移动宽带
技术丛书

真才基 主编

OFDM/MIMO
系统资源分配与调度

OFDM/MIMO System Resource Allocation and Scheduling

沈祖康 孙韶辉 等 编著

大唐无线移动创新中心
最新力作

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

移动宽带技术丛书

OFDM/MIMO 系统资源分配与调度

OFDM/MIMO System Resource Allocation and Scheduling

真才基 主编

沈祖康 孙韶辉 等 编著

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

OFDM/MIMO系统资源分配与调度 / 真才基主编 ; 沈祖康等编著. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2016.6
（移动宽带技术丛书）
ISBN 978-7-115-38192-7

Ⅰ. ①O… Ⅱ. ①真… ②沈… Ⅲ. ①移动通信－通信系统－资源分配－研究 Ⅳ. ①TN929.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第263105号

内 容 提 要

本书首先概述了研究 OFDM/MIMO 系统资源分配所需的数学和通信理论基础，包括概率与随机过程、信息论、优化理论和矩阵理论；然后介绍单用户信道容量，接着叙述 OFDM 和 MIMO 系统中多用户资源分配和调度的常用算法；最后介绍该领域内的最新研究方向。本书结合无线通信系统信道容量的理论分析和实际算法实现，使读者在 OFDM/MIMO 系统资源分配和调度方面能获得全面信息。

本书适合从事移动通信技术研究与产品开发的人员、系统运营管理人员，以及高等院校通信专业的师生阅读参考。

◆ 主　　编　真才基
编　　著　沈祖康　孙韶辉　等
责任编辑　杨　凌
责任印制　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京鑫正大印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：10.75　　2016 年 6 月第 1 版
字数：259 千字　　2016 年 6 月北京第 1 次印刷

定价：55.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京东工商广字第 8052 号

《移动宽带技术丛书》编委会

丛书序言

2012年1月，国际电信联盟发布了IMT-Advanced（4G）标准，由我国政府主导、大唐电信集团拥有核心基础专利的TD-LTE-Advanced被国际电信联盟正式投票确立成为全球4G国际标准之一。TD-LTE-Advanced是基于TD-SCDMA后续演进的4G技术标准方案，中国的通信人在全球第四代移动通信国际标准竞争中实现了新的跨越。

回首我国通信史，起源于洋务运动，至今已有130多年的历史。百年来，中国通信业从传统的电报电话业务发展到现代通信业务，无论是技术手段还是经营方式都发生了巨大变化。20世纪80年代后期至今的20多年时间里，中国通信业依靠技术引进，完成了第一代移动通信在中国市场的发展进程。20世纪90年代初以来，全球第二代移动通信技术和产业的快速崛起，为我国通信业大发展提供了难得的契机，我国通信业开始集聚培养出一批技术专家人才，产业界也积极学习借鉴并不断提高产业化配套能力。正是在这个时期，中国的通信人意识到，如果没有自主的通信技术和标准，就永远无法掌握发展的主动权，就不可能在全球通信产业领域取得与国际主流企业博弈竞争的话语权。

从TD-SCDMA到TD-LTE-Advanced这十多年，我们见证了全球无线移动通信由2G时代向3G时代的升级跨越。同时，这宝贵的十年也是我国无线移动通信市场快速发展的黄金时期。十年间，我国政府在通信领域相继启动了一批重大技术和产业化项目，使得我国通信领域的科技创新能力大大增强，突出体现在通信领域内专利数量的快速增长以及专利水平和质量的提升上，我国通信企业能够持续参与主导国际标准的竞争；十年间，我国通信产业的国际竞争力显著增强，产业布局更趋合理，特别是以TD-SCDMA产业发展为契机，我国通信企业在芯片、仪器仪表等产业链关键环节的竞争力得到培育与提升；十年间，由于移动宽带技术在行业信息化等诸多领域广泛应用，工业化与信息化的融合逐步深入，特别是以新一代信息技术的发展为契机，移动互联网、物联网、三网融合等新兴产业领域发展迅速，为移动通信产业的升级发展提供了新的广阔空间。

今天，身处全球通信产业激烈竞争中的中国通信人满怀豪情与自信。从追赶到并驾齐驱，从同步竞争到超越发展，中国通信人已经在即将到来的全球4G产业发展的浪潮中看到了中国通信业发展由大到强的历史宿命。

科技进步日新月异。回顾移动通信技术发展的历程，我们可以粗略描绘出未来信息通信的发展趋势。随着集成电路工艺技术的发展和工艺形态的变化，3D晶体管技术将可能在22nm技术上得到较为广泛的应用。按照摩尔定律进行推断预测，未来5到10年，全球集成电路工艺技术将跨入10nm时代。由于采用更为先进的集成电路设计和制造工艺，集成电路技术使

得单芯片运算能力能够支持 1Gbit/s 以上的通信处理能力。届时我们会看到，信息通信技术将进入一个崭新的时代。而伴随着摩尔定律“撞墙”，信息通信技术的发展也将面临新的增长模式和产业形态的挑战。

未来 10 年，我们有理由相信无线移动通信系统将会不断地发展变化，从无缝全覆盖到热点高速率的移动通信需求都将得到良好的网络和服务支持，终端和业务应用将成为移动宽带生态的主导者。无线移动通信应用也将从人对人通信发展到机器对机器通信，从公众服务发展到行业应用，从简单通信发展到工作生活的方方面面。无线移动通信技术将持续在接入能力、频谱利用、网络覆盖、绿色节能等方面提升系统性能，在满足移动互联网的爆炸式增长、海量机器类终端的广泛普及的需求的同时，应对频率资源特别是低频资源的缺乏、网络部署和运营复杂性提升、能源供给和绿色通信的挑战。无线移动通信技术与计算机及信息技术也会有更加紧密和更深层次的交叉融合，将有可能给整个信息通信技术领域带来更具突破性和颠覆性的发展和变化。

面对新一代信息技术快速发展所带来的难得的历史性战略机遇，我们有理由相信，中国通信人能够培育构建更具竞争力的创新链，继续主导和推动全球无线移动通信技术新一轮的升级发展；中国通信人能够依托中国巨大的市场资源，使得中国通信企业逐步在全球通信市场竞争中彰显新的优势；中国通信人能够把握产业调整与产业生态构建的机遇，提升中国通信产业的国际竞争力；中国通信人能够不断探索创新独具特色的发展模式，以自身的努力和拼搏，实现建设信息通信强国的梦想！

设立和出版《移动宽带技术丛书》的初衷，是为了给一批矢志不渝投身于中国通信业发展的科技英才提供一个充分展示他们在技术创新和产业研究等方面所取得的丰硕成果的舞台。《移动宽带技术丛书》汇集了这些探索者坚持科技创新、锐意进取、砥砺奋进的智慧结晶，汇集了战斗在科研一线的专家最新的研究成果。本丛书以移动通信、宽带技术为主要内容，由《TD-LTE 移动宽带系统》、《TD-LTE 网络规划原理与应用》，以及后续陆续出版的关于 LTE 系统资源分配与调度、LTE 网络融合、LTE-Hi 及 Small Cell、车联网等系列著作组成。各领域专家在书中呈现了各自领域的创新成果及专业见解，并对相关技术领域做了深入研究和分析。

限于编者水平，书中难免存在错误和不妥之处，敬请各位专家、同仁批评指正，以便进一步修改完善。

丛书主编

真才基

2012 年 12 月

前　言

移动互联网近几年高速发展，已深入人类生活的各个领域。无线通信作为移动互联网的使能技术，也越来越受到重视。ITU-R 于 20 世纪 90 年代后期推出 IMT-2000，旨在定义第三代无线通信技术。第三代无线通信技术基于码分多址（Code Division Multiple Access），包括 WCDMA、cdma2000 和 TD-SCDMA 3 种协议，于 2000 年被 ITU 接纳。随后 ITU-R 开始致力于下一代无线通信协议的制定，于 2005 年为第四代（4G）无线通信系统命名为 IMT-Advanced。2012 年 1 月，基于 3GPP LTE-Advanced 和基于 IEEE WirelessMAN-advanced 的两大协议被 ITU 确定为第四代无线通信系统协议。目前 ITU-R 正在积极开展 IMT-2020（即第五代无线通信系统，5G）的相关研究工作，制定 5G 需求，分析潜在可行技术，预计 5G 无线通信协议将于 2020 年产生。5G 除了进一步提高人与人之间的通信性能外，还将扩展到人与物、物与物之间的通信，构建一个能允许万物相通的无线通信系统。

正交频分复用（Orthogonal Frequency Division Multiplexing，OFDM）可以将传输系统带宽划分为多个正交的频域资源，在简化信道均衡复杂度的同时又能提高系统频谱效率，于过去 10 多年中在有线通信和无线通信领域均得到广泛的应用。多天线传输（Multiple Input Multiple Output，MIMO）利用发送端和接收端的多个天线单元，在空域中制造出多个并行信道，允许在多个并行的空域信道中传输不同的信息流，提供更高的频谱效率。因此，OFDM 和 MIMO 同时被两大 4G 通信协议 LTE-Advanced 和 WirelessMAN-advanced 所采用。为了满足 5G 无线通信系统的性能指标，其使用的频谱资源预期将包括目前使用的 IMT 频谱（<6GHz），以及未来可能用于 IMT 系统的频域（>6GHz）。因此，5G 通信系统将包括目前 4G 技术的演进和一系列适用于高频段的新技术。随着有源天线技术的成熟，大规模二维天线阵列也将成为 5G 系统不可或缺的技术之一。可以预期，OFDM 和 MIMO 依然会成为 5G 通信系统的核心技术。

OFDM 和 MIMO 两大技术的一个共同之处在于能产生一系列频域或者空域的并行信道，用于传输不同的数据，提高频谱效率和传输速率。对于 OFDM/MIMO 系统，如何为多个并行信道确定相应的传输资源和参数，对于能否充分发掘 OFDM/MIMO 技术的优势起着决定性的作用。本书通过使用概率论、信息论、优化论和矩阵论等技术理论，阐述 OFDM/MIMO 系统的理论信道容量或传输速率，同时讨论低复杂度的近似最优资源分配方式，在获得较高的系统性能下降低算法复杂度，使其能适用于产品实现。

通过阅读本书，作者希望读者能对 OFDM/MIMO 系统有较为完整的了解，掌握 OFDM/

MIMO 系统的资源分配的分析方法，为进一步改善 OFDM/MIMO 系统性能的研究工作奠定一定的基础。

作者

2016 年 2 月

目　录

第 1 章
基本理论简介

1.1 概率论

1.1.1 概率

在定义概率之前，首先定义域和 Sigma 域。

定义：考虑一个集合 Ω 以及它的子集 E_1，E_2，E_3，…，当以下条件满足时，$\{E_1, E_2, E_3, \cdots\}$ 形成一个域 Ψ。

1. $\Omega \in \Psi$；
2. 如果 $E_m \in \Psi$ 且 $E_n \in \Psi$，则 $E_m \cup E_n \in \Psi$ 且 $E_m \cap E_n \in \Psi$；
3. 如果 $E_m \in \Psi$，则 E_m 的补集 $E_m^c \in \Psi$。 ■

定义：如果域 Ψ 对其内任意可数个元素的交集和补集都是闭合的，即 E_1，…，E_n，…属于 Ψ，则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \Psi$ 且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Psi$，那么该域 Ψ 为一个 Sigma 域。 ■

一个**随机实验** $\wp$ 的输出结果是不确定的，即重复相同的试验可以获得不同的结果。所有该随机实验结果的集合称为**样本空间** Ω。一个样本空间的一个子集称为一个**事件**。有了样本空间 Ω 及其形成的 Sigma 域 Ψ，就可以定义概率。

定义：对由样本空间 Ω 形成的 Sigma 域 Ψ $\{E_1, E_2, E_3, \cdots\}$ 内的每个事件 E_m，概率 $P[\bullet]$ 产生一个值 $P[E_m]$，该值称为事件 E_m 的概率，并且满足：

（1） $P[E_m] \geqslant 0$；

（2） $P[\Omega] = 1$；

（3） $P[E_m \cup E_n] = P[E_m] + P[E_n]$，如果 $E_m \cap E_n = \varnothing$。 ■

由上述概率的 3 条特性，可以推出以下公式成立：

（4） $P[\varnothing] = 0$；

（5） $P\left[E_m \cap E_n^c\right] = P[E_m] - P[E_m \cap E_n]$；

（6） $P[E_m] = 1 - P\left[E_m^c\right]$；

（7）$P\left[E_m \cup E_n\right]=P\left[E_m\right]+P\left[E_n\right]-P\left[E_m \cap E_n\right]$；

（8）$P\left[\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right] \leqslant \sum_{i=1}^{m} P\left[E_i\right]$（称为联合界或一致限）。

定义：一个概率空间Φ包括一个样本空间Ω、由Ω的事件形成的 Sigma 域和概率$P[\bullet]$。 ■

1.1.2 联合概率、条件概率和贝叶斯定理

定义：联合概率是指两个事件同时发生的概率，例如，事件A和B的联合概率可以表示为$P[A \cap B]$或者$P[AB]$或者$P[A,B]$。 ■

定义：条件概率是指一个事件在另一个事件发生的前提下发生的概率，例如，事件A对于事件B的条件概率可以表示为$P[A|B]$，即在事件B发生的前提下，事件A发生的概率。条件概率的数学定义为：

$$P[A \mid B] \triangleq \frac{P[AB]}{P[B]}$$ ■

贝叶斯定理：假设A_i（$i=1,2,\cdots,n$）是定义在一个概率空间$\Phi(\Omega,\Psi,P)$上的n个事件，并且满足：（1）$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$；（2）如果$i \neq j$，则$A_i A_j=\varnothing$，则对于定义在$\Phi(\Omega,\Psi,P)$上的任意事件$B$，若$P[B]>0$，则

$$P\left[A_j \mid B\right]=\frac{P[B \mid A_j]P[A_j]}{\sum_{i=1}^{n} P[B \mid A_i]P[A_i]}$$

证明：由于$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$，并且$A_i A_j=\varnothing$，$i \neq j$，则

$$P[B]=P\left[B\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right]=P\left[\bigcup_{i=1}^{n} BA_i\right]=\sum_{i=1}^{n} P[BA_i]=\sum_{i=1}^{n} P[B \mid A_i]P[A_i]$$

因此，

$$P\left[A_j \mid B\right]=\frac{P[A_j B]}{P[B]}=\frac{P[B \mid A_j]P[A_j]}{P[B]}=\frac{P[B \mid A_j]P[A_j]}{\sum_{i=1}^{n} P[B \mid A_i]P[A_i]}$$ ■

1.1.3 随机变量

定义：随机变量X为一个函数$X:\Omega \to \mathbb{R}$，即X将一个样本空间Ω上的任一事件E映射到一个实数$X(E)$。 ■

随机变量X形成了另一个概率空间$(\mathbb{R},\Theta,P_X)$，其中，$\mathbb{R}$为实数集；Θ为实数集的博雷尔代数，包括所有由可数个$(-\infty,x]$形式的并集和/或交集形成的实数子集；P_X是一个概率，对于每个$B \in \Theta$，$P_X[B] \geqslant 0$。对于事件$\{E:X(E) \leqslant x\}$（或简称为$\{X \leqslant x\}$），其概率称为随机变量X的概率分布函数，即

定义：概率分布函数$F_X(x) \triangleq P[\{E:X(E) \leqslant x\}]=P_X[(-\infty,x]]=P[X \leqslant x]$。 ■

概率分布函数$F_X(x)$有如下特性。

（1）有界性：$F_X(-\infty)=0$，$F_X(+\infty)=1$；

（2）单调性：如果 $x_1 \leqslant x_2$，则 $F_X(x_1) \leqslant F_X(x_2)$；

（3）右边界连续性：$\lim\limits_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$。

事件 $\{X = x\}$ 的概率 $P[X = x] \triangleq F_X(x) - F_X(x^-) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} P[x - \varepsilon < X \leqslant x]$。当 $F_X(x)$ 在 x_0 处为连续时，$P[X = x_0] = 0$；当 $F_X(x)$ 在 x_0 处不连续时，则 $P[X = x_0] > 0$。

定义：如果 $F_X(x)$ 是连续的，并且是可微分的，则 $f_X(x) = \dfrac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}$ 成为概率密度函数。■

概率密度函数 $f_X(x)$ 有如下特征：

（1）$\forall -\infty < x < +\infty$，$f_X(x) \geqslant 0$；

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$；

（3）$\forall -\infty < x_1 < x_2 < +\infty$，$P[x_1 < x \leqslant x_2] = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\mathrm{d}x$。

定义：若对于任意 $x \in \mathbb{R}$，$F_X(x)$ 连续，并且除了可数个值 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 以外 $f_X(x)$ 均存在，则 X 被称为一个连续随机变量。■

定义：若仅对于有限个数或者可数个数的 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$，$P[X = x_n] > 0$，则 X 被称为一个离散随机变量。■

借用 Dirac Delta 函数 $\delta(x)$，即 $\delta(x)$ 在 $x = 0$ 以外的点都为零，并且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x = 1$，也可以定义离散随机变量的概率密度函数。例如，假设一个离散随机变量 X 在有限个数 $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ 上的概率分别为 $P[X = x_n] = p_n > 0$，则 X 的概率密度函数为

$$f_X(x) = \sum_{n=1}^{N} p_n \delta(x - x_n)$$

1.1.4　条件分布和联合分布

定义：考虑一个概率空间 $\Phi(\Omega, \Psi, P)$ 以及一个随机变量 $X: \Omega \to \mathbb{R}$ 形成的概率空间 $(\mathbb{R}, \Theta, P_X)$，对于样本空间 Ω（或 Θ）的一个事件 E，X 对于 E 的条件分布函数为

$$F_X(x \mid E) \triangleq \frac{P[X \leqslant x, E]}{P[E]}$$ ■

$F_X(x \mid E)$ 具有概率分布函数的所有特性，即有界性、单调性和右边界连续性。并且对于任意 $x_1 < x_2$，可以得到 $P[x_1 < x \leqslant x_2 \mid E] = F_X(x_2 \mid E) - F_X(x_1 \mid E)$。

定义：考虑一个概率空间 $\Phi(\Omega, \Psi, P)$ 以及一个随机变量 $X: \Omega \to \mathbb{R}$ 形成的概率空间 $(\mathbb{R}, \Theta, P_X)$，对于样本空间 Ω（或 Θ）的一个事件 E，X 对于 E 的条件概率密度函数为

$$f_X(x \mid E) \triangleq \frac{\mathrm{d}F_X(x \mid E)}{\mathrm{d}x}$$ ■

概率密度函数的贝叶斯定理：考虑一个概率空间 $\Phi(\Omega, \Psi, P)$ 以及一个随机变量 $X: \Omega \to \mathbb{R}$ 形成的概率空间 $(\mathbb{R}, \Theta, P_X)$，对于样本空间 Ω（或 Θ）的一个事件 E，若 $f_X(x) \neq 0$，

$$P\left[E \mid X=x\right]=\frac{P[E,X=x]}{P[X=x]}=\frac{f_X(x \mid E)P[E]}{f_X(x)}$$

证明：如果 X 是一个连续随机变量，则 $P\left[X=x\right]=0$，因此上式无定义。可以通过以下方式计算 $P\left[E \mid X=x\right]$。

$$\begin{aligned}P\left[E \mid X=x\right]&=\lim_{\Delta x\to 0}P[E \mid x<X\leqslant x+\Delta x]\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P[x<X\leqslant x+\Delta x,E]}{P[x<X\leqslant x+\Delta x]}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P[x<X\leqslant x+\Delta x \mid E]P[E]}{P[x<X\leqslant x+\Delta x]}\\&=\frac{f_X(x \mid E)P[E]}{f_X(x)}\end{aligned}$$ ■

由上述概率密度函数的贝叶斯定理可以得到以下重要特性：

$$P\left[E\right]=P[E]\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x \mid E)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x \mid E)P[E]\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}P[E \mid X=x]f_X(x)\mathrm{d}x$$

上述特性表明，一个事件 E 的概率可以通过在 X 的域上将 E 对于随机变量 X 的条件概率与 X 的概率密度函数的乘积进行积分得到。

定义：考虑一个概率空间 $\Phi\left(\Omega,\Psi,P\right)$ 以及 Φ 定义的两个随机变量 $X:\Omega\to\mathbb{R}$ 和 $Y:\Omega\to\mathbb{R}$，X 和 Y 的联合分布函数为

$$F_{XY}(x,y)=P[X\leqslant x,Y\leqslant y]$$ ■

对于任意的 x 和 y，$F_{XY}(x,y)\geqslant 0$，并且 $F_{XY}(x,+\infty)=F_X(x)$，$F_{XY}(+\infty,y)=F_Y(y)$。

定义：考虑一个概率空间 $\Phi\left(\Omega,\Psi,P\right)$ 以及 Φ 定义的两个随机变量 $X:\Omega\to\mathbb{R}$ 和 $Y:\Omega\to\mathbb{R}$，如果 X 和 Y 的联合分布函数 $F_{XY}(x,y)$ 连续并且可微分，则 X 和 Y 的联合概率密度函数为

$$f_{XY}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{XY}(x,y)$$ ■

X 和 Y 的联合概率密度函数与联合分布函数的关系为

$$F_{XY}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_{XY}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

X 和 Y 的联合分布函数 $F_{XY}(x,y)$ 有如下特性：

（1）$F_{XY}(x,+\infty)=F_X(x)$，$F_{XY}(+\infty,y)=F_Y(y)$，$F_{XY}(x,-\infty)=F_{XY}(-\infty,y)=0$，$F_{XY}(+\infty,+\infty)=1$；

（2）$\forall x_1\leqslant x_2,y_1\leqslant y_2$，$F_{XY}(x_1,y_1)\leqslant F_{XY}(x_2,y_2)$；

（3）$F_{XY}(x,y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}F_{XY}(x+\Delta x,y+\Delta y)$，$\Delta x,\ \Delta y>0$。

对于任意的 $x_1<x_2$ 和 $y_1<y_2$，可以计算得到事件 $\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}$ 的概率为

$$P[x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2]=F_{XY}(x_2,y_2)-F_{XY}(x_1,y_2)-F_{XY}(x_2,y_1)+F_{XY}(x_1,y_1)$$

对于任意事件 $\left\{(x,y)\in\aleph\right\}$，其概率为

$$P\left[(x,y)\in\aleph\right]=\iint_{(x,y)\in\aleph} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

X 和 Y 的联合概率密度函数 $f_{XY}(x,y)$ 有如下特征。

（1） $\forall x, y$， $f_{XY}(x,y)\geqslant 0$；

（2） $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)=1$；

（3） $f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=P\left[x<X\leqslant x+\mathrm{d}x, y<Y\leqslant y+\mathrm{d}y\right]$。

对于定义在相同概率空间的两个随机变量 X 和 Y，随机变量 X 的边缘分布函数为 $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\alpha$，随机变量 X 的边缘密度函数为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y$，随机变量 Y 的边缘分布函数为 $F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$，随机变量 Y 的边缘密度函数为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x$。

定义：对于定义在相同概率空间的两个随机变量 X 和 Y，若对于任意 x 和 y，$F_{XY}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，则随机变量 X 和 Y 互相独立。 ■

对于相互独立的随机变量 X 和 Y，有如下特征。

（1） $f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$；

（2） $F_X(x\,|\,Y\leqslant y)=\dfrac{F_{XY}(x,y)}{F_Y(y)}=F_X(x)$， $F_Y(y\,|\,X\leqslant x)=\dfrac{F_{XY}(x,y)}{F_X(x)}=F_Y(y)$；

（3） $f_X(x\,|\,Y\leqslant y)=f_X(x)$， $f_Y(y\,|\,X\leqslant x)=f_Y(y)$；

（4） $P[x_1<X\leqslant x_2, y_1<Y\leqslant y_2]=P[x_1<X\leqslant x_2]P[y_1<Y\leqslant y_2]$。

上述第三条特性可以由下式得到：

$$\begin{aligned}
f_X(x\,|\,Y\leqslant y)&=\frac{\mathrm{d}F_X(x\,|\,Y\leqslant y)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}P[X\leqslant x, Y\leqslant y]}{\mathrm{d}xP[Y\leqslant y]}\\
&=\frac{\mathrm{d}P[X\leqslant x]P[Y\leqslant y]}{\mathrm{d}xP[Y\leqslant y]}=\frac{\mathrm{d}P[X\leqslant x]}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}\\
&=f_X(x)
\end{aligned}$$

对于定义在相同概率空间的两个随机变量 X 和 Y， Y 对于 $\{X=x\}$ 的条件概率密度函数 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$ 的一个重要特性为 $f_{Y|X}(y\,|\,x)=\dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$，若 $f_X(x)\neq 0$。下面简要证明此特性。

$$\begin{aligned}
f_{Y|X}(y\,|\,x)&=\frac{\mathrm{d}F_Y(y\,|\,X=x)}{\mathrm{d}y}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{F_Y(y+\Delta y\,|\,x<X\leqslant x+\Delta x)-F_Y(y\,|\,x<X\leqslant x+\Delta x)}{\Delta y}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{P[y<Y\leqslant y+\Delta y\,|\,x<X\leqslant x+\Delta x]}{\Delta y}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{P[x<X\leqslant x+\Delta x, y<Y\leqslant y+\Delta y]}{\Delta y\cdot P[x<X\leqslant x+\Delta x]}
\end{aligned}$$

■

$$= \lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \left(\frac{P[x < X \leqslant x+\Delta x, y < Y \leqslant y+\Delta y]}{\Delta x \Delta y} \frac{1}{\dfrac{P[x < X \leqslant x+\Delta x]}{\Delta x}} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \left(\frac{F_{XY}(x+\Delta x, y+\Delta y) - F_{XY}(x, y+\Delta y) - F_{XY}(x+\Delta x, y) + F_{XY}(x, y)}{\Delta x \Delta y} \right.$$

$$\left. \frac{1}{\dfrac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x}} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} \frac{1}{\partial F_X(x)/\partial x}$$

$$= \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

同理，X 对于 $\{Y = y\}$ 的条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x \mid y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$，若 $f_Y(y) \neq 0$。

1.1.5 随机变量的函数

对于一个概率空间 $\Phi(\Omega, \Psi, P)$ 以及 Φ 上定义的一个随机变量 $X:\Omega \to \mathbb{R}_X$，若 $g(\bullet)$ 为一个函数，则 $Y = g(X)$ 也为一个随机变量 $Y:\Omega \to \mathbb{R}_Y$。即对于任意的事件 $E \in \Omega$，$Y = g(X)$ 将 $X(E) \in \mathbb{R}_X$ 转换为 $Y(E) \in \mathbb{R}_Y$。此时随机变量 Y 称为随机变量 X 的函数。随机变量 Y 也可以被认为是从 $\mathbb{R}_X$ 到 $\mathbb{R}_Y$ 的一个映射。根据随机变量 Y 和 X 的定义，事件 $\{E:Y(E) \leqslant y\}$ 的概率和事件 $\{E:G(X(E)) \leqslant y\}$ 的概率是相同的。

若随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$，对于可微分的函数 $g(\bullet)$，随机变量 $Y = g(X)$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$ 可以由 $f_X(x)$ 和 $g(\bullet)$ 获得。对于事件 $\{y < Y \leqslant y + \mathrm{d}y\}$，假设 $y = g(x)$ 有 n 个实数解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 且 $g'(x_i) \neq 0$，则 $\{y < Y \leqslant y + \mathrm{d}y\}$ 对应 n 个互不相交的事件 $\{x_i < X < x_i + |\mathrm{d}x_i|\}$（如果 $g'(x_i) > 0$）或 $\{x_i - |\mathrm{d}x_i| < X < x_i\}$（如果 $g'(x_i) < 0$）的合集。因此：

$$P[y < Y \leqslant y + \mathrm{d}y] = f_Y(y)|\mathrm{d}y| = \sum_{i=1}^{n} f_X(x_i)|\mathrm{d}x_i|$$

由上式可以得到

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} f_X(x_i) / \left| \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_i} \right|^{-1} = \sum_{i=1}^{n} f_X(x_i) / |g'(x_i)|^{-1}$$

对于一个概率空间 $\Phi(\Omega, \Psi, P)$ 以及 Φ 上定义的两个随机变量 $X:\Omega \to \mathbb{R}$ 和 $Y:\Omega \to \mathbb{R}$，若 $g(\bullet)$ 和 $h(\bullet)$ 为两个函数，则 $V = g(X,Y)$ 和 $W = h(X,Y)$ 也为 Φ 上定义的两个随机变量。随机变量 V 和 W 的联合概率密度函数 $f_{VW}(v,w)$ 可以由随机变量 X 和 Y 的联合概率密度函数

$f_{XY}(x,y)$ 以及 $g(\bullet)$ 、 $h(\bullet)$ 获得。对于事件 $\{v<V\leqslant v+\mathrm{d}v, w<W\leqslant w+\mathrm{d}w\}$，其概率为 $f_{VW}(v,w)A(\ell)$，其中 $A(\ell)$ 为由 (v,w)、$(v+\mathrm{d}v,w)$、$(v,w+\mathrm{d}w)$、$(v+\mathrm{d}v,w+\mathrm{d}w)$ 4 个点形成的矩形的面积。若有 n 个不同的 $(x_i=q_i(v,w), y_i=p_i(v,w))$ 产生相同的 (v,w)，根据随机变量的函数的定义，事件 $\{v<V\leqslant v+\mathrm{d}v, w<W\leqslant w+\mathrm{d}w\}$ 的概率为 $\sum_{i=1}^{n} f_{XY}(x,y)A(\vartheta_i)$，其中 $A(\vartheta_i)$ 为由 (x_i,y_i) 、 $\left(x_i+\frac{\partial q_i}{\partial v}\mathrm{d}v, y_i+\frac{\partial p_i}{\partial v}\mathrm{d}v\right)$ 、 $\left(x_i+\frac{\partial q_i}{\partial w}\mathrm{d}w, y_i+\frac{\partial p_i}{\partial w}\mathrm{d}w\right)$ 、 $\left(x_i+\frac{\partial q_i}{\partial v}\mathrm{d}v+\frac{\partial q_i}{\partial w}\mathrm{d}w, y_i+\frac{\partial p_i}{\partial v}\mathrm{d}v+\frac{\partial p_i}{\partial w}\mathrm{d}w\right)$ 4 个点形成的平行四边形的面积。因此，

$$f_{VW}(v,w)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A(\vartheta i)}{A(\ell)}f_{XY}(x,y)$$

式中，$A(\vartheta i)/A(\ell)$ 可以由雅可比矩阵 $\left|\tilde{J}_i\right|$ 获得：

$$\left|\tilde{J}_i\right|=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial q_i}{\partial w}\\ \frac{\partial p_i}{\partial v} & \frac{\partial p_i}{\partial w}\end{matrix}\right\|=\left|\frac{\partial q_i}{\partial v}\times\frac{\partial p_i}{\partial w}-\frac{\partial p_i}{\partial v}\times\frac{\partial q_i}{\partial w}\right|$$

同时 $\left|\tilde{J}_i\right|^{-1}\triangleq\left|J_i\right|$ 为

$$\left|\tilde{J}_i\right|^{-1}=\left|J_i\right|=\left|\frac{\partial g}{\partial x}\times\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial y}\times\frac{\partial h}{\partial x}\right|$$

因此

$$f_{VW}(v,w)=\sum_{i=1}^{n}f_{XY}(x,y)\left|\tilde{J}_i\right|=\sum_{i=1}^{n}f_{XY}(x,y)/\left|J_i\right|$$

1.1.6　期望、方差、矩和特征函数

定义： 一个概率空间 $\Phi(\Omega,\Psi,P)$ 以及 Φ 上定义的一个随机变量 $X:\Omega\to\mathbb{R}$，若 $f_X(x)$ 为 X 的概率密度函数且 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f_X(x)\mathrm{d}x<\infty$，则 X 的期望值为

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x \qquad ■$$

若 $Y=g(X)$，则随机变量 Y 的期望值为

$$E[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)\mathrm{d}x$$

定义： 一个概率空间 $\Phi(\Omega,\Psi,P)$ 以及 Φ 上定义的一个随机变量 $X:\Omega\to\mathbb{R}$，对于样本空间 Ω 的一个事件 F， X 对于 F 的条件期望值为

$$E[X|F]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x|F)\mathrm{d}x \qquad ■$$