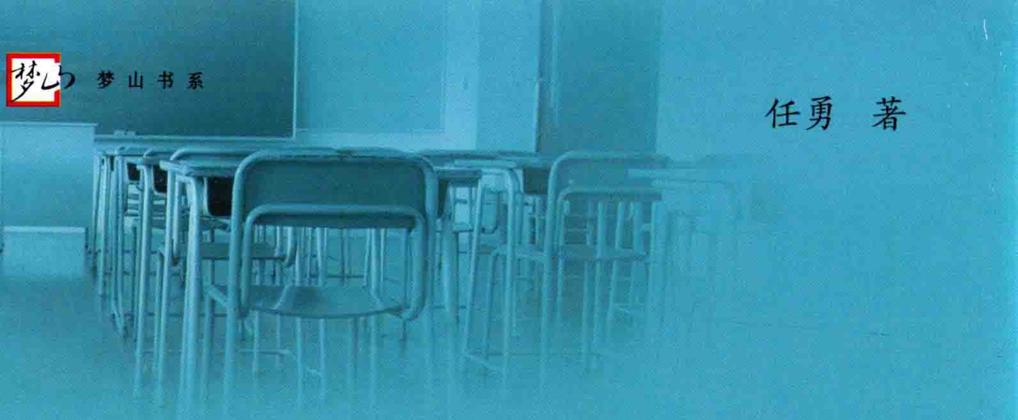
梦山书系

任勇 著



做“业高一筹”的小学数学教师

Zuo Yegaoyichou De Xiaoxue Shuxue Jiaoshi

◇ 枚举寻径、问题转化、以退求进、以形助数……

◇ 整体思维、奇偶分析、反面思考、逐次逼近……

◇ 28个蕴含数学思想、方法、观点、策略的专题在此汇集！

◇ 看任勇老师带你驰骋数学课堂，修炼数学气质，成就“业高一筹”的小学数学教师！

海峡出版发行集团 THE STRAITS PUBLISHING & DISTRIBUTING GROUP | 福建教育出版社

梦山书系

任勇 著

做"业高一筹"的小学数学教师

Zuo Yegaoyichou De Xiaoxue Shuxue Jiaoshi

海峡出版发行集团
THE STRAITS PUBLISHING & DISTRIBUTING GROUP
福建教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

做“业高一筹”的小学数学教师/任勇著．—福州：福建教育出版社，2016.4
ISBN 978-7-5334-7158-3

Ⅰ．①做…　Ⅱ．①任…　Ⅲ．①小学数学课—教学研究　Ⅳ．①G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 054828 号

做“业高一筹”的小学数学教师
任　勇　著

出版发行	海峡出版发行集团 福建教育出版社 （福州梦山路 27 号　邮编：350001　网址：www.fep.com.cn 编辑部电话：0591—83789077　83786691 发行部电话：0591—83721876　87115073　010—62027445）
出 版 人	黄　旭
印　　刷	福建东南彩色印刷有限公司 （福州市金山工业区　邮编：350002）
开　　本	890 毫米×1240 毫米　1/32
印　　张	5.625
字　　数	131 千
版　　次	2016 年 4 月第 1 版　　2016 年 4 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5334-7158-3
定　　价	16.80 元

目录

CONTENTS

01

枚举寻径

有些数学题，题中包含着多种可能的情形，难以用一个算式完成解答。这时我们可以根据问题的条件，把各种可能的情形一一列举出来，分别予以考察，从而完成原题的解答。这是完全归纳法在解题中的具体运用。在枚举各种可能情形时，我们要充分利用划分的思想，做到不重复、不遗漏。

案例 1

有 30 枚贰分硬币和 8 枚伍分硬币，用这些硬币不能构成的 1 分到 1 元之间的币值有多少种？

【分析 1】 注意到所有 38 枚硬币的总币值恰好是 100 分（即 1 元），于是除了 50 分和 100 分外，其他 98 种币值就可以两两配对了，即 (1，99)，(2，98)，…，(49，51)。

每一对币值中有一个可以用若干枚贰分和伍分硬币构成，则另一个也可以，显然 50 分和 100 分的币值是可以构成的，因此只需要讨论币值为 1 分，2 分，3 分，…，49 分这 49 种情况。

1 分和 3 分的币值，显然不能构成。

2 分，4 分，…，48 分等 24 种偶数币值都可以用若干枚贰分硬币构成，因为贰分硬币的总数为 30 枚。

5 分，7 分，…，49 分等 23 种奇数币值的只需分别在 4 分，6 分，…，48 分币值的构成方法上，用一枚伍分硬币换下两枚贰分硬币即可，比如 37 分币值的，由于 36 分币值可用 18 枚贰分硬币构成，用一枚伍分硬币换下两枚贰分硬币，所得的币值即为 37 分。

综合以上分析，不能用若干枚贰分和伍分硬币构成的 1 分到 1 元之间的币值只有 4 种，即 1 分，3 分，97 分，99 分。

【分析 2】 设由 x 枚贰分硬币与 y 枚伍分硬币构成的钱币币值为 z，则有

$z=2x+5y$；

$x=0，1，2，3，…，30$；

$y=0，1，2，3，…，8$。

由于 y 只有 9 种情况，而 x 有 31 种情况，因此对 y 进行分类，即

①当 $y=0$ 时，$z=2x$；

②当 $y=1$ 时，$z=2x+5$；

③当 $y=2$ 时，$z=2x+10$；

④当 $y=3$ 时，$z=2x+15$；

⑤当 $y=4$ 时，$z=2x+20$；

⑥当 $y=5$ 时，$z=2x+25$；

⑦当 $y=6$ 时，$z=2x+30$；

⑧当 $y=7$ 时，$z=2x+35$；

⑨当 $y=8$ 时，$z=2x+40$。

由于这些硬币最大可以构成 100 分，则

当 $z=100$ 代入⑨得到 $x=30$；

当 $z=99$ 代入⑧得到 $x=32$，舍去；

当 $z=98$ 代入⑨得到 $x=29$；

当 $z=97$ 代入⑧得到 $x=31$，舍去；

当 $z=96$ 代入⑨得到 $x=29$；

…………

当 $z=4$ 代入①得到 $x=2$；

当 $z=3$ 代入①得到 $x=\frac{3}{2}$，舍去；

当 $z=2$ 代入①得到 $x=1$；

当 $z=1$ 代入①得到 $x=\frac{1}{2}$，舍去。

综合以上分析，不能用若干枚贰分和伍分硬币构成的 1 分到 1 元之间的币值只有 4 种，即 1 分，3 分，97 分，99 分。

案例 2

把由 1 开始的自然数依次写下去，一直写到第 198 位数为止：

$$\underbrace{123456789101112\cdots}_{198\text{位}}$$

那么这个数除以 9 的余数是________。

【分析】 一个正整数能否被 9 整除，只要看这个正整数各位数字之和是否是 9 的倍数。若是，则这个正整数被 9 整除；若不是，则这个正整数不能被 9 整除，此时各位数字之和除以 9 所得的余数就是这个正整数除以 9 的余数。以下给予严格证明。

我们不妨以三位数为例。

假设三位数为

$\overline{abc}=100a+10b+c$

$=(99a+9b)+(a+b+c)$。

很显然 $99a+9b$ 是 9 的倍数，因此只要 $a+b+c$（各位数字之和）能被 9 整除，那么这个三位数$\overline{abc}$就能被 9 整除；反之亦然。

下面我们来解决原问题。

这个 198 位数是多少呢？首先，我们把这个数按数位分成既不重复又不遗漏的三段：

第一段，数位是一位的有 1 2 3 4 5 6 7 8 9，一共有 $9\times1=9$ 位数；

第二段，数位是二位的有 10 11 12 … 99，一共有 $90\times2=180$ 位数；

第三段，数位是三位数的有 100 101 102 … 999，该取到哪个数呢？设取到第 x 个数，显然有 $9+180+3x=198$，$x=3$，第三个三位数是 102。

所以这个数是：1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12…99 100 101 102，它一共有 198 位。

接着，我们再分段考察这个数用 9 除的余数情况：

位数是一位的数字和 $1+2+\cdots+9=45$，能被 9 整除；

位数是二位的数字和 $1+0+1+1+1+2+\cdots+9+9=(1+2+\cdots+9)\times10+(1+2+\cdots+9)\times9$，也能被 9 整除；

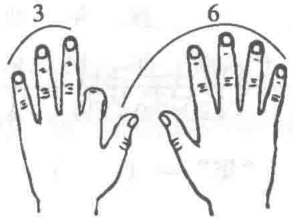
位数是三位的数字和 $1+0+0+1+0+1+1+0+2=6$。

所以，这个 198 位数用 9 除的余数是 6。

枚举，说到底就是“穷尽”。说到“穷尽”，我们再看一个可用“穷尽”验证的“数学小把戏”——双手就是计算器。

张开双手，手背朝向自己，从“一九得九”（即将左边第一个小拇指弯下，剩下九个指头）逐一“计算”，可以记住“九九表”。这里用图 1 说明一下：如“四九三十六”，因数是 4，就把左手第四指

（从小拇指数起）弯下，看第四指左右两边的指头数，左边指头个数表示积的十位数位，右边（连同右手）指头个数表示积的个位数。



四九三十六

图 1

咦，怎么这么灵？我们可以从 1 枚举到 9 进行验证，结论正确。这是什么道理呢？我们再从理论上证明一下。

设 a 为 1，2，…，9 中的一个数，则

$a\times9=a\times(10-1)=a\times10-a=(a-1)\times10+(10-a)$。

可见 $a\times9$ 的十位数字是 $a-1$，即第 a 个手指弯下后其左边部分的手指数；$a\times9$ 的个位数字是 $10-a$，即第 a 个手指弯下后其右边部分的手指数。

修炼 1

今有 101 枚硬币，其中有 100 枚同样的真币和 1 枚伪币，伪币与真币的重量不同，现需弄清楚伪币究竟比真币轻，还是比真币重，但只有一架没有砝码的天平。试问，怎样利用这架天平称两次，来达到目的？

修炼 2

下面算式中的四个汉字分别代表四个数字（均为 0～9 之间的整数），你能求出来吗？

				新
			新	年
		新	年	快
+	新	年	快	乐
	2	0	0	1

“新”＝（　　）　“年”＝（　　）　“快”＝（　　）

“乐”＝（　　）

02

问题转化

问题转化也叫化归，化归是数学家特别善于使用的解题策略。所谓“化归”，就是说在解决问题时，将原问题进行变形，使之转化，直至最终归结为我们熟悉的，或易于解决的，或已经解决的（新）问题。

数学家罗莎用以下的比喻说明化归法的精神，她说：“假如在你面前有煤气灶、水龙头、水壶和火柴，现在的任务是烧水，你应该怎样做?”正确的回答是：“在水壶中放上水，点燃煤气，再把水壶放到煤气上。”罗莎又提出第二个问题：“假设所有的条件都和原来的一样，只是水壶中已经有了足够的水，这时你又应该怎样回答?”我们一定说：“点燃煤气，再把水壶放到煤气灶上。”但她认为这种回答并不是最好的回答，而最好的回答是：“把水壶中的水倒掉。”

“把壶中的水倒掉”，本来是最笨的说法，为什么反而是最好的呢？这是因为数学家认为：“我已经把后一个问题‘化归’为前一个问题了。”尽管这个问题使人听了好笑，但这正是数学家思维方法上的一个特色——变形、转化。“把壶中的水倒掉”把一个新问题化归为旧问题，就是把一个复杂的问题转化成一个或几个容易解答的简单问题。著名的苏联数学家雅诺夫斯卡娅有一次向奥林匹克数学竞赛参加者发表了“什么叫解题”的演讲，她的答案显得惊人的简单，

完全出乎听众的意料："解题就是把未解过的题归结为已经解过的题，也就是'化归'。"

案例 3

一农户有鸡兔若干，它们共有 50 颗头和 140 只脚，问鸡兔各有多少？

【分析】 我们可以假想出这样一种奇特的现象：所有的鸡都抬起了一只脚，同时所有的兔子也仅用后脚站立在地上。显然，问题就容易多了。因为，现在鸡的头数与脚的数目是相等的。如果有一只兔子，脚的数目就要比头的数目大 1；所以脚数（70）与头数的差（20）就是兔子的数目。于是得兔子 20 只，鸡 30 只。

为何脚数（70）与头数（50）的差（20）就是兔子的数目呢？不妨从代数的视角来看看。

设该农户有 x 只鸡、y 只兔子，则有

$x+y=50$。

当所有的鸡都抬起了一只脚，同时所有的兔子也仅用后脚站立在地上，此时地面上的脚为

$x+2y=70$。

这个等式从表面上看似乎是脚的等式，其实是鸡的只数与兔子数目两倍之和为 70，于是上面两式相减就得到兔子的数目。

这种化归的思想方法很巧妙，它是把问题的已知条件进行变形，从而达到化归的目的。

案例 4

在边长为 1 的正方形的周界上任意两点间连一条曲线，把正方形的面积分为相等的两部分。求证：曲线的长不小于 1。

【分析】 我们先分析这两点在正方形边界上各种可能的分布情况。显然有三种情况：

①在同一条边上（图 3）；

②在相邻的两边上（图 2）；

③在相对的两边上（图 1）。

其中情况③是不证自明的，因为正方形对边两点的连线不小于边长。因此，我们只须将情况①②化归为情况③。

将情况①②即图 3、图 2 中的曲线借助正方形对称性即可转化为情况③即图 1。事实上，我们还可以进一步证明曲线最短的情况必然是情况③，而且当情况③的曲线变为直线段时取得最小值 1，此时这条直线段必然恒过正方形的中心点。

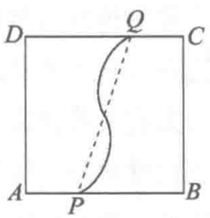


图 1

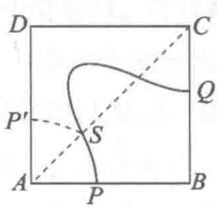


图 2

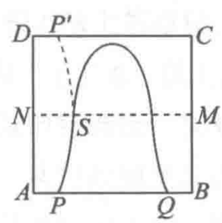


图 3

化归在数学解题中几乎无处不在，化归的基本功能是：生疏化成熟悉，复杂化成简单，抽象化成直观，含糊化成明朗。说到底，化归的实质就是以运动变化发展的观点，以及事物之间相互联系、相互制约的观点看待问题，善于对所要解决的问题进行变换转化，使问题得以解决。

修炼 3

狐狸和黄鼠狼进行跳跃比赛，狐狸每次可以向前跳 4 米，黄鼠狼每次可以向前跳 6 米。它们每秒都向前跳一次。比赛全程，从起点开始，每隔 21 米设有一个陷阱，当它们之中的一个掉进陷阱时，另一个跳了几米？

修炼 4

任意六边形瓷砖都可以平面密铺吗？