GAOZHONG SHUXUE

SHUXUE

高中数学培优系列

高中数学培优

解题错点诊断与方法引导

■ 张传鹏 刘 炜 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学培优:解题错点诊断与方法引导

张传鹏　刘　炜　主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学培优：解题错点诊断与方法引导/张传鹏，刘炜主编. 一杭州：浙江大学出版社，2010.7
ISBN 978-7-308-07750-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… ②刘… Ⅲ. ①数学课一高中一解题 Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 123438 号

高中数学培优：解题错点诊断与方法引导
张传鹏 刘 炜 主编

责任编辑 杨晓鸣
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 德清县第二印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 10.25
字　　数 200 千
版 印 次 2010 年 7 月第 1 版 2010 年 7 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-07750-7
定　　价 18.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话（0571）88925591

编写说明

学生在高考或平时测试中都难免会出现各种各样的错误，因此进行高考复习的关键在于课后进行总结反思、分析得失、找出错误环节，不要盲目地毫无针对性的做题。这就需要学生具备两种意识：纠错意识和知识归纳能力。为此我们有针对性编写了本书。本书分两部分，前面部分为高中数学易错问题解析，后面部分为高中数学专题引导。

高中数学易错问题解析部分，根据学生在实际学习中易犯的错误，归纳错误形式，针对每个章节，列出学生的易错点，举例分析错解中错误的原因，帮助学生纠错，在此基础上给出正确的解答，并在每个章节后面设置了同类型的试题，供学生举一反三练习，巩固该知识点。该部分按照教材的先后顺序共分为13个专题，涵盖了高中数学所有的知识点。

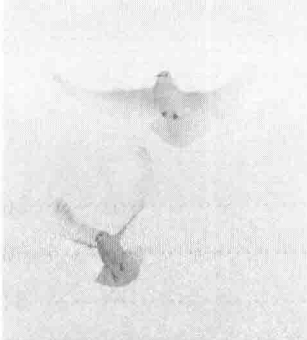
高中数学专题引导部分在认真分析近年全国各地的高考试卷基础上，对于出现频率较高的热点试题进行分类总结，并给出此类问题的求解策略。本部分按照教材的先后顺序共分为22个专题，每个专题都针对一类热点问题，透彻分析。

本书的选材新颖，所选试题均具有代表性，选题由浅入深，注意一题多解、一题多变、一题多用。高中数学易错问题解析详细，使学生不仅知其然，而且知其所以然。专题引导部分，方法新颖、有效，在给出常规解法的基础上都会去寻找更好的解题方法。本书不仅仅是解题方法上的引导，更是渗透着各种数学思想，数形结合思想、函数与方程思想、分类讨论思想、化归思想在本书中体现的淋漓尽致。

本书适合的读者范围广泛，既可以作为高中生复习应考有力助手，培养学生的解题能力，发展学生的解题思路，也可以作为教师备课的参考资料，同时也适合高等师范院校数学专业的学生阅读。

本书是全体编撰人员精心设计、用心编写而成的，但由于时间仓促，编写中恐有差错，恳请广大读者和专家批评指正，以便不断修正和完善。

2010年6月于杭州



目 录

第一章　解题错点诊断

第二章　方法引导

第一章　解题错点诊断

1　集合易错问题点击

集合论是现代数学的重要基础,它与高中数学许多内容有着广泛的联系.作为一种思想、语言和工具,集合的知识已经渗透到自然科学的众多领域,它是高中阶段数学的基础内容,但由于初高中数学学习的差异,同时又因为集合概念抽象,符号术语多,对于初学集合的同学来说,常常因为概念不清晰、理解不透彻等原因,容易造成失误.针对同学们学习中的薄弱环节,本文列出了同学们易错之处,希望能帮助同学们加深理解,提高学习效果.

一、不会表示集合

【例 1】　能够表示方程组$\begin{cases}x+y=7\\x-y=1\end{cases}$的解集的是________.

错解:$\{3,4\}$、$\{(3,4)\}$、$\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$、$\{x=3,y=4\}$

错误点拨:集合表示方法不清楚.$\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$虽然是方程组的解集,但不是集合的形式;$\{3,4\}$表示有 2 个元素的集合,$\{x=3,y=4\}$中的元素是两个方程.

正解:$\{(x,y)\mid x=4$ 且 $y=3\}$.

二、忽视代表元素的属性

【例 2】　集合 $A=\{y\mid y=2-x^2,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{y\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$,则 $A\cap B=$________.

错解:由$\begin{cases}y=2-x^2\\y=x^2\end{cases}$,解得$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$,所以 $A\cap B=\{(1,1),(-1,1)\}$.

错误点拨：注意到两个集合中的元素 y 都是各自函数的函数值，因此集合 A 中元素 y 的取值范围是 $y \leqslant 2$，集合 B 中元素 y 的取值范围是 $y \geqslant 0$，所以 $A \cap B = \{y \mid 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

三、忽视集合元素的互异性

【例 3】 集合 $A = \{1,3,a\}$，$B = \{1,a^2 - a + 1\}$，且 $B \subseteq A$，求 a 的值.

错解：因为 $B \subseteq A$，所以 $a^2 - a + 1 \in A$，因此 $a^2 - a + 1 = 3$，或 $a^2 - a + 1 = a$，所以 $a = -1$，或 $a = 1$，或 $a = 2$.

错误点拨：忽视集合元素的互异性.

正解：经过检验，当 $a = -1$ 时，集合 $A = \{-1,1,3\}$，$B = \{1,3\}$，满足条件；

当 $a = 1$ 时，集合 $A = \{1,3,1\}$，$B = \{1,1\}$，集合元素违反了互异性，故 $a \neq 1$.

当 $a = 2$ 时，集合 $A = \{1,2,3\}$，$B = \{1,3\}$，满足题目条件.

四、遗漏对空集的讨论

【例 4】 若集合 $M = \{x \mid 2x^2 - 5x - 3 = 0\}$，$N = \{x \mid mx = 1, x \in \mathbf{R}\}$且 $N \subseteq M$，求实数 m 的值.

错解：因为 $M = \left\{-\dfrac{1}{2}, 3\right\}$，所以$\dfrac{1}{m} = -\dfrac{1}{2}$，或$\dfrac{1}{m} = 3$，即所以 $m = -2$ 或 $m = \dfrac{1}{3}$.

错误点拨：上述解法中漏掉了 $N = \varnothing$，即 $m = 0$ 的情形，因为空集是任何集合的子集，所以 $m = -2$ 或 $m = \dfrac{1}{3}$ 或 $m = 0$.

【例 5】 设 $A = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$，$B = \{x \mid ax - 1 = 0\}$，若 $A \cap B = B$，求实数 a 组成的集合的子集有多少个？

错解：集合 A 化简得 $A = \{3,5\}$，因为 $A \cap B = B$，所以 $B \subseteq A$，

所以 $ax - 1 = 0$ 的解为 3 或 5，代入得 $a = \dfrac{1}{3}$ 或$\dfrac{1}{5}$，其子集共有 $2^2 = 4$ 个.

错误点拨：此题由条件 $A \cap B = B$ 易知 $B \subseteq A$，由于空集是任何非空集合的子集，但在解题中极易忽略这种特殊情况而造成求解满足条件的 a 值产生漏解现象.

正解：集合 A 化简得 $A = \{3,5\}$，由 $A \cap B = B$ 知 $B \subseteq A$，

（Ⅰ）当 $B = \varnothing$ 时，即方程 $ax - 1 = 0$ 无解，此时 $a = 0$ 符合已知条件.

（Ⅱ）当 $B \neq \varnothing$ 时，即方程 $ax - 1 = 0$ 的解为 3 或 5，代入得 $a = \dfrac{1}{3}$ 或$\dfrac{1}{5}$. 综上满足条件的 a 组成的集合为$\left\{0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}\right\}$，故其子集共有 $2^3 = 8$ 个.

五、误用集合语言

【例 6】　设集合 $A=\{x \mid x=(2n+1)\pi, n\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{y \mid y=(4n\pm 1)\pi, n\in \mathbf{Z}\}$，求 A 与 B 的关系.

错解： $B\subseteq A$.

错误点拨： 误用集合符号.

正解： 设 $x\in A$，即 $x=(2n+1)\pi$，$n\in \mathbf{Z}$.

当 $n=2k$ 时，$x=(4k+1)\pi$，$x\in B$；

当 $n=2k-1$ 时，$x=(4k-1)\pi$，$x\in B$，所以 $A\subseteq B$.

设 $y\in B$，即 $y=(4k\pm 1)\pi$，$k\in \mathbf{Z}$，因为 $4k\pm 1$ 是奇数，所以 $y\in A$. 所以 $B\subseteq A$.

综上可知 $A=B$.

六、忽略考虑边界值

【例 7】　$A=\{x \mid x<-2 \text{ 或 } x>10\}$，$B=\{x \mid x<1-m \text{ 或 } x>1+m\}$ 且 $B\subseteq A$，求 m 的范围.

错解： 因为 $B\subseteq A$，所以：$\begin{cases}1-m<-2\\1+m>10\end{cases}$，$m>9$.

错误点拨： 两个不等式中是否有等号，常常搞不清楚. 正确的处理方法是对端点进行单独考虑.

正解： 因为 $B\subseteq A$，所以：$\begin{cases}1-m\leqslant -2\\1+m\geqslant 10\end{cases}$，$m\geqslant 9$.

学以致用

1. 设集合 $A=\{x \mid x=\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}, k\in \mathbf{Z}\}$，若 $x=\frac{9}{2}$，则下列关系正确的是　　(　　)

A. $x\subseteq A$　　B. $x\in A$　　C. $\{x\}\in A$　　D. $\{x\}\subseteq A$

2. 集合 $P=\{m \mid -1<m\leqslant 0\}$，$Q=\{m\in \mathbf{R} \mid mx^2+4mx-4<0$ 对任意 x 恒成立$\}$，则下列关系中成立的是　　(　　)

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $Q\subsetneqq P$　　C. $P=Q$　　D. $P\cap Q=Q$

3. 设 P 和 Q 是两个集合，定义集合 $P-Q=\{x \mid x\in P, \text{且 } x\notin Q\}$，如果 $P=\{x \mid \log_3 x<1\}$，$Q=\{x \mid |x|<1\}$，那么 $P-Q$ 等于________.

4. 设 A,B 是非空集合，定义 $A\times B=\{x \mid x\in A\cup B \text{ 且 } x\notin A\cap B\}$，已知 $A=\{x \mid y=\sqrt{2x-x^2}\}$，$B=\{y \mid y=2^x, x>0\}$，则 $A\times B$ 等于________.

5. 已知集合 $A=\{x \mid |x-a|<ax, a>0\}$，若函数 $f(x)=\sin\pi x-\cos\pi x$ 在 A 上单调递增，则求 a 的最大值.

2 函数中易错问题解析

函数是整个高中数学的重点，其中函数思想是最重要的数学思想方法，函数问题在历年的高考中都占据相当大的比例. 从近几年来看，对本部分内容的考察形式稳中求变，向着更灵活的方向发展. 函数题目由于灵活多变，是学生出现错误的多发之地.

一、不理解函数的定义

【例 1】 函数 $y=f(x)$ 的图象与一条直线 $x=a$ 有交点个数是 ( )

A. 至少有一个　　B. 至多有一个　　C. 必有一个　　D. 有一个或两个

错解： 选 A、C 或 D.

错误点拨： 不理解函数的定义（函数是从非空数集 A 到非空数集 B 的映射，故定义域内的一个 x 值只能对应一个 y 值）.

正解： 正确答案为 B.

【例 2】 已知 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，$g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0;\end{cases}$ 试判断函数 $f(x)$，$g(x)$ 是否表示同一函数？

错解： 是表示同一函数.

错误点拨： 函数 $f(x)$，$g(x)$ 若表示同一函数，则函数的定义域值域和对应法则都要一致.

正解： 由于函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以它们不是同一函数.

二、对定义域的关注度不够

【例 3】 已知 $f(x)=\log_a\dfrac{1-mx}{x-1}$ 是奇函数（其中 $a>0, a\neq 1$），求 m 的值.

错解： 因为 $f(-x)+f(x)=\log_a\dfrac{1+mx}{-x-1}+\log_a\dfrac{1-mx}{x-1}=\log_a\dfrac{1-m^2x^2}{1-x^2}=0$

对定义域内的任意 x 恒成立，所以 $\dfrac{1-m^2x^2}{1-x^2}=1\Rightarrow(m^2-1)x^2=0\Rightarrow m=\pm 1$.

错误点拨： 本题错解中没有考虑函数的定义域，$x\neq 1$.

当 $m=1$ 时 $f(x)=0(x\neq 1)$ 不是奇函数，所以 $m=1$ 要舍掉.

正解： $m=-1$.

【例 4】 求函数 $y=\log_{0.7}(x^2-3x+2)$ 的单调区间.

错解： 函数由基本函数 $y=\log_{0.7}t$、$t=x^2-3x+2$ 复合而成，

显然 $y=\log_{0.7}t$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递减的，

而 $t=x^2-3x+2$ 在 $(-\infty,1.5)$，$(1.5,+\infty)$ 上分别是单调递减和单调递增的. 根据复合函数的单调性的规则得：

函数 $y=\log_{0.7}(x^2-3x+2)$ 在 $(-\infty,1.5)$ 上单调递增、在 $(1.5,+\infty)$ 单调递减.

错误点拨： 本题错解中没有考虑函数的定义域，在 $x\in(-\infty,1.5)\cup(1.5,+\infty)$ 时，不能保证真数为正.

正解： 函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$，

分解基本函数为 $y=\log_{0.7}t$、$t=x^2-3x+2$.

显然 $y=\log_{0.7}t$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递减的，而 $t=x^2-3x+2$ 在 $(-\infty,1)$，$(2,+\infty)$ 上分别是单调递减和单调递增的. 根据复合函数的单调性的规则得：

函数 $y=\log_{0.7}(x^2-3x+2)$ 在 $(-\infty,1)$，$(2,+\infty)$ 上分别单调递增、单调递减.

三、忽视函数奇偶性存在的前提

【例 5】 判断函数 $f(x)=\dfrac{\lg(1-x^2)}{|x-2|-2}$ 的奇偶性.

错解： $f(-x)=\dfrac{\lg(1-x^2)}{|x+2|-2}\neq f(x)$，$f(-x)=\dfrac{\lg(1-x^2)}{|x+2|-2}\neq -f(x)$.

所以函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

错误点拨： 此题常犯的错误是不考虑定义域，函数奇偶性存在的前提是函数定义域关于原点对称，所以应先求函数定义域，再根据函数定义域对函数解析式进行化简.

正解： 由函数的解析式知 x 满足 $\begin{cases}1-x^2>0\\ |x-2|\neq\pm 2\end{cases}$ 即函数的定义域为 $(-1,0)\cup(0,1)$.

定义域.

定义域关于原点对称，在定义域下 $f(x)=\dfrac{\lg(1-x^2)}{-x}$ 易证 $f(-x)=-f(x)$，奇偶性.

即函数 $f(x)$ 为奇函数.

四、错用指数、对数函数性质

【例 6】 函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$，当 $x\in[2,+\infty)$ 时，$|y|\geqslant 1$，则 a 的取值范围是 ( )

A. $a\geqslant 2$ 或 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$　　B. $a\leqslant 2$ 或 $a\geqslant\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}\leqslant a<1$ 或 $1<a\leqslant 2$　　D. $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$

错解： 只想到 $a>1$ 一种情况，选 D.

错误点拨： 指数、对数函数的底数是字母而没分类讨论.

正解： 正确答案为 C.

【例 7】 已知函数 $y=\log_a(x^2+mx+1)(a>0,a\neq 1)$，若值域为 $(-\infty,+\infty)$，求 m 的取值范围.

错解： $\Delta=m^2-4<0$，解得：$-2<m<2$.

错误点拨： 对对数函数的性质不理解. 这是一个由对数函数 $y=\log_a v$ 与二次函数 $v=x^2+mx+1$ 复合而成的“对数型函数”的问题. 而后者是要求在复合函数 $y=\log_a(x^2+mx+1)(a>0,a\neq 1)$ 的定义域内，二次函数 $v=x^2+mx+1$ 的值域是 $(0,+\infty)$，故应有 $\Delta\geqslant 0$.

正解： 设 $v=x^2+mx+1$，则 $y=\log_a v$. 因为函数 y 的值域是 $(-\infty,+\infty)$，
所以 $\Delta=m^2-4\geqslant 0$，解得：$m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2$.

五、解决抽象函数能力不够

【例 8】 函数 $y=f(2x-1)$ 是偶函数，则函数 $y=f(2x+1)$ 的对称轴是 ( )

A. $x=-1$　　B. $x=0$　　C. $x=\frac{1}{2}$　　D. $x=-\frac{1}{2}$

错解： $y=f(2x+1)=f\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$，函数 $f\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$ 的图象由函数 $y=f(2x)$ 的图象整体向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位，所以选 D.

错误点拨： 对抽象函数不理解，$y=f(2x-1)$ 是偶函数，说明 $y=f(2x-1)$ 的图象关于 y 轴对称，而不是 $y=f(2x)$，或者 $y=f(x)$ 图象关于 y 轴对称.

正解： $y=f(2x+1)=f[2(x+1)-1]$，其图象由函数 $y=f(2x-1)$ 的图象向左平移 1 个单位而得到. 因为 $y=f(2x-1)$ 是偶函数，说明 $y=f(2x-1)$ 的图象关于 y 轴对称，函数 $y=f(2x+1)$ 的对称轴是 $x=-1$，所以选 A.

学以致用

1. 在同一坐标系内，函数 $f(x)=2^{x+1}$，$g(x)=2^{1-x}$ 的图象关于　（　）

A. 原点对称　　B. x 轴对称

C. y 轴对称✓　　D. 直线 $y=x$ 对称

2. 函数 $f(x)=(1-x)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 的奇偶性为＿＿＿＿

3. 设 $a>0$，且 $a\neq 1$，试求函数 $y=\log_a(4+3x-x^2)$ 的单调区间.

4. 设函数 $f(x)$ 定义于实数集上，对于任意实数 x,y，$f(x+y)=f(x)f(y)$ 总成立，且存在 $x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)\neq f(x_2)$，求函数 $f(x)$ 的值域.

$(0,+\infty)$　　$f(x+y)=f(x)f(y)$　　$f(0)=1$

3　导数中易错问题剖析

导数是微积分的初步知识，是研究函数，解决实际问题的有力工具，在解决数学问题时极为方便，尤其是利用导数求函数的单调性、极值、最值和切线的方程，但是笔者在教学过程中，发现同学们用导数解题还存在许多误区.

一、导数的定义理解不清

【例 1】 已知函数 $f(x)=\log_a x+1$，当 $\Delta x\to 0$ 时，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$ 的值.

错解： 因为 $f(x)=\log_a x+1$，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}\log_a e$，

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=f'(1)=\log_a e$.

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

错误点拨： 导数定义是当 $\Delta x\to 0$ 时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 的值. 式中的增量 Δy 随变量 Δx 的变化而变化，因此式中分子与分母的变量 Δx 应保持一致.

正解： 当 $\Delta x\to 0$ 时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=-2f'(1)=-2\log_a e$.

二、忽略考虑函数的定义域

【例 2】 求函数 $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{1}{2}x^2-x+5$ 的单调递增区间.

错解：由 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}>x+1$ 得：$(x+1)^2<1$，所以 $-2<x<0$，

故所求的单调递增区间为 $(-2,0)$.

错误点拨：研究函数的单调性，须先考虑函数的定义域；解分式不等式，一般先转化为一边为零的形式.

正解：函数的定义域为 $(-1,+\infty)$；由 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-x-1>0$ 得：$\dfrac{x(x+2)}{x+1}<0$，即：$x<-2$ 或 $-1<x<0$. 综上所述，所求的单调递增区间为 $(-1,0)$.

【例 3】 已知曲线 $y=\dfrac{x^2}{4}-3\ln x$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线斜率是 $\dfrac{1}{2}$，求 x_0 的值.

错解：曲线 $y=\dfrac{x^2}{4}-3\ln x$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线斜率是 $\dfrac{1}{2}$，即函数 $y=\dfrac{x^2}{4}-3\ln x$ 在 x_0 处的导数值是 $\dfrac{1}{2}$，所以 $y'=\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}=\dfrac{1}{2}$，得 $x^2-x-6=0$，解得 $x=-2$ 或 $x=3$.

错误点拨：应该先考虑函数的定义域.

正解：函数 $y=\dfrac{x^2}{4}-3\ln x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，所以 $x=-2$ 舍去，$x_0=3$.

三、错用函数单调的充要条件

【例 4】 已知函数 $f(x)=ax^3+3x^2-x+1$，$(a\neq 0)$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上是减函数，求实数 a 的取值范围.

错解：$f'(x)=3ax^2+6x-1$，因为 $f(x)$ 是减函数，所以 $f'(x)<0$，

即 $f'(x)=3ax^2+6x-1<0(x\in\mathbf{R})$，故 $\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$，解得 $a<-3$.

错误点拨：$f'(x)>0$ 能推出 $f(x)$ 为增函数，但反之不一定. 如函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，但 $f'(x)\geqslant 0$，所以 $f'(x)>0$ 是 $f(x)$ 为增函数的充分不必要条件. 所以此类问题，用 $f'(x)\geqslant 0$ 或 $f'(x)>0$（$f'(x)\leqslant 0$ 或 $f'(x)<0$）解都有问题. 正确的解法是：先看 $f'(x)>0$（$f'(x)<0$）的情况，然后验证 $f'(x)=0$ 的情况.

正解：$f'(x)=3ax^2+6x-1$.

(1) 当 $f'(x)<0$ 时，则 $f'(x)=3ax^2+6x-1<0(x\in\mathbf{R})$.

故 $\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$，解得 $a<-3$.

(2) 当 $a=-3$ 时，$f(x)=-3x^3+3x^2-x+1=-3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^3+\dfrac{8}{9}$.

易知此时函数也在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，综上实数 a 的取值范围是 $a\leqslant -3$.

四、混淆在某点处的切线与过某点的切线

【例 5】 已知函数 $f(x)=x^3-x+3$. 求过点 $P(1,3)$ 的曲线的切线方程.

错解： 因为 $f(x)=x^3-x+3$. 所以 $f'(x)=3x^2-1$. 所以 $f'(1)=2$.

所以过点 $P(1,3)$ 的曲线的切线方程为 $y-3=2(x-1)$，即 $2x-y+1=0$.

错误点拨： 根据曲线切线的定义，曲线的切线与曲线的交点个数未必为 1. 一般地，若点 A 为曲线的切点，则过点 A 的切线方程是一条；若点 A 不为曲线上的切点，则过点 A 的切线可能有多条.

正解： 经过点 $P(1,3)$ 的曲线的切线方程有两种情形.

(1) P 点为切点时易知切线方程为 $2x-y+1=0$；

(2) P 点不为切点时，设切点为 $Q(x_0,y_0)$，其中 $x_0\neq 1$，则有

$$\begin{cases} y_0=x_0^3-x_0+3 \\ 3x_0^2-1=\dfrac{y_0-3}{x_0-1} \end{cases}，解得\begin{cases} x_0=-\dfrac{1}{2}, \\ y_0=\dfrac{27}{8}, \end{cases} 或\begin{cases} x_0=1, \\ y_0=3. \end{cases}（舍去）$$

此时切线方程为 $y-3=-\dfrac{1}{4}(x-1)$，即 $x+4y-13=0$.

综上可知，所求切线有两条，其方程为 $2x-y+1=0$，$x+4y-13=0$.

五、极值点定义理解不清

【例 6】 函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$ 在 $x=1$ 处有极值 10，求 a,b 的值.

错解： $f'(x)=3x^2+2ax+b$，由题意知 $f'(1)=0$ 且 $f(1)=10$，

即 $2a+b+3=0$ 且 $a^2+a+b+1=10$，$a=4,b=-11$，或 $a=-3,b=3$.

错误点拨： $f'(x)=0$ 是 $f(x_0)$ 为极值的必要但不充分条件. 判断 x_0 是不是极值点需要检查 x_0 两侧 $f'(x)$ 的符号. 如果左正右负，那么 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值；如果左负右正，那么 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值；如果符号相同，那么 $f(x_0)$ 不是函数 $f(x)$ 的极值. 此题就没有讨论 a、b 在两种情况下，$f(1)$ 是不是为极值.

正解： $a=4,b=-11$.

六、函数性质盲目类比

【例 7】 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{a}{x}$，若 $f(x)<x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

错解： 由 $f(x)<x$，得 $\ln x-\dfrac{a}{x}-x<0$，令 $g(x)=\ln x-\dfrac{a}{x}-x$，若 $g(x)<0$ 在

$[1,+\infty)$ 上恒成立，则需$\begin{cases} g'(x)\leqslant 0 \\ g(1)<0 \end{cases}$，即$\begin{cases} \dfrac{-x^2+x+a}{x^2}\leqslant 0 \\ a>-1 \end{cases}$ 在$[1,+\infty)$上恒成立，

解得：$-1<a\leqslant -\dfrac{1}{4}$.

错误点拨： 错解中，$g(x)<0$ 在$[1,+\infty)$上恒成立，并不需要$\begin{cases} g'(x)\leqslant 0 \\ g(1)<0 \end{cases}$，本解的错误是把函数 $g(x)$ 看成了一次函数，要求 $g(x)$ 在$[1,+\infty)$上递减，且 $g(x)$ 在$[1,+\infty)$上的最大值 $g(1)<0$. 事实上，$g(x)<0$ 在$[1,+\infty)$上恒成立，$g(x)$ 在$[1,+\infty)$上都不一定要求是单调的.

正解： 由 $f(x)<x$，得 $\ln x-\dfrac{a}{x}-x<0$，因为 $x\geqslant 1$，所以 $a>x\ln x-x^2$.

令 $g(x)=x\ln x-x^2$，要使 $a>x\ln x-x^2$ 在$[1,+\infty)$上恒成立，只需 $a>g(x)_{\max}$.

$g'(x)=\ln x-2x+1$，令 $\varphi(x)=\ln x-2x+1$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-2$.

因为 $x\geqslant 1$，所以 $\varphi'(x)<0$，所以 $\varphi(x)$ 在$[1,+\infty)$上单调递减，

所以 $\varphi(x)\leqslant\varphi(1)=-1<0$，所以 $g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在$[1,+\infty)$上单调递减，

则 $g(x)\leqslant g(1)=-1$.

所以 a 的取值范围是$(-1,+\infty)$.

学以致用

1. 已知 $f(x)=ax^3-ax+1$ 为$[1,+\infty)$内的增函数，求实数 a 的取值范围.

2. 已知 $f(x)$ 是可导的偶函数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{2x}=-2$，则曲线 $y=f(x)$ 在$(-1,2)$处的切线方程是________.

3. 设 $a>0$，且 $a\neq 1$，试求函数 $y=\log_a 4+3x-x^2$ 的单调区间.

4. 设函数 $f(x)=xe^{kx}(k\neq 0)$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若函数 $f(x)$ 在区间$(-1,1)$内单调递增，求 k 的取值范围.

4　一元二次不等式中的四个忽视

一元二次不等式与方程、集合、函数、数列之间的关系紧密，它与代数、几何中许多知

识可有机结合，生成丰富多彩的数学问题，而解这类问题常用到分类讨论、数形结合等数学思想方法. 笔者在平时教学过程中归纳、总结了学生容易出错的一些问题，现作归类剖析，以飨读者.

一、忽视对一元二次方程根大小的讨论

【例 1】　解关于 x 的不等式 $x^2 - x - a^2 + a > 0$.

错解： 因为方程 $x^2 - x - a^2 + a = 0$ 的两个根为 $a, 1 - a$.

所以 $x^2 - x - a^2 + a > 0$ 的解集为 $\{x \mid x < 1 - a$，或 $x > a\}$.

错误点拨： 问题错在两个根 $a, 1 - a$ 的大小关系不确定，而却误认为 $a > 1 - a$，所以本题应该讨论两根的大小.

正解： 因为方程 $x^2 - x - a^2 + a = 0$ 的两个根为 $a, 1 - a$.

所以当 $a \geqslant 1 - a$，即 $a \geqslant \dfrac{1}{2}$ 时，不等式的解集为 $\{x \mid x < 1 - a$，或 $x > a\}$.

当 $a < 1 - a$，即 $a < \dfrac{1}{2}$ 时，不等式的解集为 $\{x \mid x < a$，或 $x > 1 - a\}$.

二、忽视一元二次方程有实根的条件

【例 2】　已知方程 $x^2 - 2(a + 1)x + 1 = 0$ 的两实根为 x_1、x_2，求 $x_1^2 + x_2^2$ 的最小值.

错解： $x_1 + x_2 = 2(a + 1)$，$x_1 \cdot x_2 = 1$，

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(a + 1)^2 - 2$.

所以当 $a = -1$ 时，$x_1^2 + x_2^2$ 的最小值为 -2.

错误点拨： $x_1^2 + x_2^2$ 的最小值为 -2 显然是错误的，错误的原因在于忽视了方程 $x^2 - 2(a + 1)x + 1 = 0$ 有实根的条件 $\Delta \geqslant 0$，这个条件限制了 $x_1^2 + x_2^2$ 最值的变化.

正解： 因为方程 $x^2 - 2(a + 1)x + 1 = 0$ 的两实根为 x_1, x_2，

所以 $\Delta \geqslant 0$，即：$4(a + 1)^2 - 4 = 4a^2 + 8a \geqslant 0$，解得：$a \leqslant -2$ 或 $a \geqslant 0$.

由根与系数的关系得：$x_1 + x_2 = 2(a + 1)$，$x_1 \cdot x_2 = 1$，

所以 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(a + 1)^2 - 2$. 所以当 $a = 0$ 或 $a = -2$ 时，$x_1^2 + x_2^2$ 的最小值为 2.

三、忽视对二次项系数为零的讨论

【例 3】　已知关于 x 的不等式 $(m^2 - 4)x^2 + (m + 2)x - 1 > 0$ 的解集为空集，求实数 m 的取值范围.

错解： 关于 x 的不等式 $(m^2 - 4)x^2 + (m + 2)x - 1 > 0$ 的解集为空集，