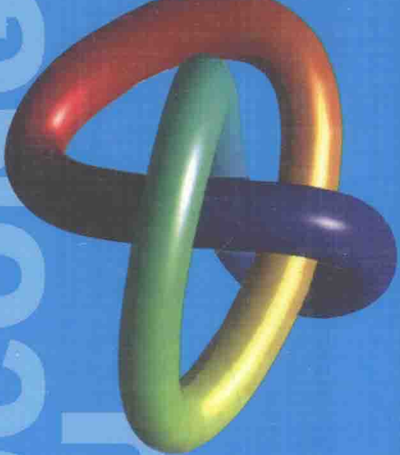
数学奥林匹克小丛书　高中卷 6

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU



数学归纳法的证题方法与技巧

冯志刚 著

华东师范大学出版社

olinpike

数学奥林匹克小丛书

高中卷 6

数学归纳法的证题方法与技巧

linpike Xiao Congshu

冯志刚 著

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．高中卷．数学归纳法的证题方法与技巧／冯志刚著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3

ISBN 7-5617-4171-5

I.数... II.冯... III.数学课-高中-教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019472号

数学奥林匹克小丛书・高中卷

数学归纳法的证题方法与技巧

著　　者　冯志刚
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　王学锋
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购) 电话 021-62869887
　　　　　门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东 中南地区 021-62458734
　　　　　华北 东北地区 021-62571961
　　　　　西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　江苏苏州市永新印刷包装有限责任公司
开　　本　787x960 16开
印　　张　8
字　　数　136千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年6月第二次
印　　数　11 001—16 100
书　　号　ISBN 7-5617-4171-5/G·2396
定　　价　10.00元

出 版 人　朱杰人

数学奥林匹克小丛书

冯志刚	第44届IMO中国队副领队 上海中学特级教师
葛　军	中国数学奥林匹克高级教练、江苏省数学会普委会副主任 南京师范大学副教授
冷岗松	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 上海大学教授、博士生导师
李胜宏	第44届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 浙江大学教授、博士生导师
李伟固	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 北京大学教授、博士生导师
刘诗雄	中国数学奥林匹克委员会委员 武钢三中校长、特级教师
倪　明	数学奥林匹克小丛书总策划 华东师范大学出版社副总编辑
单　墫	第30、31届IMO中国队领队 南京师范大学教授、博士生导师
吴建平	中国数学会普委会副主任、中国数学奥委会副主席 第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编
熊　斌	第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 华东师范大学副教授
余红兵	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 苏州大学教授、博士生导师
朱华伟	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 广州大学软件所常务副所长、研究员

Shuxue A

Xiao

Congshu

Shuxue c

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有踏实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,应当注意在数学竞赛活动中,注意普及与提高相结合,而且要以普

及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意. 这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版. 这套书，规模大、专题细. 据我所知，这样的丛书还不多见. 这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队. 他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动. 华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血. 我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

1 第一数学归纳法

数学归纳法是证明关于正整数 n 的命题 $P(n)$ 成立与否时经常用到的方法. 它是下面的归纳公理的一个直接推论.

归纳公理 设 S 是正整数集 $\mathbf{N}^*$ 的一个子集,满足条件:

(1) $1 \in S$;

(2) 如果 $n \in S$,则 $n+1 \in S$.

那么 $S = \mathbf{N}^*$.

归纳公理是由皮亚诺(G. Peano, 1858—1932)提出的关于正整数的五条公理中的第五公理,它是数学归纳法的基础.

第一数学归纳法是最常用的一种形式,它就是我们高中课本中所提及的数学归纳法.

第一数学归纳法 设 $P(n)$ 是关于正整数 n 的一个命题(或性质). 如果

(1) 当 $n = 1$ 时, $P(n)$ 成立;

(2) 由 $P(n)$ 成立可以推出 $P(n+1)$ 成立.

那么,对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $P(n)$ 都成立.

证明 记 $S = \{n \mid n \in \mathbf{N}^*$, 且 $P(n)$ 成立$\}$,则 S 为 $\mathbf{N}^*$ 的子集. 由(1)知 $1 \in S$; 由(2)知如果 $n \in S$, 则 $n+1 \in S$. 这样由归纳公理可知 $S = \mathbf{N}^*$, 也就是说,对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $P(n)$ 都成立.

说明 事实上,第一数学归纳法与归纳公理是等价的,因此我们又称之为数学归纳法原理,并把第一数学归纳法简称为数学归纳法.

对中学生而言,要接受数学归纳法的含义和正确性并不难,但是要正确地用好数学归纳法却不是一件容易的事.

数学归纳法中的两步缺一不可. 验证 $P(1)$ 成立是奠基,利用归纳假设结合已知的有关数学知识证出 $P(n+1)$ 成立是递推的根据. 这两步对证明命题相辅相成,构成数学归纳法证明过程的逻辑结构. 尤为重要的是在证明过程中

必须用到归纳假设，这是检验是否用对了数学归纳法的一把尺.

例 1 证明：对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，都有

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}. \qquad ①$$

证明 当 $n=1$ 时，① 式左边 $=\frac{1}{2}$，① 式右边 $=1-\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，故 $n=1$ 时，① 式成立.

现设①对 n 成立，考虑 $n+1$ 的情形，利用 $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$，知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=1-\frac{1}{n+2}.\end{aligned} \qquad ②$$

所以，①式对 $n+1$ 成立.

综上，由数学归纳法原理知①式对一切正整数 n 成立.

说明 这是一个错误的证明，其错误在于证明①对 $n+1$ 成立时，并没有用到归纳假设.

正确的过程如下：由归纳假设知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=1-\frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

事实上，②式的得到是正确的，但这是对①式的一个直接证明，不应该套上数学归纳法这顶帽子. 这一点也是中学生经常犯的一些错误，应认真改正，否则难以形成一个正确的逻辑推导的思维结构.

例 2　证明:所有形如

$$10\,017,\ 100\,117,\ 1\,001\,117,\ \cdots \qquad ①$$

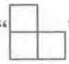
的正整数都是 53 的倍数.

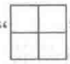
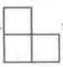
证明　我们用 a_n 表示数列①中的第 n 个数,则 $a_1 = 10\,017$, $a_{n+1} = 10a_n - 53$.

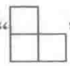
下证:对任意 $n \in \mathbf{N}^*$,都有 $53 \mid a_n$.

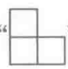
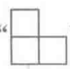
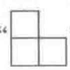
当 $n = 1$ 时,由 $10\,017 = 53 \times 189$,知 $53 \mid a_1$.

现设 $53 \mid a_n$,则 $53 \mid 10a_n$,故 $53 \mid (10a_n - 53)$,即 $53 \mid a_{n+1}$.所以,由数学归纳法原理知对任意 $n \in \mathbf{N}^*$,都有 $53 \mid a_n$.命题获证.

例 3　设 $n \in \mathbf{N}^*$,证明:去掉 $2^n \times 2^n$ 的方格表的任何一个方格后,剩余的部分都可以用“”形式的 L 型无重叠地完全覆盖.

证明　当 $n = 1$ 时,由于一个“”字型去掉任何一个方格后都是一个“”型,故命题对 $n = 1$ 成立.

现设 $n = k$ 时,命题成立,即去掉一个 $2^k \times 2^k$ 的方格表的任何一个方格后,剩余部都可用“”型覆盖,我们考虑 $n = k + 1$ 的情形.

如图 1 所示,将 $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ 的方格表依中心所在的两条方格线将表格分割为 4 个 $2^k \times 2^k$ 的方格表,则题设中要求去掉的那个小方格必落在某个 $2^k \times 2^k$ 的方格表中.在剩余的部分先绕中心摆一个“”型,去掉图 1 中所示的 4 个阴影方格后,每个 $2^k \times 2^k$ 的子表格都去掉了一个方格,而由归纳假设,可知它们都可以用“”型覆盖,再补上绕中心所摆的那个“”型就得出命题对 $n = k + 1$ 成立.

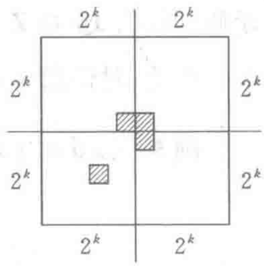


图 1

综上可知,命题对一切正整数 n 成立.

说明　例 2 与例 3 都是用数学归纳法证题时的常用表述方式.当然了,表达方式可依个人的表达风格而定,但都需要在归纳假设和结论之间进行正确地过渡,它是完成数学归纳法证题时的关键步骤.

例 4　设 x、y 是实数,使得 $x + y$、$x^2 + y^2$、$x^3 + y^3$、$x^4 + y^4$ 都是整数.

证明:对任意 $n \in \mathbf{N}^*$,数 $x^n + y^n$ 都为整数.

证明 此题要用到第一数学归纳法的一种变形:设 $P(n)$是关于正整数 n 的一个命题(或性质),如果

(1) 当 $n = 1, 2$ 时, $P(n)$成立;

(2) 由 $P(n)$、$P(n+1)$ 成立可以推出 $P(n+2)$ 成立. 那么对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $P(n)$都成立.

事实上,这种变形只是调整了归纳过程中的跨度,更进一步的例子将在第2单元中出现.

回到原题,由条件 $x+y$ 与 x^2+y^2 都是整数,可知命题对 $n=1, 2$ 成立.

设命题对 n、$n+1$ 成立,即 x^n+y^n 与 $x^{n+1}+y^{n+1}$ 都是整数,考虑 $n+2$ 的情形,此时

$$x^{n+2}+y^{n+2}=(x+y)(x^{n+1}+y^{n+1})-xy(x^n+y^n).$$

因此,为证 $x^{n+2}+y^{n+2} \in \mathbf{Z}$,结合归纳假设及条件中的 $x+y \in \mathbf{Z}$,我们只需证明 $xy \in \mathbf{Z}$.

注意到, $x+y$、$x^2+y^2 \in \mathbf{Z}$,故 $2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2) \in \mathbf{Z}$,若 $xy \notin \mathbf{Z}$,则可设 $xy=\frac{m}{2}$, m 为奇数. 再由 x^2+y^2、$x^4+y^4 \in \mathbf{Z}$,知 $2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(x^4+y^4) \in \mathbf{Z}$,即 $2 \times \left(\frac{m}{2}\right)^2=\frac{m^2}{2} \in \mathbf{Z}$,但 m 为奇数,这是一个矛盾. 所以, $xy \in \mathbf{Z}$. 进而命题对 $n+2$ 成立.

综上,对任意 $n \in \mathbf{N}^*$,数 $x^n+y^n \in \mathbf{Z}$.

例 5 设 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, n 是大于 1 的正整数,证明:

$$\left(\frac{1}{\sin^n\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^n\theta}-1\right) \geqslant 2^n-2^{\frac{n}{2}+1}+1. \qquad ①$$

证明 当 $n=2$ 时, ①式左右两边相等,故 $n=2$ 时命题成立.

假设命题对 $n(\geqslant 2)$成立,则

$$\left(\frac{1}{\sin^{n+1}\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^{n+1}\theta}-1\right)$$

$$=\frac{1}{\sin^{n+1}\theta\cos^{n+1}\theta}(1-\sin^{n+1}\theta)(1-\cos^{n+1}\theta)$$

$$= \frac{1}{\sin^{n+1}\theta\cos^{n+1}\theta}(1-\sin^{n+1}\theta-\cos^{n+1}\theta)+1$$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\left(\frac{1}{\sin^n\theta\cos^n\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin^n\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos^n\theta}\right)+1$$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\left[\left(\frac{1}{\sin^n\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^n\theta}-1\right)+\frac{1-\cos\theta}{\sin^n\theta}+\frac{1-\sin\theta}{\cos^n\theta}-1\right]+1$$

$$\geqslant \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\left[(2^n-2^{\frac{n}{2}+1})+2\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin^n\theta\cos^n\theta}}\right]+1, \qquad ②$$

这里②由归纳假设和均值不等式得到.

注意到, $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta\leqslant\frac{1}{2}$, 而

$$\frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin^n\theta\cos^n\theta}=\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)},$$

其中 $(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)=1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta=1+t+\frac{t^2-1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)^2\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2$ (这里用到 $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in(1,\sqrt{2}]$). 所以, $\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin^n\theta\cos^n\theta}}\geqslant\frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{2}+1}=2^{\frac{n}{2}}-2^{\frac{n-1}{2}}$, 从而由②可得

$$\left(\frac{1}{\sin^{n+1}\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^{n+1}\theta}-1\right)\geqslant 2[(2^n-2^{\frac{n}{2}+1})+2(2^{\frac{n}{2}}-2^{\frac{n-1}{2}})]+1$$

$$=2(2^n-2^{\frac{n+1}{2}})+1=2^{n+1}-2^{\frac{n+1}{2}+1}+1.$$

即命题对 $n+1$ 成立.

综上,命题对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.

说明 上面的几个例子涉及多方面的知识内容,表现了数学归纳法应用的广泛性.

例 6 数列 $\{a_n\}$ 定义如下:

$$a_1=1,\ a_n=a_{n-1}+a_{\left[\frac{n}{2}\right]},\ n=2,3,\cdots.$$

证明:该数列中有无穷多项是 7 的倍数.

证明 直接由递推式计算,可得 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=5$, $a_5=7$. 现设 $a_n(n\geqslant 5)$ 是 7 的倍数,我们寻找下标 $m>n$, 使得 $7|a_m$.

由 $a_n \equiv 0 \pmod 7$，知 $a_{2n}=a_{2n-1}+a_n \equiv a_{2n-1} \pmod 7$，$a_{2n+1}=a_{2n}+a_n \equiv a_{2n} \pmod 7$，故 $a_{2n-1}\equiv a_{2n}\equiv a_{2n+1} \pmod 7$. 记 a_{2n-1} 除以 7 所得余数为 r，如果 $r=0$，那么取 $m=2n-1$ 即可；如果 $r\neq 0$，考虑下面的 7 个数：

$$a_{4n-3},\ a_{4n-2},\ \cdots,\ a_{4n+3}. \qquad ①$$

注意到，$a_{4n-2}=a_{4n-3}+a_{2n-1}\equiv a_{4n-3}+r \pmod 7$，$a_{4n-1}=a_{4n-2}+a_{2n-1} \equiv a_{4n-2}+r \pmod 7 \equiv a_{4n-3}+2r \pmod 7$，$a_{4n}=a_{4n-1}+a_{2n}\equiv a_{4n-1}+r \pmod 7 \equiv a_{4n-3}+3r \pmod 7$，$\cdots$，$a_{4n+3}=a_{4n+2}+a_{2n+1}\equiv a_{4n+2}+r \pmod 7 \equiv a_{4n-3}+6r \pmod 7$. 因此 a_{4n-3}，a_{4n-2}，$\cdots$，a_{4n+3} 构成模 7 的一个完全剩余系，故存在 $m\in\{4n-3,\ 4n-2,\ \cdots,\ 4n+3\}$，使得 $a_m\equiv 0 \pmod 7$.

这样，我们从 a_5 出发结合上面的推导可知 $\{a_n\}$ 中有无穷多项是 7 的倍数.

例 7 (1) 证明：对任意正整数 $n\ (\geqslant 2)$，存在 n 个不同的正整数 a_1，$\cdots$，a_n，使得对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$，都有 $(a_i-a_j)\mid(a_i+a_j)$.

(2) 是否存在一个由正整数组成的无穷集 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$，使得对任意 $i\neq j$，都有 $(a_i-a_j)\mid(a_i+a_j)$？

证明 (1) 当 $n=2$ 时，取数 1，2 即可.

设命题对 n 成立，即存在正整数 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，满足：对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$，都有 $(a_i-a_j)\mid(a_i+a_j)$，现在考虑下面的 $n+1$ 个数.

$$A,\ A+a_1,\ A+a_2,\ \cdots,\ A+a_n. \qquad ①$$

这里 $A=a_n!$，其中 $a_n!=1\times2\times3\times\cdots\times a_n$.

从①中任取两个数 $x<y$，若 $x=A$，$y=A+a_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，则 $y-x=a_i$，而 $x+y=2A+a_i$，结合 $a_i\leqslant a_n$，知 $a_i\mid A$，故 $(y-x)\mid(y+x)$；若 $x=A+a_i$，$y=A+a_j$，$1\leqslant i<j\leqslant n$，则 $y-x=a_j-a_i$，$y+x=2A+(a_i+a_j)$，由归纳假设 $(a_j-a_i)\mid(a_j+a_i)$，又 $a_j-a_i<a_n$，故 $(a_j-a_i)\mid A$，所以，$(y-x)\mid(y+x)$. 从而命题对 $n+1$ 成立.

综上，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$，存在满足条件的 n 个正整数.

(2) 若存在无穷多个正整数 $a_1<a_2<\cdots$，使得对任意 $1\leqslant i<j$，都有 $(a_j-a_i)\mid(a_j+a_i)$. 则对任意 $j>1$，有 $(a_j-a_1)\mid(a_j+a_1)$，故 $(a_j-a_1)\mid 2a_1$. 而由 $a_1<a_2<\cdots$，知 $2a_1$ 可以被无穷多个正整数整除，这是一个矛盾.

所以,不存在满足条件的无穷多个正整数.

说明 数学归纳法证明的是:对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $P(n)$成立,也就是说它处理的是关于任意有限的正整数 n 的命题,并不能断定 $P(\infty)$成立,这里部分地体现了有限与无穷的本质区别. 此例中(1)与(2)的对比可看出这一点.

当然,用数学归纳法处理存在性问题也能处理与无穷有关的一些结论,例如例 7 的处理. 对比例 7 与例 8 中的递推结构的构造,可发现两者有本质不同,前者把前面的结果“包容下来”,而后者却把前面的数都“扬弃”了.

例 8 设 $n\ (\geqslant 5)$ 为给定的正整数,已知任意一个边数为 e 的 n 阶简单图 G 中都存在两个恰有一个公共顶点的三角形. 求 e 的最小值.

解 考虑一个两部图 G,它的顶点集可分为 M_1、M_2,其中 M_1 中有 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 个顶点,而 M_2 中有 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个顶点. 让 M_1 中每个点与 M_2 中的每个点都连边,且将 M_1 中的某两个点之间连边, G 中其余点对之间不连边,则 G 的边数 $e=\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]+1=\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$, 并且 G 中任意两个三角形都有一条公共边,即 G 中没有两个三角形恰有一个公共顶点. 所以, $e \geqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]+2$.

下证:当 $e \geqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]+2$ 时,任意一个边数为 e 的 n 阶简单图 G 中都存在两个恰有一个公共顶点的三角形. ①

对 n 归纳予以证明. 当 $n=5$ 时, G 的边数 $\geqslant 8$, 此时 G 为完全图 K_5 去掉至多两条边后得到,由于 K_5 中每个顶点的度都为 4,去掉两条边后,至少还有一个顶点的度等于 4,不妨设顶点 A 的度为 4,这时所去的两条边为由 B、C、D、E 所形成的完全图 K_4 中的边,考虑该 K_4 中的三组对边(BC 与 DE、BD 与 CE、BE 与 CD),去掉两条边后,必有一组对边被完整地保留,设这组对边为 BC 和 DE,则$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 为所求. 故 $n=5$ 时命题①成立.

现设①对 $n-1\ (n \geqslant 6)$ 成立,考虑 n 的情形.

(1) 若 G 中有一个顶点的度 $\leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, 则将 G 中该顶点及其引出的边去掉后,所得 $n-1$ 阶子图的边数 $\geqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]+2-\left[\frac{n}{2}\right]=2+\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right)$ $=2+\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]=\left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]+2$, 从而由归纳假设可知命题①成立.

(2) 若 G 中每个顶点的度都不小于 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$, 则当 $n=2k$ 时, $e \geqslant k(k+$

$1)>k^2+2=\left[\frac{n^2}{4}\right]+2$；当 $n=2k+1$ 时，$e\geqslant\frac{1}{2}(2k+1)(k+1)=k(k+1)+\frac{k+1}{2}\geqslant\left[\frac{n^2}{4}\right]+2$，最后一个不等式等号仅当 $k=3$，即 $n=7$ 成立.

如果 $e>\left[\frac{n^2}{4}\right]+2$，那么我们可以在 G 中任意去掉一条边后，重复上述讨论，除 $n=7$，且每个顶点的度都为 4 的情况以外，每种情形都可化为(1)，因此仅需讨论 G 是一个度都为 4 的 7 阶图的情形.

这时，考虑由 A 引出的 4 条边 AB、AC、AD、AE，在顶点 B、C、D、E 中，每个点都至少与另外三个点之一有边相连，不妨设 B、C 之间连有边. 若 D、E 之间也连有边，则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 为所求，故可设 D、E 之间没连边(如图 2 所示). 现在 G 中如果有边 BD、CE 或 BE、CD，则命题①已成立，因此 D、E 都与 B 连边或者都与 C 连边，不妨设 G 中有边 BD 和 BE，且 C、D、E 之间两两不连边. 注意到，G 中点 C、D、E 的度都为 4，故 C、D、E 都与 G 中的另外两点 X、Y 同时有边相连，并且 X 与 Y 之间也有边相连(这是因为 X、Y 都与 A、B 没有边相连)，这样，G 是如图 2 所示的简单图，此时 $\triangle CBA$ 与 $\triangle CXY$ 为所求.

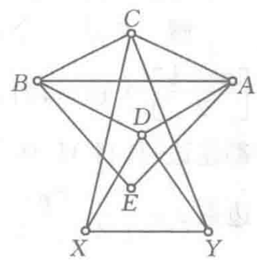


图 2

从而，命题①对 n 成立，所以，命题①对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ $(n\geqslant5)$ 成立.

综上可知，e 的最小值为 $\left[\frac{n^2}{4}\right]+2$.

说明 一个 n 阶简单图的边数不小于 $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$ 时必出现三角形，这是图兰定理的一个特殊情况，此题是对该结论的一个讨论.

2 第二数学归纳法

第二数学归纳法 设 $P(n)$是关于正整数 n 的一个命题(或性质). 如果

(1) 当 $n=1$ 时, $P(n)$成立;

(2) 由"对一切小于 n 的正整数 k, $P(k)$都成立"可以推出 $P(n)$成立.

那么,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $P(n)$都成立.

证明 考虑命题 $Q(n)$:"对所有 $1\leqslant k\leqslant n$, $k\in\mathbf{N}^*$, $P(k)$ 都成立". 则由 $Q(n)$成立,可知 $P(n)$成立.

当 $n=1$ 时,由(1)知 $Q(n)$成立.

现设 $Q(n-1)(n\geqslant 2)$ 成立,即对所有 $1\leqslant k\leqslant n-1$, $P(k)$ 都成立,则由(2)知 $P(n)$成立,所以,对 $1\leqslant k\leqslant n$, $P(k)$都成立,从而 $Q(n)$成立.

于是,由第一数学归纳法可知对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $Q(n)$都成立,进而 $P(n)$成立. 第二数学归纳法获证.

第二数学归纳法是第一数学归纳法的推论,在作归纳假设时,我们假设了 $P(1)$, $\cdots$, $P(n-1)$ 都成立,并在此前提下证出 $P(n)$成立,这是区别于第一数学归纳法的地方,有时会给证明带来很大的方便.

例 1 斐波那契(Fibonacci)数列$\{F_n\}$定义如下: $F_0=F_1=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $n=0, 1, 2, \cdots$. 证明:每一个正整数 m 都可以惟一地表示为如下形式

$$\begin{aligned} m &= (a_n a_{n-1}\cdots a_1)_F \\ &= a_nF_n+a_{n-1}F_{n-1}+\cdots+a_1F_1, \end{aligned} \qquad ①$$

这里 $a_i\in\{0, 1\}$, $a_n=1$, 并且不存在下标 $1\leqslant i\leqslant n-1$, 使得 $a_i=a_{i+1}=1$.

证明 当 $m=1$ 时,命题显然成立.

现设对所有小于 m 的正整数 k 命题成立,即 k 可以惟一地表示为①的形式,考虑 m 的情形.