性偏微分模型方程，即

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\,\frac{\partial u}{\partial x}+b\,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}=0$$

在结构网格的基础上，一般曲线坐标系下的模型方程可以变换为

$$\frac{\partial J^{-1}u}{\partial\tau}+\frac{\partial J^{-1}(f\xi_x+g\xi_y)}{\partial\xi}+\frac{\partial J^{-1}(f\eta_x+g\eta_y)}{\partial\eta}=0$$

再计算空间离散，即

$$\frac{\partial J^{-1}u}{\partial\tau}+(F_{i,j+\frac{1}{2}}-F_{i-\frac{1}{2},j})+(G_{i,j+\frac{1}{2}}-G_{i,j-\frac{1}{2}})=0$$

其中，$F=J^{-1}(f\xi_x+g\xi_y)$ 和 $G=J^{-1}(f\eta_x+g\eta_y)$ 表示曲线坐标系下通量。

网格编号采用整数表示，则有

$$\Delta\xi=\xi_{i,j}-\xi_{i-1,j}=\Delta\eta=\eta_{i,j}-\eta_{i,j-1}=1$$

坐标变换产生的导数采用中心差分离散，则有

$$J_{i,j}^{-1}=x_\xi y_\eta-x_\eta y_\xi=\begin{bmatrix}x_\xi & x_\eta\\ y_\xi & y_\eta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{x_{i+1,j}-x_{i-1,j}}{2} & \dfrac{x_{i,j+1}-x_{i,j-1}}{2}\\ \dfrac{y_{i+1,j}-y_{i-1,j}}{2} & \dfrac{y_{i,j+1}-y_{i,j-1}}{2}\end{bmatrix}$$

近似等于包含$(i,j)$点周围网格单元构成的面积，记为$J_{i,j}^{-1}=\bar{V}_{ij}$，根据

$$\xi_x|_{i,j}=y_\eta J_{i,j}=\frac{y_{i,j+1}-y_{i,j-1}}{2\bar{V}_{ij}}$$

由此可知，$(J^{-1}\xi_x)_{i,j}$近似等于包含$(i,j-1)$和$(i,j+1)$两点构成线段在$y$轴上投影。采用符号$S_{1x}$和$S_{3x}$分别表示包含$(i,j)$网格单元的左侧和右侧面积投影，即

$$S_{1y}=\frac{1}{2}[(J^{-1}\xi_x)_{i,j}+(J^{-1}\xi_x)_{i-1,j}]$$

$$S_{3y}=\frac{1}{2}[(J^{-1}\xi_x)_{i+1,j}+(J^{-1}\xi_x)_{i,j}]$$

同样，对于线段投影$(J^{-1}\xi_y)_{i,j}=-x_\eta$、$(J^{-1}\eta_x)_{i,j}=-y_\xi$和$(J^{-1}\eta_y)_{i,y}=x_\xi$引入类似的符号$S_{1y}$、$S_{3y}$、$S_{2x}$、$S_{4x}$、$S_{2y}$和$S_{4y}$，代入FDS可以得到的空间离散表达式，即

$$\frac{\partial J^{-1}\boldsymbol{u}}{\partial\tau}+(f_{i-\frac{1}{2},j}S_{1y}+g_{i-\frac{1}{2},j}S_{1x})+(f_{i,j-\frac{1}{2}}S_{2y}+g_{i,j-\frac{1}{2}}S_{2x})$$
$$+(f_{i+\frac{1}{2},j}S_{3y}+g_{i+\frac{1}{2},j}S_{3x})+(f_{i,j+\frac{1}{2}}S_{4y}+g_{i,j+\frac{1}{2}}S_{4x})=0$$

在同样的结构网格上构建FVM算法。在编码为$k$的控制体上积分流动方程，利用高斯公式把面积分换成线积分，可以得到对应的积分型控制方程，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_{V_k}u\,\mathrm{d}\sigma+\sum_{l=1}^{4}\left[\int_{S_l}(f\boldsymbol{i}+g\boldsymbol{j})\boldsymbol{n}_l\,\mathrm{d}s\right]_k=0$$

控制体就是实际物理空间区域，求解变量$u$、对流通量$f$和$g$是充满整个求解时间和空间区域的连续函数，随着控制体趋向无穷小，积分方程的解趋向于偏微分方程的解。基于离散数字结构体系的计算机技术无法描述以上建立在连续时间和空间区域的方程，为了适应信息存储和运算速度有限的计算机，必须对物理量进行时间和空间离散处理。采取何种离散方法就成为有限体积法的研究内容。从原理上说，控制体内存储信息的位置越多越有益于精确描述物理量的分布，但是从目前应用情况看，除了少量高精度格式文献，一个控制体的存储位置只有一点。尽管控制体可以具有任意形状，存储物理量的空间位置主要选择两个几何特征点：一种是网格的顶点，称为格点格式(vertex scheme)；另一种是网格单元的重心，称为格心格式(cell centered scheme)。对于格心格式，可以采用控制体内物理量积分得到的平均值，即

$$\bar{u}_k=\frac{1}{V_k}\iiint_{V_k}u\,\mathrm{d}\sigma$$

作为可操作的信息来表征整个控制体内物理量。可以看出，平均值不一定等于控制体格心位置$(x_k, y_k)$上物理量的实际值 $u_k = u(t, x_k, y_k)$。

为了得到积分方程中进出控制体表面的通量积分值，需要根据编码为 $k$ 的控制体及其相邻控制体的格心位置上存储的平均值来近似原来的连续变量或函数，即所谓的空间重构(reconstruction)问题。采用控制体平均值 $\bar{u}$ 代替连续分布物理量 $u$ 来重构对流通量分布，假设重构得到边界面上的对流通量为 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$，在此基础上进行第二次重构，即对 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 在边界面积分得到平均值，即

$$\hat{f}_l \approx \frac{1}{S_l}\int_{S_l} \bar{f}\,\mathrm{d}s, \quad g_l \approx \frac{1}{S_l}\int_{S_l} \bar{g}\,\mathrm{d}s$$

这样得到有限体积法的半离散形式，即

$$\frac{\partial(\bar{u}V)_k}{\partial t} + \sum_{l=1}^{m}[(\hat{f}_l\boldsymbol{i} + \hat{g}_l\boldsymbol{j})\boldsymbol{n}_l S_l]_k = 0$$

其中，$V_k = \bar{V}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{n}_l S_l$ 表示的几何面积和线段和前面 FDS 中对应的符号完全一致。

由此可以得出结论，“有限差分方法和有限体积方法的不同主要是对网格的几何处理方法不同，而两者没有本质的区别”，“在适当处理几何度量系数条件下，在一般曲线坐标系下，守恒型流动方程的有限差分方法等价于物理空间的有限体积方法”。

但是从以上的建模过程可以看出，两者仅仅是形式相同，在本质上存在明显差异。

① $V_k$ 和 $S_l$ 是精确的几何面积，而有限差分方法中的 $\bar{V}_{ij}$ 来自坐标变换，用来表征几何参数时存在误差，如果采用高精度差分格式，则不能按照上述二阶精度方法计算 $\bar{V}_{ij}$、$S_{lx}$ 等系数，因此即使同样的网格得到的 FVM 和 FDS 形式也不再相同。

② 采用高斯公式以后空间维数发生变化，数学上不存在一维高斯公式，本质上也没有一维积分型控制方程。

③ Taylor 级数理论不能用于空间平均值。

目前，CFD 分析理论主要建立在一维模型方程的基础上，适合 FDS，不能反映 FVM 的特点，有必要发展专门针对 FVM 的理论体系[20]。在本书第 3 章，从线性模型方程出发，通过比较有限体积法和有限差分法离散过程，论证两者之间的差异，指出采用有限差分法经典理论分析有限体积法存在的问题，提出分析有限体积法相容性(格式精度)的验证性方法，讨论了构造基于非结构网格的高精度有限体积法遇到的限制器、隐式迭代和黏性通量计算等问题。有限体积法用于模拟存在激波的流场，其空间积分特性决定了只能在控制体界面处描述激波，本书第 4 章先介绍双曲型守恒律方程的弱解理论，然后讨论对流项通量计算格式，最后给出黏性流动时界面应力计算方法。尽管支持不存在一维的 FVM 的观点，但是有限体积

法也可以采用时间分裂法，在本书第 8 章将讨论把基于有限差分法提出的化学非平衡流解耦算法拓展到有限体积法的理论基础。

## 1.2 非结构动网格的技术问题

网格是结构还是非结构并不在于其几何形状，而在于数据结构是否有序。非结构网格除了相邻单元编码无序外，也包括控制体形状和面元数目不受限制。严格地说，混合网格是指分块以后有些采用有序编码、有些采用无序编码的算法，把非结构网格中出现六面体形状网格称为混合网格的提法不准确。

边界运动引起流场的物理空间随时间变化，导致建立在计算区域上的离散网格也要随时间变化，在 CFD 领域处理这类问题有三种方法，即运动嵌套网格、笛卡儿自适应网格和变形动网格技术。采用变形动网格实现边界运动原理简单，但是需要发展变形能力强和计算效率高的网格技术。

很多文献按照求解方程类型把网格变形方法分为代数方法和偏微分方程方法两类，本书按照构造思想分为物理比拟、椭圆光顺、插值、运动子网格和变拓扑方法五种方法。网格变形有三个基本要求：变形中不出现失效单元，保持较好品质；能够精确描述边界，即保证网格是贴体的；不能造成 CFD 求解器计算精度和效率大幅度降低。下面按照这三条标准来评价以上五种方法的特点。

### 1.2.1 物理比拟方法

这是一类将网格点的运动比拟为某种物理过程的网格变形方法，常用的包括弹簧比拟法和固体比拟法。

1990 年，Batina 首次将弹簧比拟法用于三角形网格的变形[21]。它的原理是将网格边视为弹簧，整个计算区域网格构成弹簧系统，在弹簧系统内部节点（网格点）列出力的平衡方程组，边界发生运动或变形后使弹簧网络受到拉伸和挤压，整个弹簧系统受力发生变化，通过求解弹簧网络的平衡方程来更新网格节点的位置。这种方法只考虑弹簧的拉压，在扭转变形时易出现网格折穿（snap-through）。1998 年，Farhat 等在二维网格顶点处施加扭转弹簧增加抗扭转能力取得实效，但在推广到三维网格遇到困难[22,23]。2000 年，Blom 等根据三角形单元边对应的顶角来修正线弹簧刚度系数，提出半扭转弹簧方法[24]。2003 年，郭正等对四面体，采用不包含该边的二面角作为顶角，把这种方法推广到了三维情形，同时通过求解固体导热方程得到内部节点温度作为参数来增加动边界附近网格层的弹簧刚度系数，提高了网格变形能力[25]。弹簧方法一般只适用于三角形网格和四面体网格，应用于其他类型网格则需要剖分重构，例如，六面体单元剖分为 6 个四面体网格，这增加了计算量和实施难度，限制了该方法的应用。2005 年，Bottasso 等提出球点弹

簧方法，在以网格边构成的弹簧系统内再添加新弹簧，这些新弹簧的起点位于网格节点，终点止于该点在所对面内的垂足，如此一来，格点便为多面球所包围，从而避免折穿，可以用于四边形和六面体单元的网格变形[26,27]。弹簧比拟法所求解的力平衡方程组对角占优，采用 Jacobi 迭代或 Seidel 迭代较快收敛，因此得到大量应用，但变形能力比固体比拟法差。

固体比拟法是 Tezduyar 等 1992 年提出的，它将计算域视为弹性体，运动边界的位移作为变形载荷施加在弹性体上，每个网格节点由一组弹性力学基本方程进行控制，通过计算得到在变形载荷下网格节点的位移，从而得到新的网格位置[28]。弹性体方法的模型完备，具有比较成熟的计算方法，适用于任何网格类型，通过调整弹性模量、泊松比、添加源项等等改进措施，使其具有很强的网格变形能力，至今依然在广泛应用[29-38]。但弹性体方法需要求解偏微分方程组，计算量大，不适用于大规模问题。

还有其他的物理比拟法，如 Kennon 等提出的流动比拟法[39]和陈炎等提出的温度体比拟法[40-43]，因其缺少普适性，这里不再介绍。

### 1.2.2 网格光顺法

基于偏微分方程的网格生成算法很早就广泛应用[44]，1996 年 Löhner 等用于网格变形，通过求解 Laplace 方程把边界运动逐步传递到计算区域内部网格点，由于椭圆型方程具有在求解域内部不会产生极值的数学特性，这种方法得到的网格变形光滑过渡，因此称为网格光顺方法[44]。计算均匀扩散系数的 Laplace 方程得到的位移主要和网格点所处位置相关，同样变形相对于不同网格单元的效果不一样，通过调整扩散系数让小单元经历较小变形、大单元经历较大变形，提高网格变形能力[45-50]。近几年探索从双调谐方程和双椭圆方程对网格实施变形[51,52]。

弹性力学基本方程和 Laplace 方程的数学性质类似，实际应用也表明网格光顺法和固体比拟法相似，具有较强的网格变形能力，但是计算量大，实施较复杂。

### 1.2.3 插值方法

采用插值函数根据已知边界网格点位移插值得到内部网格点位移，分为显式和隐式两种。采用代数插值、多项式插值、样条插值等函数，沿着网格线根据确定的边界位置直接计算网格内点位置的显式插值过去在激波装配法、气动弹性计算中常用，仅适用于结构网格和简单外形。近几年通过采用基于距离的插值函数建立了适用于任何类型的网格单元的显式插值[53-56]，其中 1968 年 Shepard 提出的逆距加权插值(inverse distance weighting interpolation，IDW)[57]采用未知点到已知点距离倒数的权重，通过已知点集的数据的加权平均得到未知点处的数据，IDW 算法用于网格变形取得很好效果[47-60]。显式插值具有很高的计算效率，适合于大

规模的并行计算,但是不考虑连接关系的“点对点”特性使其变形后网格质量很快下降,外形或边界运动等情况远不如考虑相邻点影响的隐式插值。

常用的隐式插值是径向基函数法(radial basis functions,RBFs),采用点与点之间径向距离的函数,在已知运动边界离散点数据条件下,通过求解线性方程组得到插值函数的系数,然后得到内部网格点位置。该算法数据结构简单,可以应用于任何类型网格,并且有完备的理论基础[61]。2007年,Boer等用于网格变形,发现计算插值系数需要的线性方程组规模是边界点数目的平方,对于三维问题计算量很大[62],后来对这种方法进行改进减少了计算量,但算法变得较为复杂[63-66]。

尽管插值方法很少发生变形失败,但是主要考虑距离信息的特性使其难以保证网格质量,隐式插值计算效率也值得考虑。

### 1.2.4 运动子网格方法

运动子网格法早期特指Delaunay图映射方法,是Liu等在2006年提出的一种动网格方法[67],在所有动边界网格点和若干控制点基础上生成Delaunay图,也就是子网格,计算网格包含在子网格内部,每个计算网格点必然属于子网格中一个单元,可以在子网格单元内部的相对位置坐标,即得到计算网格节点和子网格单元的映射关系,边界运动牵引子网格运动,利用映射关系便可以得出计算网格节点在变形后的坐标。Delaunay图映射方法具有很高的计算效率,但对于复杂外形和大幅度运动,网格质量很快下降,子网格易出现交叉,重新生成需要花费时间,近年来提出一些改进措施[68-70],其中周璇等利用弹簧比拟法计算运动子网格的变形[70],采用运动子网格法表述这类方法更合适。

### 1.2.5 变拓扑方法

以上列举的网格变形方法,网格点之间的连接关系不改变,在动边界经历大位移和大变形时,网格质量必然会变差,如果放弃网格点之间连接关系不变的限制,则动网格的变形能力会进一步增强。2011年,Olivier等用弹性体比拟法模拟叶片旋转,允许改变网格节点间的连接关系,极大增强变形能力,实现了二维叶片的360°旋转[71,72],Guardone等采用对质量差的网格单元进行边交换也具有同样效果[73,74]。2013年,Wang等用弹簧比拟法进行二维网格变形,通过改变网格节点间的连接关系模拟了双翼型扑动流场。变拓扑方法的数据结构变化较频,需要求解器进行改造,实现较为复杂。

最新的趋势同时采用两种以上方法的组合对网格进行变形,即混合方法。文献[75]用弹簧比拟法计算多块结构网格的块顶点位移,然后用超限插值方法更新块内网格节点坐标。我们结合径向基函数方法和运动子网格方法各自的优点提出RBFs-MSA网格变形算法也属于混合方法[76],很好的协调了变形能力和计算

效率。

第 2 章在讨论 Euler 坐标系和 Lagrange 坐标系的基础上，论证了 ALE 形式的控制方程本质上是从 Euler 坐标系的流体动力学方程组出发，通过坐标变换推导得到的，给出了包括湍流、异质流、非平衡流的统一的 ALE 形式控制方程。第 6 章介绍括弹簧比拟法、空间插值方法和混合方法。

为了消除网格变形过程引入的误差，需要发展相应的几何守恒律。文献[20]详细讨论了离散几何守恒律，通过数学模型证明它是流场参数假设为常数的 ALE 形式流体控制方程的退化形式，不是独立的新约束条件，不满足几何守恒律引起非物理解的机理是由于网格变形过程中体积增量与面积运动形成的体积不等而产生误差。在非定常流场的计算过程中，随着时间推进步数增加，误差不断累积，因此必须构建几何守恒律算法来消除这种误差。第 6 章对国内外文献构造的几何守恒律进行分类，并介绍了我们提出的新思路。

用变形网格模拟复杂工程中遇到的大变形问题常需要进行局部网格重构，这又涉及新旧网格之间信息传递。插值会产生新的误差，导致激波分辨率降低或非物理波动。文献[20]提出一种基于动网格的信息传递方法，理论上从旧网格参数得到新网格参数的过程中不产生额外误差。在网格尺度相差较大，同时流场参数变化剧烈的情况下，流场信息传递中物理量的守恒性直接影响计算的稳定性和精度，这时非常需要守恒插值方法。在第 7 章介绍这种信息传递和守恒插值的新算法。

## 1.3 流固耦合问题

本书关心包含有相对运动边界的非定常流动的应用，主要包括两大类流固耦合问题。

① 物体表面变形对流场影响不容忽视的情况，称为物体变形引起的流固耦合(fluid Structure)问题。

② 流场中有多个物体，它们之间存在相对运动，而且大部分情况下运动还受到流场的影响，需要采用流体和刚体(fluid rigid)的耦合计算，为区别于前一类流固耦合问题，书中称为多体分离问题。

自然界中的大部分流动现象中都存在着流固耦合问题，从空中飞翔的鸟儿到水里嬉戏的鱼儿，从生生不息的呼吸系统到支撑生命的心血管系统，从声声汽笛到滚滚车轮……，都包含着运动边界和流体的相互作用。在飞行器设计中，研究这类流体与固体相互耦合作用的应用需求也很多。例如，飞行器结构不可能绝对刚硬，在气动力作用下会发生弹性变形，这种变形反过来又使气动力特性改变，对飞行器的操纵性和稳定性会产生影响，严重时会使结构破坏或造成飞行事故。随着飞行

速度提高、结构重量减小，气动弹性问题变得严重起来，颤振验证也因此成为设计飞机必须考查的项目而载入强度规范。这类流场的共同特点是物体外形随时间变化，运动界面与流体相互作用，形成高度非定常、非线性的动力学系统。流体与固体两种介质的动力学和运动学特性采用不同方程描述，相互作用通过界面耦合。

多体分离问题在航天与航空领域并不鲜见，其中最典型的是飞行器在大气层内飞行时发生的多体分离问题，如外挂物与载机分离、座舱盖/座椅的弹射、多级火箭的级间分离、多弹头再入、子母弹抛撒、爆炸弹片飞散、冲击波驱动物体运动等。这类问题的共同之处在于相对气流高速运动的两个或多个物体之间有相对运动，形成的流场和物体受到的气动力具有明显的非定常流动特点，简单采用相对运动原理从“静止空气中的运动物体”变为“运动空气中的静止物体”难以描述流体动力学本质机理。由于物体相对运动形成的非定常流体作用力反过来又影响物体的运动特性，因此研究多体分离问题大多需要采用空气动力学和飞行力学相互耦合的方法。

由于流体方程和固体(刚体)方程的数学特性及其求解算法不同，采用基于动网格的有限体积法模拟流固耦合现象时，经常通过流体和固体之间的作用仅发生在两相交界面上的解耦算法实现流固耦合。在航天与航空领域的很多工程应用中，非常关心两个物体从接触到分离瞬态过程，多体分离常采用火箭发动机或火工品作为分离驱动力，需要考虑化学反应。第五章介绍高精度的流固耦合界面算法，第八章讨论和建立基于非结构网格的非平衡流动算法，在第九章介绍解决“接触/脱离”计算区域拓扑变化的虚拟网格通气技术。

## 参考文献

[1] 帕坦卡. 传热与流体流动的数值计算. 张政，译. 北京：科学出版社，1984.
[2] 陶文铨. 数值传热学. 西安：西安交通大学出版社，1988.
[3] 程心一. 计算流体动力学. 北京：科学出版社，1984.
[4] 朱家鲲. 计算流体力学. 北京：科学出版社，1985.
[5] 马铁犹. 计算流体力学. 北京：北京航空航天大学出版社，1986.
[6] 吴江航. 计算流体力学的理论、方法及应用. 北京：科学出版社，1988.
[7] 张涤明. 计算流体力学基础. 广州：中山大学出版社，1991.
[8] 苏铭德. 计算流体力学基础. 北京：清华大学出版社，1997.
[9] 张涵信. 计算流体力学—差分格式原理和应用. 北京：国防工业出版社，2003.
[10] 吴子牛. 计算流体力学. 北京：科学出版社，2001.
[11] 中国人民解放军总装备部. 计算流体力学及应用. 北京：国防工业出版社，2003.
[12] 傅德熏. 计算流体力学. 北京：高等教育出版社，2002.
[13] 李万平. 计算流体力学. 武汉：华中科技大学出版社，2004.
[14] 刘儒勋. 计算流体力学的若干新方法. 北京：科学出版社，2004.