金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

考研数学决胜篇

考研数学大题满分技巧揭秘

数学三

便携记忆版

金榜考研数学命题研究组 · 编

实用分析思路 | 经典解题范例 | 典型解答题 | 评分标准 | 阅卷人评析

- 本书可让曾想放弃的同学得高分！
- 本书可让能得高分的同学得满分！
- 抓住攻克考研数学最后一次机遇！

【双色印刷】

Yes, we can!

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

金榜图书

JINBANG BOOKS · SINCE 1997

考研数学 大题满分技巧

数学三

揭秘

便携记忆版

金榜考研数学命题研究组 · 编

本书专属 ______________________

我要认真、独立地学完本书内容。

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学大题满分技巧揭秘. 数学三/金榜考研数学命题研究组编. —西安:西安交通大学出版社,2014.12

ISBN 978-7-5605-6902-4

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①金… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ. ①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 287290 号

考研数学大题满分技巧揭秘. 数学三

主　　编:金榜考研数学命题研究组
责任编辑:邸双亮　荣西
封面设计:金榜图文设计室
出版发行:西安交通大学出版社
地　　址:西安市兴庆南路 10 号(邮编:710049)
电　　话:(029)82668315(总编办)
　　　　　(029)82668357　82667874(发行部)
印　　刷:保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本:850mm×1168mm　1/32
印　　张:6.75
字　　数:168 千字
版　　次:2015 年 10 月第 1 版
印　　次:2015 年 10 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5605-6902-4/O・487
定　　价:29.80 元

前　言

考研最后冲刺阶段，利用这宝贵时间提高数学答题能力，是考生至关重要的任务。数学是考研中的重中之重，而考研数学解答题94分，超过总分的一半。这些题目综合性强、抽象，解答起来需要严谨的推理和准确的计算。从以往考生的成绩来看，考生在解答题部分得分差距很大，直接导致数学成为最能在分数上拉开距离的考试科目。很多同学说，很想做好解答题，但就是做题无从下笔，或者做了也这错那错。

因此，我们为大家编写了这本《考研数学大题满分技巧揭秘》，以使同学们在考试中会解大题，能得高分，会做的题目力求不失分，部分理解的题目力争多得分。

本书中的题目经典，解答规范，适合考生综合复习使用。

书中的体例设计如下：

[读题联想]　如果目前为止同学们还对题中的基本概念、方法和原理不清楚，解题时肯定会碰到各种各样的问题，容易丢失一些基本分，所以同学们务必在最后完全吃透基础理论知识，深入理解基本概念、公式、定理和图表，掌握知识点。

[解题范例]　拓展解题方法，提高解题能力，规范答题格式。同学们要提高做题质量，每做完一题，就要总结其所覆盖的知识面并且归纳其所属题型，做到举一反三。希望同学们认真领会解题方法及其实质，并做到活学活用。同时，也要注意答题的方式、步骤，关键内容要写出来，一些简单过程可省略。

[阅卷者按]　帮助同学们寻找考试的感觉，使同学们保持清晰的复习思路，做题的同时感受真实考场上的氛围，尽快进入临考状态。

由于编者水平有限，本书中的不足与疏漏之处恳请读者批评指正。

祝大家复习顺利，进入理想的学校！

编　者

2015年10月

目 录

微积分

1 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{3}{n}}-3\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

读题联想　本题是求“1^{∞}”型未定式数列的极限.除利用极限的四则运算法则，洛必达法则以及等价无穷小代换外，还需要首先把数列极限转化为适当的函数极限.

本题要点：(1) 一般说来，对于1^{∞}型未定式$\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$，利用等价无穷小代换$\ln f(x)\sim f(x)-1$化为求极限$e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$，常能简化计算.

(2) 利用函数极限与洛必达法则求数列极限的理论根据是：

① 若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则对任何数列$\{x_n\}$，只要它满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，就有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

② 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则对任何数列$\{x_n\}$，只要它满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$且$x_n\neq x_0$，就有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

解题范例

【解】 设函数$f(x)=(e^{3x}-3\tan x)^{\frac{1}{x^2}}$和数列$x_n=\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$，

则　$f(x_n)=\left(e^{\frac{3}{n}}-3\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}(n=1,2,3,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0^+$.　　2 分

计算可得　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(e^{3x}-3\tan x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(e^{3x}-3\tan x)}{x^2}}=e^J$，　　4 分

其中

$$J=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(e^{3x}-3\tan x)}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{3x}-3\tan x-1}{x^2}$$　　6 分

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{3x}-\sec^2x}{x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{3x}\cos^2x-1}{x}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to0^+}(3e^{3x}\cos^2x-2e^{3x}\cos x\sin x)=\frac{9}{2}.$$　　9 分

故　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{3}{n}}-3\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=e^J=e^{\frac{9}{2}}$.　　10 分

阅卷者按　本题满分10分，是计算数列极限中常考题型.关键点是幂指型转化成指数型；数列不能直接应用洛必达法则，要转化成函数再求极限.

求 1^∞ 型极限 $J=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，除了用上述一般方法外，还可用如下方法：

$$J=\lim_{x\to x_0}\left(1+(f(x)-1)\right)^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot(f(x)-1)g(x)}$$

转化为求 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)$.

部分同学在计算出 $J=\dfrac{9}{2}$ 后，就结束了这一题的解答，这样的失误是很可惜的.

左脑休息室

20 个影响你一生的小改变(一)

Small, simple life changes can be powerful. Implementing some of these changes can literally change your entire life. How do you change? Take on one change at a time, and go slowly. Implement each change consistently so that it becomes a habit. Don't do too much too fast. What follows is a list of changes that are simple, yet incredibly powerful. Some are obvious and some aren't. I hope they serve as reminders of useful changes.

生活中一些细微简单的改变有着不可低估的作用。一些改变甚至可以改变你的整个生活。如何改变呢？一次做出一种改变，慢慢来，并始终如一地坚持，形成一种习惯。不要贪多求快。下面列出一些改变，虽然简单，作用却难以置信。有些作用明显，而有的不易觉察。我希望下列条目能提醒你去做一些有益身心的改变。

1. *Walk daily* / **每天散步**

We humans aren't supposed to be sedentary human beings. We are born to run, but even more so to walk.

人类不适于久座。我们生来善跑，走路更不在话下。

Walking every day is good for your physical health. But more importantly, it's good for your mind. Walking is a joy. You are outside without distractions. You may even see people. And there's few better ways to boast your mood.

每天散步有益于身体健康。更重要的是，它还有助于心理健康。在室外散步，令人愉快，远离烦恼，还可以接触人群。没有什么更好的方法比散步更能带给你好心情。

2 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 与 $J=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

读题联想 题中是 $n\to\infty$，求数列的极限，而数列是用正弦函数与数列复合而成的. 考虑到正弦函数的周期性和有界性，只要内部的数列可以表示成 π 的整数倍与一个收敛的数列之和.

本题要点：（函数极限与数列极限的关系） 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足：$x_n\neq x_0$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$.

解题范例

【解】 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi+n\pi)$ 1 分

记 $\alpha_n=(\sqrt{n^2+1}-n)\pi=\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 可知 $0<\alpha_n<\dfrac{\pi}{2n}$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 且 3 分

$$I=\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}\sin(n\pi+\alpha_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sin n\pi\cos\alpha_n+\cos n\pi\sin\alpha_n)=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\alpha_n.$$ 5 分

由于 $|(-1)^n\sin\alpha_n|\leqslant\alpha_n$，故 $I=0$. 6 分

$$J=\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi+n\pi).$$

记 $\beta_n=(\sqrt{n^2+n}-n)\pi=\dfrac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\dfrac{\pi}{2}$，故 8 分

$$J=\lim_{n\to\infty}\sin^2(n\pi+\beta_n)=\lim_{n\to\infty}(\sin n\pi\cos\beta_n+\cos n\pi\sin\beta_n)^2$$ 9 分

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\beta_n=\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$$ 10 分

阅卷者按 本题满分 10 分，难度适中，有一定的技巧性. 此题虽然是计算两个极限，但方法相同，故只要知道解法，后面就是简单计算题.

左脑休息室

雨打梨花深闭门，忘了青春，误了青春。赏心乐事共谁论？花下销魂，月下销魂。愁聚眉峰尽日颦，千点啼痕，万点啼痕。晓看天色暮看云，行也思君，坐也思君。

——唐寅《一剪梅·雨打梨花深闭门》

3 求数列极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\arctan\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{\pi}{4}\right)\sqrt{n^2+n}$.

读题联想　这是 $0\cdot\infty$ 型数列极限，先转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型极限，根据数列极限转化成函数极限. 运用导数定义或洛必达法则计算.

本题要点：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，

$$\arctan 1=\frac{\pi}{4},$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

解题范例

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\arctan 1}{\dfrac{1}{n}}\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}\qquad 1\text{ 分}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\arctan 1}{\dfrac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}\qquad 3\text{ 分}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\arctan(1+t)-\arctan 1}{t}\qquad 5\text{ 分}$$

$$=(\arctan x)'\Big|_{x=1}\qquad 7\text{ 分}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=1}=\frac{1}{2}\qquad 9\text{ 分}$$

阅卷者按　本题满分 9 分，是计算数列极限的常见题型. 关键是通过适当的变形将数列极限转化成函数极限，导数定义或者洛必达法则不能直接运用于数列极限计算. 把求数列极限转化为求函数极限后也可用洛必达法则.

$$I=\lim_{t\to 0}\frac{\arctan(1+t)-\dfrac{\pi}{4}}{t}\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}}\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+(1+t)^2}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

4 求下列数列极限

（Ⅰ）$I=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+e^x}dx$.

（Ⅱ）$J=\lim\limits_{n\to\infty}x_n, x_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$.

读题联想 （Ⅰ）是定积分函数表示的数列，无法直接计算极限，因此考虑分部积分法将定积分化简.

（Ⅱ）中的 n 项和数列，简单的放大缩小法不能解决问题，再看 x_n 是否是某函数的一个积分和.

本题要点：（分部积分法）定积分分部积分法的公式与方法，与不定积分的类似，只是多了个上、下限而已：

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

或
$$\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x).$$

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$f(x)\leqslant g(x)$，且至少存在点 $x_1\in[a,b]$，使 $f(x_1)<g(x_1)$，则

$$\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx.$$

设收敛数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都以 a 为极限，数列 $\{c_n\}$ 满足：存在正数 N_0，当 $n>N_0$ 时有 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$，则 $\{c_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$u_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$ 或 $u_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{i}{n}\right)$，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}u_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\left(\text{或}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{i}{n}\right)\right)\\&=\int_0^1 f(x)dx.\end{aligned}$$

解题范例

（Ⅰ）$$\begin{aligned}I_n&\xlongequal{\text{记}}\int_0^1\frac{nx^{n-1}}{1+e^x}dx=\int_0^1\frac{dx^n}{1+e^x}\\&=\frac{x^n}{1+e^x}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{e^xx^n}{(1+e^x)^2}dx\\&=\frac{1}{1+e}+\int_0^1\frac{x^ne^x}{(1+e^x)^2}dx\end{aligned}$$ 2 分

由
$$0<\int_0^1\frac{x^ne^x}{(1+e^x)^2}dx<\int_0^1x^ndx=\frac{1}{n+1}$$ 4 分

其中 $\frac{e^x}{(1+e^x)^2}<1$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n e^x}{(1+e^x)^2}dx=0$$

因此

$$I=\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{1}{1+e}.$$ 5 分

$$(\mathrm{II})\ x_n=\frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{2}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{n}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{\frac{2}{n}}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{\frac{n}{n}}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right].$$ 7 分

这是 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的一个积分和（n 等分）. 8 分

因此

$$J=\lim_{n\to\infty}x_n=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2.$$ 10 分

阅卷者按　本题满分 10 分，两个极限的求法都是常见类型，应该熟练掌握. 主要的问题：① I_n 不知道怎么计算或者计算出来后，不会比较定积分大小来用夹逼定理；② 不会将极限化为定积分.

左脑休息室

咏一朵枯萎的紫罗兰

英　雪莱

这一朵花失去了香味，
它象你的吻，曾对我呼吸；
那鲜艳的颜色也已消褪，
不再闪耀着你，唯一的你！
一个枯萎而僵死的形体，
茫然留在我凄凉的前胸，
它以冰冷而沉默的安息
折磨着这仍旧火热的心。
我哭了，眼泪不使它复生！
我叹息，没有香气扑向我！
唉，这沉默而无怨的宿命
虽是它的，可对我最适合。

5 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{\sqrt{1^2+n^2}}+\dfrac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\dfrac{n+\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)\sin\dfrac{1}{n}$.

读题联想　这是一个 n 项和的数列极限，常用的方法有两种，一种是夹逼原理，另一种是定积分的定义.

解题范例

【解】 由于当 $n\to\infty$ 时，$\sin\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}$，则　1 分

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt{1^2+n^2}}+\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\frac{n+\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1^2+n^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$　3 分

又

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$　5 分

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2})$$　7 分

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)=1$，

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$　9 分

$= \ln(1+\sqrt{2})$.

故 $I = \ln(1+\sqrt{2})$. 10分

阅卷者按　本题满分10分，主要考察利用夹逼原理和定积分定义求极限.本题的关键是要将这两种方法结合起来问题才能得到解决.

左脑休息室

20个影响你一生的小改变(二)

2. *Wake early* / **早起**

If you asked me what's the best change you can make this instance, I would say "wake early."

The early morning is peaceful - there are no interruptions and no noise. You can wakeup and go for a walk. You can meditate. And you can create.

如果你问我什么是最好的改变，我会说"早起"。

早晨是那样宁静——没人打扰，没有噪音。起床后，散散步，你还可以冥思，或是创作。

And waking early is the most productive thing I've ever done.

I often get more work done in a couple hours in the morning than during the entire day.

早起是我做的最富有成效的改变。

在早晨的几个小时里，我做的事情常常比一整天做的都多。

3. *Eat less* / **少吃**

Many of us overeat. Let's stop.

Eat slowly, and eat until you're full. Eat so that your belly doesn't bulge.

我们中的很多人都饮食过量。

可别吃太多。细嚼慢咽，吃饱为止。这样才不会吃起将军肚。

4. *Stop watching, start doing* / **不做旁观者**

Watching is easy. Anyone can watch someone.

Spectating isn't inherently bad, but I believe we do too much of it. Instead of watching, do something. Or better yet, create something great.

看容易，每个人都可以看别人。

做个观众本身并不坏，但我认为，我们看得太多。不要做旁观者，自己去做。如果不小心搞出个伟大创造，岂不更好。

6 计算$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(n^3-n^2+\dfrac{n}{2}\right)e^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1+n^6}\right]$.

读题联想 数列极限，转化成求函数极限.

解题范例

【解】 先求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$ 2 分

令$t=\dfrac{1}{x}$，当$x\to+\infty$时，$t\to0^+$，

则

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$$

$$=\lim_{t\to0^+}\left[\left(\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2t}\right)e^t-\sqrt{1+\frac{1}{t^6}}\right]$$ 4 分

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(1-t+\frac{1}{2}t^2\right)e^t-\sqrt{1+t^6}}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{2}t^2e^t-\frac{3t^5}{\sqrt{1+t^6}}}{3t^2}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{2}e^t-\frac{3t^3}{\sqrt{1+t^6}}}{3}=\frac{1}{6}.$$ 9 分

从而$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(n^3-n^2+\dfrac{n}{2}\right)e^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1+n^6}\right]=\dfrac{1}{6}$. 10 分

阅卷者按 本题满分10分.难点是想到将数列转化成函数来求极限，利用“倒代换”，洛必达法则求出极限后，不要忘了将结果代回数列极限.这样的失分很可惜.

左脑休息室

她嘱咐我要爱得轻松，当新叶在枝桠萌芽。但我当年年幼无知，不予轻率苟同。在河边的田野，吾爱与我曾经驻足。她依靠在我的肩膀，以雪白的小手。她嘱咐我要活得轻松，当青草在堤岸滋长。但我当年年幼无知，而今热泪盈眶。

——［爱尔兰］叶芝《柳园里》

7 设 a,b,p 为非零常数，求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\dfrac{\sin px}{|x|}\right)$.

读题联想 两函数乘积的极限，不能直接分别计算极限，因为这里 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin px}{|x|}$ 均不存在，但 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\dfrac{\sin px}{|x|}\right)$ 存在，所以分别求左、右极限.

本题要点：x_0 左(右)极限就是在 x_0 左(右)邻域内考虑极限

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

$$\sin x\sim x,x\to 0.$$

解题范例

因 $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$ 不相同，又 $|x|$ 是分段函数，所以要分别求左、右极限. 3分

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin px}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ae^{-\frac{1}{x}}+b}{ae^{-\frac{1}{x}}-b}\cdot\frac{px}{x}=\frac{0+b}{0-b}p=-p.$$ 5分

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin px}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{px}{-x}=\frac{a+0}{a-0}(-p)=-p.$$ 7分

因此

$$I=-p.$$ 9分

阅卷者按 本题满分9分，求的函数的极限，难点是乘积中两个函数的极限都不存在，不能运用运算法则，函数中含有 $|x|$，$e^{\frac{1}{x}}$，要分别求左、右极限，左(右)极限计算时适用各种求极限的法则，只要将此时的0当成符号是负(正)的.

左脑休息室

《念奴娇　西子》

若耶溪畔，恨春暮，啼鸟声声明灭。
解佩凌波，人不见，漫说馆娃宫阙。
百尺琼楼，千人歌乐，纵使肌如雪。
俱归黄土，而今只剩明月。
堪叹伍相鸱夷，忠言孤胆，难抵眉心结。
西子多情怀袖里，霸主英雄气竭。
越甲三千，佳人一笑，山河空泣血。
五湖舟上，寻芳不待佳节。

8 设 $f(x)$ 有一阶连续导数，$f(0)=0, f'(0)=1$，求

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\left(\int_0^u f(u-t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^3}.$$

读题联想　这是求 $\frac{0}{0}$ 型极限.考虑用洛必达法则，极限的函数是变限积分函数，利用变限积分求导法.

本题要点：如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上具有导数，且它的导数 $F'(x)=f(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b)$.

解题范例

【解法一】　用洛必达法则及变限积分求导法得

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^{x^2}f(x^2-t)\mathrm{d}t}{3f(x)\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(x^2-t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$$ 3 分

其中，又有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=1.$ 4 分

$$\int_0^{x^2}f(x^2-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x^2-t=s}-\int_{x^2}^0 f(s)\mathrm{d}s=\int_0^{x^2}f(s)\mathrm{d}s$$ 5 分

于是

$$I=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)\cdot 2x}{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\cdot f(x)}$$ 7 分

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{f(x)}{x}}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x^2)\cdot 2x}{f(x)}$$

$$=\frac{4}{3}f'(0)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=\frac{4}{3}$$ 10 分

【解法二】　由泰勒公式可得：设 $g(x)$ 在 $x=a$ 处 n 阶可导，

$$g(a)=0, g'(a)=0, \cdots, g^{(n-1)}(a)=0, g^{(n)}(a)\neq 0$$

$$\Rightarrow\quad g(x)=\frac{1}{n!}g^{(n)}(a)(x-a)^n+o((x-a)^n)\quad(x\to a)$$

$$\Rightarrow\quad g(x)\sim\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\quad(x\to a)$$

若 $g(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处一阶可导，$f(a)=0, f'(a)\neq 0$

$\Rightarrow \quad g(a)=0, g'(a)=f(a)=0, g''(a)=f'(a)\neq 0$

$\Rightarrow \quad g(x)\sim \frac{1}{2}g''(a)(x-a)^2$

即$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\sim \frac{1}{2}f'(a)(x-a)^2 \quad (x\to a)$ 3 分

若 $g(x)=\int_0^x\left(\int_0^u f(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}u$，设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处一阶可导，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$

$\Rightarrow \quad g(0)=0, g'(0)=\left(\int_0^x f(s)\mathrm{d}s\right)\Big|_{x=0}=0, g''(0)=f(0)=0,$

$g^{(3)}(0)=f'(0)\neq 0$

$\Rightarrow \quad g(x)\sim \frac{1}{3!}g^{(3)}(0)x^3$

即$\int_0^x(\int_0^u f(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}u\sim \frac{1}{6}f'(0)x^3 \quad (x\to a)$ 6 分

现先对原表达式作变形得

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\left(\int_0^u f(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}u}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^3}$$ 7 分

用等价无穷小因子替换

$$\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^3\sim\left(\frac{1}{2}f'(0)x^2\right)^3=\frac{1}{8}x^6$$

9 分

$$\int_0^{x^2}\left(\int_0^u f(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}u\sim\frac{1}{6}f'(0)(x^2)^3=\frac{1}{6}x^6$$

我们可得

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^6}{\frac{1}{8}x^6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$ 10 分

阅卷者按　本题满分 10 分. 解法一是常规解法，应该熟练掌握. 解法二要对泰勒公式比较熟练，一般来讲，大多数同学都不太会想到这种解法.