



普通高等教育“十三五”规划教材

“信息与计算科学”专业综合改革试点项目丛书

离散数学

Discrete Mathematics

费文龙 彭 茂 杨振启 编



科学出版社



普通高等教育“十三五”规划教材

“信息与计算科学”专业综合改革试点项目丛书

离散数学

费文龙 彭 茂 杨振启 编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书从高等学校信息计算及计算机应用等本科专业所需的离散数学知识体系结构出发,介绍了离散数学课程的主要内容,理论与实例相结合,既具有详细的理论推理过程,又包含丰富的实例,同时将数学建模思想融入到教材内容的组织和实例的选取过程中,促进学生学以致用.本书内容主要包含数理逻辑、集合论、图论、代数系统四大部分.

本书可用作高等学校大学本科数学类和计算机类专业离散数学课程的教材,也可供对离散数学感兴趣的读者参考.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/费文龙,彭茂,杨振启编. —北京:科学出版社,2016.3

ISBN 978-7-03-047781-1

I. ①离… II. ①费… ②彭… ③杨… III. ①离散数学 IV. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 054351 号

责任编辑:胡 凯 许 蕾/责任校对:刘亚琦

责任印制:张 倩/封面设计:许 瑞

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

保定市中国画美凯印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 3 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2016 年 3 月第一次印刷 印张:13

字数:300 000

定价:39.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

计算机科学、综合自动化工程、经济学和生物学等学科的发展与实践,为应用数学提出了许多问题,而这些问题几乎都具有一个共同的特性——离散性.也就是说,这些问题所涉及的函数并不是定义在连续区间上的连续函数,而是定义在一些离散点上的离散函数,例如,经济学问题、生物学问题、计算机问题等.在求解这些问题时就不能使用我们在高等数学中学过的极限过程和连续性,为了解这一类问题,就产生了数学的一个新的分支——离散数学.

经济学中研究的经济现象其数据都是离散的,比如某个商品或股票的价格,在某一个时刻为 10 元,到了下一个时刻变成 10.01 元,这两个价格是离散的数据,因为价格的最小单位是 0.01 元,而价格又是跟时间相关的,只有在发生交易的时候价格才是有意义的、精确的,在相邻的两次交易之间,这个商品或股票的价格是不确定的.因此我们只能用散点图来表示价格变化,然后用经过这些散点的直线(折线)来近似表示价格的变化趋势.在生物学中,比如在研究生物种群的数量时,这个数量显然必须是整数,而不能是实数,因此种群数量也是离散的数据.在计算机科学中离散的例子更多.首先,从本质上说,现在的计算机是二进制计算机,只能处理离散数据,必须把指令和数据全部转换成二进制数,然后才能送到 CPU 中进行计算;其次,对于数学上的一些连续问题,要利用计算机来求解就必须将其转化成相应的离散问题.比如求积分 $\int_0^{\pi} \sin(x)dx$, 这个问题在数学上显然是个连续问题,其值为在 $[0, \pi]$ 区间内 $\sin(x)$ 曲线和 x 轴所围区域的面积,但是在计算机中求解时,就只能把这个区间划分成若干个足够小的区间,然后将每个区间上的曲边梯形近似为梯形,再将所有小梯形的面积累加起来近似为整个区域的面积.当每个小区间足够小时,这个近似面积就可以近似为所求的积分值.

因此,离散数学是计算机科学和信息科学的数学基础.教学内容一般包括四个相对独立的部分:

(1) 数理逻辑: 又称符号逻辑、理论逻辑. 它既是数学的一个分支,也是逻辑学的一个分支. 它是一门用数学的语言和方法研究逻辑或形式逻辑的学科,其研究对象是对证明和计算这两个直观概念进行符号化后的形式系统.

(2) 集合论: 是研究集合的数学理论,包含集合与集合之间的关系、集合内部元素与元素之间的关系等最基本数学概念. 在大多数现代数学的公式化中,集合论提供了如何描述数学物件的语言.

(3) 图论: 以图为研究对象,其中的图是由若干给定的点及连接两点的边所构成的图形,这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系.

(4) 代数系统: 是一门抽象的学科,主要研究定义在集合上的各种各样的运算,包括群、环、域、格、布尔代数等基本概念和理论.

本教材对这四个部分的基本内容分别进行了介绍, 可以作为进一步学习各部分后续内容的基础. 在学习之前, 有一个问题必须明确, 以上四个部分, 在数学中是作为四个不同的课程, 为何在此把它们共同组成一门课程呢? 其原因有:

(1) 它们具有共同的研究对象即离散对象.

(2) 都是计算机科学中一些课程的必备基础, 如: ①数理逻辑: 是自动机理论、编译原理、人工智能的基础课程之一; ②集合论: 是数据库的基础课程之一; ③图论: 是逻辑设计的基础课程之一; ④代数系统: 是密码学的基础课程之一.

目 录

前言

第一章 命题逻辑	1
1.1 命题和联结词	1
1.1.1 命题	1
1.1.2 命题联结词	2
1.1.3 命题表达式	5
1.1.4 真值表的构造	5
1.1.5 命题符号化	6
1.2 重言式	7
1.2.1 指派	7
1.2.2 重言式	7
1.2.3 逻辑等价	8
1.2.4 永真蕴含	8
1.2.5 代入规则与替换规则	9
1.2.6 对偶原理	11
1.3 公式中的范式	11
1.3.1 析取范式和合取范式	12
1.3.2 主析取范式	13
1.3.3 主合取范式	14
1.4 命题联结词的扩充与归约	15
1.4.1 命题联结词的扩充	15
1.4.2 命题联结词的规约	16
1.5 基于命题的推理	17
1.5.1 基于真值表的推理	17
1.5.2 基于推理规则的推理	17
1.5.3 应用实例	19
1.6 习题	21
第二章 谓词逻辑	24
2.1 谓词公式	24
2.1.1 个体	24
2.1.2 谓词	25
2.1.3 量词	26
2.1.4 命题符号化	26

2.1.5 谓词公式	27
2.2 约束	28
2.2.1 约束部分	28
2.2.2 换名规则和代替规则	29
2.2.3 公式的解释	29
2.3 谓词公式中的永真式	30
2.3.1 谓词公式的等价	30
2.3.2 谓词公式的永真	31
2.3.3 谓词公式的可满足	31
2.3.4 永真公式	31
2.3.5 代入规则、替换规则与对偶原理	32
2.4 谓词公式中的范式	33
2.4.1 前束范式	33
2.4.2 斯柯林范式	35
2.5 谓词推理	35
2.5.1 推理规则	35
2.5.2 举例	37
2.6 习题	38
第三章 集合论	41
3.1 基本概念	41
3.2 集合间的关系	43
3.3 集合的运算	44
3.3.1 集合的基本运算	44
3.3.2 集合的运算律	47
3.3.3 例题	47
3.4 包含排斥原理	48
3.4.1 两个集合的包含排斥原理	48
3.4.2 三个集合的包含排斥原理	49
3.4.3 多个集合的包含排斥原理	50
3.5 幂集合与笛卡儿乘积	52
3.5.1 幂集合	52
3.5.2 笛卡儿乘积	53
3.6 集合运算与基数概念的扩展	55
3.6.1 并集、交集的扩展	55
3.6.2 基数概念的扩展	56
3.7 习题	59
第四章 二元关系	63
4.1 基本概念	63

4.1.1	二元关系的定义	63
4.1.2	关系的运算	64
4.2	关系的基本性质	64
4.2.1	自反性	64
4.2.2	对称性	65
4.2.3	传递性	66
4.2.4	反自反性	66
4.2.5	反对称性	67
4.3	复合关系	68
4.4	关系的表示	70
4.4.1	用矩阵表示关系	71
4.4.2	用图表示关系	71
4.4.3	特定关系的矩阵及其关系图的属性	72
4.4.4	复合关系的关系矩阵	75
4.5	逆关系	76
4.5.1	逆关系的定义	76
4.5.2	逆关系的性质	77
4.6	关系的闭包	79
4.6.1	自反, 对称和传递闭包	79
4.6.2	闭包的性质及求法	79
4.7	集合的划分和覆盖	83
4.7.1	划分	83
4.7.2	交叉划分	83
4.7.3	加细	84
4.8	等价关系与等价类	84
4.8.1	等价关系	84
4.8.2	等价类	86
4.8.3	划分与等价关系	87
4.9	偏序	88
4.9.1	引言	88
4.9.2	字典顺序	91
4.9.3	哈塞图	92
4.9.4	极大元素与极小元素	94
4.9.5	格	96
4.10	函数	97
4.10.1	函数的定义	97
4.10.2	函数的合成	98
4.10.3	特殊函数类	98

4.11 习题	100
第五章 图论	105
5.1 若干图论经典问题	105
5.1.1 哥尼斯堡七桥问题	105
5.1.2 环球旅行问题	105
5.1.3 四色问题	106
5.2 图与图的矩阵表示	106
5.3 路与连通度	110
5.4 欧拉图与哈密尔顿图	115
5.5 二部图与匹配	117
5.6 平面图	121
5.7 树	123
5.7.1 树及其性质	123
5.7.2 最小生成树	125
5.7.3 有向树	128
5.8 最大流问题	135
5.8.1 网络最大流基本概念	135
5.8.2 最大流与最小割	136
5.8.3 最大流算法	136
5.8.4 最大流算法应用	140
5.9 习题	141
第六章 代数系统	148
6.1 二元运算及性质	148
6.1.1 二元运算的定义	148
6.1.2 二元运算的性质	149
6.2 代数系统	153
6.2.1 代数系统的定义与实例	153
6.2.2 代数系统的同构与同态	154
6.3 半群	158
6.3.1 半群	158
6.3.2 单位元和逆元	159
6.4 群	163
6.4.1 群的定义	163
6.4.2 群的同态	166
6.4.3 循环群	169
6.4.4 变换群	172
6.4.5 置换群	175
6.4.6 子群	179

6.4.7 子群的陪集	182
6.4.8 不变子群和商群	185
6.5 环和域简介	187
6.5.1 环	187
6.5.2 域	189
6.6 习题	190
主要参考文献	195

第一章 命题逻辑

数理逻辑又名符号逻辑，是一门用数学方法研究推理过程的学科，分成命题逻辑和谓词逻辑两个部分，命题逻辑是数理逻辑的基本组成部分，也是谓词逻辑的基础。逻辑学主要是研究各种论证，它可以是有意的一般论证，也可以是科学理论中的数学证明或结论。建立逻辑学的主要目的在于探索出一套完整的推理规则，按照这些规则，就可以确定任何特定论证是否有效。在逻辑学中，与其说注重的是论证本身，不如说注重的是论证形式。同其他科学理论一样，也可以把推理理论公式化。这样，依据各项规则并使用机械方法，不难确定论证的有效性。使用这种方法进行推理时，所遵循的规则一定不能具有二义性。为了表述任何成套规则或者理论，都需要为它配置一种语言，而具有二义性的自然语言，不可能正确地和充分地表述上述规则或理论。

为此，首先应该制定一种形式语言，或者称为客观语言。在这种形式语言中，必须明确地和严格地定义好它的语义和语法。为了避免二义性，在形式语言中将使用一些符号，并给这些符号作出明确的定义。同时，符号也具有很容易书写和处理的优点。由于在逻辑学中使用了符号，故数理逻辑也称为符号逻辑。

本章主要是阐述命题逻辑。命题逻辑也称命题演算，是数理逻辑中最基本、最简单的部分。数理逻辑是研究命题间的推理，本章将“命题”作为讨论的最小单位，先依据日常生活经验抽象出命题及它们之间的推理方式，以此作为命题演算形式系统的背景，进而建立命题演算的各种形式系统。

1.1 命题和联结词

什么是命题？直观来说，陈述客观外界发生的事情的陈述句，就叫做命题。若陈述的外界事情发生了，则此命题为真命题，反之为假命题。也就是说，一个命题要么为真，要么为假，两者必居其一，当然也只能居其一。

1.1.1 命题

定义 1.1 可以辨别真假的陈述句叫命题。

命题是陈述性语句，而不能是疑问句、命令句、感叹句等；其语句或真或假，二者必取一（有时需根据涉及该命题的时间、空间来确定）。

T 和 F 分别表示“真的”和“假的”，统称为真值，有时也用 1 和 0 分别表示它们。因为只有两种真值，所以这种逻辑有时称为二值逻辑。命题通常用大写英文字母如 P 、 Q 等表示。

例 1.1 判断下列语句是否为命题。

- (1) 今天是五四青年节。
- (2) π 的小数点后面第十亿位上数字是 5。

- (3) 外星人曾到过地球.
 (4) 她很高.
 (5) 我在说谎.
 (6) 如果我生病, 那么今天我就来上课了.
 (7) 严禁随地吐痰.
 (8) 她身体好吗?
 (9) $x=3$.

解 (1) 是命题, 其真假要根据当前的日期来判断;

(2) 是命题, π 是一个无限不循环的小数, 其小数点后面第十亿位上的数字是确定的;

(3) 是命题, 外星人是否到过地球是一个已经发生的事实, 虽然目前还不能确切地证明;

(4) 不是命题, “她”指代不明确;

(5) 不是命题, 属于逻辑学中的“悖论”, 无法判断其真假;

(6) 是命题, 并且是一个“复合命题”, 其真值要根据其中的两个子命题的真假来判断;

(7) 不是命题, 这是祈使句;

(8) 不是命题, “她”指代不明确, 同时该句不是陈述句;

(9) 不是命题, x 是个变量, 其值不确定.

几个相关概念:

原子命题 不能分解成更简单语句的命题.

复合命题 多个原子命题由联结词联结起来构成的命题. 复合命题的真假值只与原子命题的真假值相关.

命题常量 已知真假值的命题. 可以用字母表示, 也可以直接用 T 、 F 表示.

命题变元 真假值未知的表示命题的变元.

1.1.2 命题联结词

在命题逻辑中, 有以下五种基本命题联结词:

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow.$$

定义 1.2 非、否定 ($\neg$)

给定命题 P , 若命题 R 当且仅当 P 为假时为真, 则称 R 为 P 的否定或非 P , 记为: $\neg P$. 其定义可用如下真值表表示:

P	$\neg P$
0	1
1	0

例 1.2 今天不下雨.

解 设 P : 今天下雨, 则原命题为 $\neg P$.

注 对全体对象的否定, 只需要否定其中一个, 而不是否定每一个.

例 1.3 设命题 P 表示：在座的都是男生，则命题 $\neg P$ 表示：在座的不都是男生，而不是：在座的都不是男生。

定义 1.3 合取 ($\wedge$)

给定两个命题 P 、 Q ，若命题 R 当且仅当 P 、 Q 同时为真时为真，则称 R 为 P 、 Q 的合取，记为： $P \wedge Q$ 。其定义可用如下真值表表示：

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.4 张三和李四都是三好学生。

解 设 P ：张三是三好学生； Q ：李四是三好学生。则原命题为： $P \wedge Q$ 。

注 并非所有的“和”都表示“合取”，当谓词描述的是对象之间的关系时不表示合取。例如，王五和赵六是兄弟。

定义 1.4 析取 ($\vee$)

给定两个命题 P 、 Q ，若命题 R 当且仅当 P 、 Q 中至少有一个为真时为真，则称 R 为 P 、 Q 的析取，记为： $P \vee Q$ 。其定义可用如下真值表表示：

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例 1.5 灯泡坏了或是开关坏了。

解 设 P ：灯泡坏了； Q ：开关坏了。则原命题为： $P \vee Q$ 。

注 并非所有的“或”都表示“析取”，例如，我向西走或向东走。我不可能同时又向东走又向西走。

这种“或”称为“排斥或”、“异或”，其特点是：当两个命题的真值不同时原命题的真值为“1”。可构造真值表如下：

P	Q	$P \oplus Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

定义 1.5 蕴含 ($\rightarrow$)

给定两个命题 P 、 Q ，命题“若 P ，则 Q ”称为“ P 蕴含 Q ”，记为： $P \rightarrow Q$ ，当且仅当 P 为真 Q 为假时 $P \rightarrow Q$ 为假，其中： P 称为蕴含前件、条件或前提， Q 称为后件、结果或结论。其定义可用如下真值表表示：

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

例 1.6 (1) 如果推理中使用了归纳法，则这是归纳推理。

(2) 如果地球是方的，则海水是咸的。

(3) 如果地球是方的，则海水是甜的。

解 (1) 设 P ：推理中使用了归纳法； Q ：这是归纳推理，则原命题为： $P \rightarrow Q$ 。

(2) 设 P ：地球是方的； Q ：海水是咸的，则原命题为： $P \rightarrow Q$ ，是个真命题。

(3) 设 P ：地球是方的； Q ：海水是甜的，则原命题为： $P \rightarrow Q$ ，也是个真命题。

注 由此可以看出，蕴含命题中的前件和后件之间可能不存在因果关系，在日常生活中用蕴含关系时前提和结论之间都有因果关系，称为“形式蕴含”，但是在数理逻辑中，蕴含前件和后件可以没有任何因果关系，称为“实质蕴含”，只要蕴含前件为假，不论后件是否为真，整个命题均为真。

定义 1.6 等值、等价、双条件 ($\leftrightarrow$)

给定两个命题 P 、 Q ，命题“ P 当且仅当 Q ”称为“ P 等价 Q ”，记为： $P \leftrightarrow Q$ ，当且仅当 P 、 Q 同时为真时 $P \leftrightarrow Q$ 为真，其中： P 称为蕴含前件、条件、前提， Q 称为后件、结果、结论。其定义可用如下真值表表示：

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.7 $2+2=4$ 当且仅当雪是白的。

解 设 P ： $2+2=4$ ； Q ：雪是白的，则原命题为 $P \leftrightarrow Q$ ，该命题为真命题，因为 P 和 Q 都为真命题。

例 1.8 地球是方的当且仅当海水是甜的。

解 设 P ：地球是方的； Q ：海水是甜的，则原命题为 $P \leftrightarrow Q$ ，该命题也为真命题，因为 P 和 Q 同时为假。

注 等价命题中的前件和后件之间同样可以没有因果关系。

命题联结词的结合力

联结词在运算中的优先级由高到低为： $\neg$ 、 $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 、 $\leftrightarrow$ 。

在同一个命题中有连续的多个同种联结词结合力顺序为从左到右次序，构造命题时可以使用“圆括号”改变联结词的运算顺序，

例 1.9 $\neg P \rightarrow Q \wedge \neg R$, 表示: $(\neg P) \rightarrow (Q \wedge (\neg R))$ $\neg P \rightarrow Q \rightarrow R$, 表示: $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow R$, 而不是 $\neg P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 。

1.1.3 命题表达式

命题表达式 由命题变元和联结词 (包括圆括号) 组成的表达式称为命题表达式, 又称为字符串。在命题逻辑的研究中, 人们感兴趣的不是全部的这种字符串, 而是某一类按照一定规则构造出来的字符串, 这一类字符串称为命题公式, 又常称为合式公式。

定义 1.7 原子公式 单个命题变元和命题常元叫做原子公式。

定义 1.8 合式公式 当且仅当按下列规则生成的公式:

- (1) 单个原子命题是一个合式公式;
- (2) 如果 A 是一个合式公式, 则 $\neg A$ 也是一个合式公式;
- (3) 如果 A 和 B 是合式公式, 则 $(A \vee B)$ 、 $(A \wedge B)$ 、 $(A \rightarrow B)$ 和 $(A \leftrightarrow B)$ 都是合式公式;
- (4) 经过有限次使用规则 (1)、(2) 和 (3), 从而得到的由命题变元、联结词和圆括号所组成的字符串, 是合式公式。

若公式 A 由 n 个不同的命题变元构成, 则可记为 $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 。

1.1.4 真值表的构造

真值表是表示一个公式取真还是取假的一个全面的表示形式, 它把这个公式中所有命题变元不同组合全部列出来, 并给出了每种不同组合公式的真假。若公式 A 由 n 个不同的命题变元构成, 则 A 的真值表由 $n+1$ 列, $n+1$ 行。

求公式的真值表时, 首先将公式中所有变元 (按字母顺序) 写出来, 并列出这些变元所有的取值情况 (按照二进制数从大到小的顺序), 然后按照运算优先级逐步写出每个子公式的真值, 保证每次只做一次简单运算, 最终求出整个公式的真值表。

例 1.10 求公式 $\neg(P \vee \neg R) \wedge (\neg P \rightarrow Q)$ 的真值表。

P	Q	R	$\neg R$	$P \vee \neg R$	$\neg(P \vee \neg R)$	$\neg P$	$\neg P \rightarrow Q$	$\neg(P \vee \neg R) \wedge (\neg P \rightarrow Q)$
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1	0

注 真值表相同的两个公式称为等价公式。

1.1.5 命题符号化

命题符号化也即将用自然语言表示的命题改写成数学符号的形式,这是做命题推理的第一步,也是用数学方法研究推理过程的第一步,其基本步骤如下:

- (1) 找出命题中的原子命题;
- (2) 选取适当的联结词进行组合;
- (3) 注意命题的实际含义,不可拘泥于原句.

例 1.11 用命题逻辑对下列命题进行符号化.

- (1) 如果电灯不亮了,那么肯定是灯泡坏了或是开关坏了.
- (2) 你带我去游泳或者去水上乐园,否则我不出门.
- (3) 当北家发牌,打牌结束后,第二副就应该由东家发牌了.
- (4) 除非她通知我,否则我不参加会议.
- (5) 假如上午不下雨,我去看电影;否则我在家看书或者看电视.
- (6) 我今天进城,除非下雨.
- (7) 仅当你走,我将留下.
- (8) 凡进入机房的,必须换拖鞋,穿工作服,否则罚款 5 元.

解

(1) 设 P : 点灯亮了; Q : 开关坏了; R : 灯泡坏了; 则原命题为: $\neg P \rightarrow Q \vee R$.

(2) 设 P : 你带我去游泳; Q : 你带我去水上乐园; R : 我出门; 则原命题为: $\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg R$.

(3) 设 P : 北家发牌; Q : 打牌结束; R : 第二副由东家发牌; 则原命题为: $P \wedge Q \rightarrow R$.

(4) 设 P : 她通知我; Q : 我参加会议; 这是一个双重否定句,既表示了“她通知我,我就参加会议”,也表示了“她不通知我,我就不参加会议”则原命题为: $P \rightarrow Q \wedge Q \rightarrow P$ 等价于 $P \leftrightarrow Q$.

(5) 设 P : 上午下雨; Q : 我去看电影; R : 我在家看书; S : 我在家看电视; 则原命题为: $\neg(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (R \vee S)$.

(6) 设 P : 我进城; Q : 天下雨; 则原命题为: $\neg Q \rightarrow P$.

(7) 设 P : 你走; Q : 我留下; 则原命题为: $Q \rightarrow P$. 该句中的“仅当”可以与 $\leftrightarrow$ 中的“当且仅当”对应起来考虑.

(8) 设 P : 进入机房的人; Q : 这个人换拖鞋; R : 这个人穿工作服; S : 这个人被罚款 5 元; 则原命题为: $\neg(P \rightarrow Q \wedge R) \rightarrow S$.

例 1.12 设 P : 李明是男生, Q : 李明是足球队员, R : 李明是班干部,试述下列命题的中文含义是什么?

- (1) $P \wedge Q$.
- (2) $Q \vee R$.
- (3) $\neg P \wedge Q \rightarrow R$.
- (4) $P \wedge Q \rightarrow \neg R$.

解

(1) 表示: 李明是男生并且李明是足球队员,即: 李明是男足球队员.

(2) 表示: 李明是足球队员或班干部.

(3) 表示: 如果李明不是男生而是足球队员, 那么他是班干部.

(4) 表示: 如果李明是男足球队员, 那么他不是班干部.

1.2 重言式

以有限步骤来决定命题公式的永真性、永假性或可满足性的问题, 在逻辑上称为判定问题. 判定问题的解决基于命题演算, 一般有两个途径:

(1) 基于命题演算进行推导, 看该命题是否和一个已知的永真、永假或可满足命题具有等价关系;

(2) 把命题化为某种标准形式 —— 范式, 范式具有很明显的永真性、永假性或可满足性.

1.2.1 指派

由 n 个不同的命题变元构成的公式 $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$, 命题变元的真值有 2^n 种不同的组合, 其中, 每一组取定的组合称为公式的一组指派. 使得公式的真值为真的指派称为成真指派; 使得公式的真值为假的指派称为成假指派; 公式的每个变元都有确定的真值的指派称为完全指派; 否则为不完全指派.

例 1.13 给定公式 $A = P \rightarrow Q \wedge R$

其指派:

(F, F, F) 为完全指派、成真指派;

(T, F, T) 为完全指派、成假指派;

(T, X, T) 为不完全指派、成假指派;

(F, X, T) 为不完全指派、成真指派.

1.2.2 重言式

定义 1.9 永真式 (重言式) 无论命题变元的取值如何, 公式的值均为真, 即所有指派均为成真指派.

定义 1.10 永假式 (矛盾式, 不可满足) 无论命题变元的取值如何, 公式的值均为假, 即所有指派均为成假指派.

定义 1.11 可满足式 公式至少存在一个成真指派.

定义 1.12 非永真式 公式至少存在一个成假指派.

可满足式包含永真式; 非永真式包含永假式. 判定命题公式类型的方法: 其一是真值表法, 对任意给定公式, 列出该公式的真值表, 若真值表的最后一列全为 1, 则该公式为永真式; 若真值表的最后一列全为 0, 则该公式是永假式; 若真值表的最后一列既非全 1, 又非全 0, 则该公式是可满足式. 其二是推导演算法, 利用基本等值式 (下节介绍) 对给定公式进行等值推导, 若该公式的真值为 1, 则该公式是永真式; 若该公式的真值为 0, 则该公式为永假式. 既非永真, 也非永假, 成为非永真的可满足式.