Matrix Analysis

矩阵分析

韩志涛 编著

东北大学出版社
Northeastern University Press

矩 阵 分 析

Matrix Analysis

韩志涛 编著

东北大学出版社
·沈 阳·

图书在版编目（CIP）数据

矩阵分析／韩志涛编著. — 沈阳：东北大学出版社，2016. 8
ISBN　978-7-5517-1392-4

Ⅰ. ①矩…　Ⅱ. ①韩…　Ⅲ. ①矩阵分析　Ⅳ. ①O151. 21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 214489 号

出 版 者：东北大学出版社
　　地址：沈阳市和平区文化路三号巷 11 号
　　邮编：110819
　　电话：024－83687331（市场部）　83680267（社务部）
　　传真：024－83680180（市场部）　83687332（社务部）
　　E-mail：neuph@neupress. com
　　http：//www. neupress. com
印 刷 者：沈阳市第二市政建设工程公司印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：185mm×260mm
印　　张：8. 25
字　　数：220 千字
出版时间：2016 年 8 月第 1 版
印刷时间：2016 年 8 月第 1 次印刷
责任编辑：刘宗玉　　责任校对：文　浩
封面设计：刘江旸　　责任出版：唐敏志

ISBN　978-7-5517-1392-4　　定　　价：22. 00 元

前　言

矩阵理论自 19 世纪创立以来，经过许多数学家的努力，已经发展成为一门内容丰富、逻辑清晰、应用广泛的数学分支．可以说矩阵的理论已经渗透到了各个学科领域，它不仅是学习数值分析、最优化理论以及概率统计等数学学科的基础，而且在许多其他领域如控制理论、优化理论、力学、经济管理、金融等都有广泛的应用．线性代数已经成为大学生的一门必修课，现在几乎所有的科研领域都有代数的影子．但是大学里讲授的主要是线性部分，对于矩阵的分析性质很少涉及，而矩阵分析理论的应用更是广泛，如信号处理、电子、通信、模式识别、神经计算、雷达、图像处理、系统辨识等诸多领域都需要矩阵的分析性质．

本书从线性代数的基础理论出发，比较全面地介绍了矩阵分析的基本理论、方法和某些应用，主要包括线性空间、内积空间、线性变换等的基本概念和性质，范数理论和应用，矩阵的分解理论，矩阵的约当标准形，矩阵函数的理论和应用，特征值的估计，矩阵的直积，等等．

本书是作者在多年为研究生讲授该门课程的基础上，参考国内外相关教材并结合学生们的后续科研工作中需要的知识编写而成的．该课程学时短，信息量大，学生们在科研工作中又需要大量的矩阵的知识，如何在短时间内尽可能讲授丰富的内容，还能够让学生们充分掌握所学习的知识，这是作者花费大量的时间和精力一直在思考的问题．为了尽可能增加课程的深度和广度，又能够让学生们感觉到通俗易懂，在写作过程中力求循序渐进，希望在学习过程中让学生们先入门再提高．这种方法经过多年的教学检验被证明是比较好的方法．

本书可供非数学类研究生在学习矩阵理论时使用，尤其是需要短时间内快速掌握矩阵分析的基本理论时使用，也可作为高等学校理工科高年级本科生以及从事教学科研等人员学习矩阵分析的参考用书．

限于作者的水平，书中难免有疏漏之处，敬请读者批评指正．

韩志涛

2016 年 5 月

目 录

第一章 线性空间和线性变换 …… 1

1.1 线性空间的概念 …… 1

1.1.1 线性空间 …… 1

1.1.2 线性空间的例子、基底、坐标 …… 1

1.2 基变换与坐标变换 …… 3

1.3 子空间和维数定理 …… 5

1.3.1 子空间及生成方式 …… 5

1.3.2 维数定理 …… 8

1.4 线性空间中的线性变换 …… 10

1.5 线性变换的矩阵 …… 14

第二章 内积空间 …… 18

2.1 内积空间的基本概念 …… 18

2.2 正交基与子空间的正交 …… 20

2.3 点到子空间的距离与最小二乘法 …… 23

2.4 正规矩阵 …… 25

第三章 矩阵的标准形 …… 27

3.1 哈密顿-凯莱定理以及矩阵的最小多项式 …… 27

3.1.1 哈密顿-凯莱定理 …… 27

3.1.2 最小多项式 …… 28

3.2 矩阵的相似对角形 …… 31

3.3 约当标准形 …… 33

3.4 史密斯标准形 …… 37

第四章　向量和矩阵的范数 ………………………………………… 41
4.1　向量的范数 ………………………………………… 41
4.1.1　范数的定义 ………………………………………… 41
4.1.2　几种常见的范数 ………………………………………… 41
4.1.3　生成范数 ………………………………………… 43
4.1.4　范数的等价 ………………………………………… 44
4.2　矩阵的范数 ………………………………………… 46
4.2.1　方阵的范数 ………………………………………… 46
4.2.2　常用的范数 ………………………………………… 47
4.2.3　与向量范数的相容性 ………………………………………… 48
4.2.4　用矩阵范数来定义向量范数 ………………………………………… 48
4.2.5　从属范数 ………………………………………… 49
4.2.6　从属范数的计算 ………………………………………… 51
4.3　范数的应用举例 ………………………………………… 55
第五章　矩阵的分解 ………………………………………… 58
5.1　矩阵的对角分解 ………………………………………… 58
5.2　矩阵的三角分解 ………………………………………… 61
5.3　矩阵的满秩分解 ………………………………………… 65
5.4　舒尔定理与矩阵的 ***QR*** 分解 ………………………………………… 68
5.5　矩阵的奇异值分解 ………………………………………… 72
第六章　矩阵的函数 ………………………………………… 76
6.1　矩阵的微分和积分 ………………………………………… 76
6.1.1　对一个变量的导数 ………………………………………… 76
6.1.2　对向量及矩阵的导数 ………………………………………… 77
6.1.3　矩阵函数对矩阵变量的导数 ………………………………………… 78
6.2　矩阵序列及矩阵级数 ………………………………………… 80
6.2.1　矩阵的极限及序列 ………………………………………… 80
6.2.2　矩阵的级数 ………………………………………… 82
6.2.3　矩阵的幂级数 ………………………………………… 84
6.3　矩阵函数 ………………………………………… 86
6.4　矩阵函数的性质 ………………………………………… 90
6.5　矩阵函数在微分方程组中的应用 ………………………………………… 91
6.6　线性系统的能控性与能观性 ………………………………………… 94

第七章　矩阵特征值的估计 …… 98
7.1　特征值界的估计 …… 98
7.2　特征值的包含区域 …… 100
7.2.1　Gerschgorin 盖尔圆定理 …… 100
7.2.2　特征值的隔离 …… 102
第八章　矩阵的直积 …… 105
8.1　直积的定义和性质 …… 105
8.2　直积的应用 …… 109
8.2.1　拉　直 …… 109
8.2.2　线性矩阵方程组 …… 110
习题解答 …… 114

第一章　线性空间和线性变换

1.1　线性空间的概念

1.1.1　线性空间

我们曾经在线性代数里学习过向量空间，它是由向量做成的集合. 在这个集合里向量可以相加，向量可以乘以一个倍数，由此我们可以讨论向量的线性组合、向量的线性相关等概念.

把这个集合的范围扩展一下，这个集合可以是矩阵的集合、多项式的集合，或者干脆是某个抽象元素的集合. 在这个集合里以某种方式引入加法和数乘运算，它就有与向量空间类似的性质.

定义 1.1　数域:一个对和、差、积、商运算都封闭的复数的非空集合 P 称为数域.

定义 1.2　设 V 是一个非空的集合，如果在 V 中定义二元运算(加法)，即 V 中的任意两个元素 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 经过这个运算结果仍是 V 中的一个元素，这个元素称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记作 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$. 在数域 P 与 V 之间定义一个运算叫作数量乘法，即对于 P 中的任意数 k 与 V 中的任意一个元素 $\boldsymbol{\alpha}$，经过这一运算的结果仍然是 V 中的一个元素，称为 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数量乘积，记作 $k\boldsymbol{\alpha}$.

如果上述运算满足以下规则，则称 V 为数域 P 上的线性空间. V 中的元素也称为向量.

1)对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

2)对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V$, $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

3)在 V 中存在一个零元素，记作 $\mathbf{0}$，对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，有 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

4)对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，都有 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素，记作 $-\boldsymbol{\alpha}$;

5)对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，有 $1 \cdot \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

6)对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, $k, l \in P$, $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;

7)对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, $k, l \in P$, $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;

8)对任意的 $k \in P$, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

1.1.2　线性空间的例子、基底、坐标

例 1　P^n 是 n 元有序数组的集合，记作 P^n，若对于 P^n 中的任意两个元素

$$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n), \boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

及每个 $k \in P^n$，定义加法和数乘为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n),$$
$$k\boldsymbol{x}=(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n),$$

则容易验证 V 是 P^n 上的一个线性空间.

例 2 数域 P 上的 $m\times n$ 矩阵的集合 $P^{m\times n}$，按通常的加法和数乘的定义，则 $P^{m\times n}$ 构成一个线性空间.

例 3 n 为正整数，P 为数域，关于 t 的所有次数小于 n 的多项式的集合，用 $P_n[t]$ 表示，$P_n[t]$ 是线性空间.

如
$$\alpha=2+3t+t^2,\ \beta=1-2t+3t^2,$$
则
$$\alpha+\beta=3+t+4t^2.$$

例 4 所有多项式的集合 $P[t]$ 构成线性空间

定义 1.3 （线性相关）在 V 中有一组元素 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，如果存在它们的一个线性组合
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0},$$
其中系数不全是零，则这组元素线性相关；如果不存在这样的组合，则这组元素线性无关.

定义 1.4 （基底）V 中的一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，且其他元素都可以被它们线性表达，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V 的一组基，n 为空间 V 的维数，记作 $\dim V=n$，而表达式的系数是这个元素的坐标.

例 5 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 空间的一组基为 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$，这里
$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$
维数为 4.

例 6 在 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 空间中，基底如例 5 中的基底，则矩阵
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}+3\boldsymbol{E}_{21}-2\boldsymbol{E}_{22}$$
的坐标为 $(2,1,3,-2)$.

在取定一组基后，线性空间中的元素与坐标（也就是一个向量）一一对应.

例 7 $P_n[t]$ 的一组基为 $1,t,t^2,\cdots,t^{n-1}$，维数为 n.

习题 1.1

1. 在 n 维线性空间 P^n 中，下列 n 维向量的集合 V 是否构成 P 上的线性空间？

   1) $V=\{(a,b,a,b,\cdots,a,b)\mid a,b\in P\}$；

   2) $V=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid \sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1\}$；

   3) $V=\{\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{A}\in P^{n\times n}\}$.

2. 按照通常的矩阵加法及矩阵与数的乘法，下列数域 P 上的方阵集合是否构成 P 上的线性空间？

   1) 全体形如 $\begin{pmatrix}0&a\\-a&b\end{pmatrix}$ 的二阶方阵的集合；

   2) 全体 n 阶对称（或者反对称，上三角）矩阵的集合；

   3) $V=\{\boldsymbol{X}\mid \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{X}\in P^{n\times n}\}$（$\boldsymbol{A}$ 为给定的 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$）.

1.2　基变换与坐标变换

一般来说，一个元素在不同的基底下有不同的坐标，它们的坐标有什么关系呢？两个不同的基底之间有什么关联呢？这一节来讨论这个问题.

设 V 是 P 上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 是 V 的两个不同的基底，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是基底，所以 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 可以被这个基底线性表达，这两个基的关系是：

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\beta}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \\
\boldsymbol{\beta}_2 = a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n, \\
\cdots\cdots \\
\boldsymbol{\beta}_n = a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n,
\end{gathered}$$

或者

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}.$$

这里 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 称为从基底 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到基底 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

设 V 中的元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 在上述两个基底的表达式是

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha} = l_1\boldsymbol{\beta}_1 + l_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + l_n\boldsymbol{\beta}_n = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}.$$

利用过渡矩阵就可以得到这个元素的两个坐标之间的关系：

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}.$$

例 8　如 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1)$ 在基底

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$$

下的坐标为 $(1, 1)$，即

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2;$$

而 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基底

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0), \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (1, 1)$$

下的坐标是(0, 1)，即

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\varepsilon}_2.$$

例 9 把平面 $\mathbf{R}^2$ 上的基底

$$\boldsymbol{e}_1=(1, 0), \boldsymbol{e}_2=(0, 1)$$

逆时针旋转 45°，如图 1.1，得 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$.

一个向量

$$\boldsymbol{OP}=(1, 2)=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$$

在新的基底下的坐标是什么?

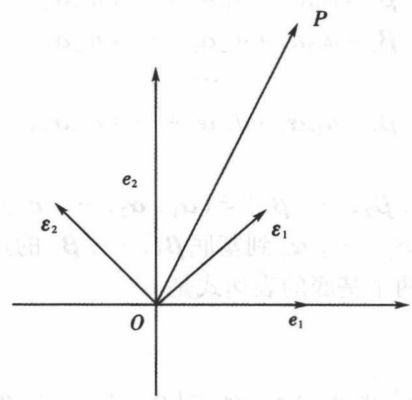

图 1.1

解 从图 1.1 中可以看出

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

故

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{OP}=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{OP}$在新的基底下的坐标是$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$.

习题 1.2

1. 在三维线性空间 P^3 中，分别求下面的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标：

1)$\boldsymbol{\alpha}=(1, 2, 1)$;$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1, 1, 1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2=(1, 1, -1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1, -1, -1)$.

2)$\boldsymbol{\alpha}=(3, 7, 1)$;$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1, 3, 5)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2=(6, 3, 2)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3=(3, 1, 0)$.

2. 在 $\mathbf{R}^4$ 中有两个基:

(1)$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(0, 0, 0, 1)$;

(2)$\boldsymbol{\beta}_1=(2, 1, -1, 1)$, $\boldsymbol{\beta}_2=(0, 3, 1, 0)$, $\boldsymbol{\beta}_3=(5, 3, 2, 1)$, $\boldsymbol{\beta}_4=(6, 6, 1, 3)$.

试求:1)从第一个基到第二个基的过渡矩阵;

2)向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 对第二个基的坐标 (x_1', x_2', x_3', x_4');

3)对两个基有相同坐标的向量.

3. 求 $P_3[t]$ 中多项式 $1+t+t^2$ 在基 $1, t-1, (t-2)(t-1)$ 下的坐标.

4. 设四维线性空间 V 的两个基底(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 和(Ⅱ):$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 满足

$$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_4,\ \boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_4.$$

1)求由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$;

2)求元素 $\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_4$ 在基(Ⅰ)下的坐标.

1.3　子空间和维数定理

1.3.1　子空间及生成方式

我们知道三维线性空间 $\mathbf{R}^3$ 的二维平面 $\mathbf{R}^2$ 也是一个线性空间, 这种类型的空间叫作子空间.

定义 1.5　设 V 是 数域 P 上的线性空间, W 是 V 的非空子集, 如果 W 对于线性空间 V 所定义的加法运算及数乘运算也构成 P 上的线性空间, 则称 W 为 V 的线性子空间, 简称子空间.

因为子集中的运算与原来空间中的运算一样, 所以只需要判别运算是否封闭.

定理 1.1　设 W 是 P 上的线性空间 V 的非空子集, 则 W 是 V 的线性子空间的充要条件是

1)若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\in W$, 则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in W$;

2)若 $\boldsymbol{\alpha}\in W$, $k\in P$, 则 $k\boldsymbol{\alpha}\in W$.

$\{0\}$ 及 V 本身也是 V 的子空间, 这两个子空间是 V 的平凡子空间.

例如, n 维线性空间 P^n 中, 子集 $W=\{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0},\ X\in P^n\}$ 构成一个 $n-r(\boldsymbol{A})$ 维的子空间.

下面介绍几种子空间的生成方式.

1.3.1.1　生成子空间

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是 V 上的 m 个元素, 由这 m 个元素的任意组合构成的集合 $\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 对 V 中的加法及数乘封闭, 因而这个子集是 V 中的子空间. 记作

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m).$$

证明　任取

$$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\in L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m),$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$
$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(k_1+l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(k_m+l_m)\boldsymbol{\alpha}_m\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m),$$
$$k\boldsymbol{\alpha}\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m).$$

所以，$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m)$是子空间.

例如在$\mathbf{R}^{2\times 2}$空间中，矩阵$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$生成一个子空间，维数是2，这是四维空间的二维子空间.

1.3.1.2　用原有的子空间生成新的子空间的方法

1）设V_1，V_2是V的子空间，则$V_1\cap V_2$是V的子空间，叫作两个子空间的交子空间.

例如，三维空间的两个子空间：

$$V_1=L(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2),\ V_2=L(\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3),$$

则

$$V_1\cap V_2=L(\boldsymbol{e}_2).$$

证明　任取

$$\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}\in V_1\cap V_2,$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}\in V_1,\ \boldsymbol{\beta}\in V_1\quad \boldsymbol{\alpha}\in V_2,\ \boldsymbol{\beta}\in V_2,\ \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1,\ \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_2,$$
$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1\cap V_2.$$

同样地，

$$k\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap V_2.$$

所以$V_1\cap V_2$是子空间.

例 10　设$V_1=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\mid x_1+x_2+x_3=0\}$，$V_2=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\mid 2x_1-x_2-2x_3=0\}$是$V$的两个子空间，求$V_1\cap V_2$.

解　由

$$x_1+x_2+x_3=0,$$
$$2x_1-x_2-2x_3=0$$

解得

$$3x_1=x_3,\ x_2=-4x_1,$$

交空间

$$V_1\cap V_2=\{x_1(1,\ -4,\ 3)\}.$$

这是一维的子空间.

2）设V_1，V_2是V的子空间，V_1+V_2也是V的子空间，这里

$$V_1+V_2=\{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\mid \boldsymbol{\alpha}_1\in V_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2\in V_2\}.$$

这个子空间叫作V_1和V_2的和子空间.

例如三维空间

$$V_1=L(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2),\ V_2=L(\boldsymbol{e}_3),$$
$$V_1+V_2=\mathbf{R}^3.$$

证明　设

$$\boldsymbol{\alpha}\in V_1+V_2,\ \boldsymbol{\beta}\in V_1+V_2,$$

则存在

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,$$

使得

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,$$

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1)+(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2)\in V_1+V_2.$$

类似地
$$k\boldsymbol{\alpha}\in V_1+V_2,$$
所以 V_1+V_2 是子空间.

怎样求两个空间的和子空间呢？下面介绍一种求和子空间的方法. 把两个子空间都写成生成子空间的形式

$$V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s),V_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t),$$

则

$$V_1+V_2=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t),$$

即

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)+L(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t).$$

证明　这两个子空间的运算法则是一致的，要证明两边相等，只要证明它们作为集合相等即可.

任取

$$\boldsymbol{\alpha}\in\text{左边},$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1'+\boldsymbol{\alpha}_2',\ \boldsymbol{\alpha}_1'\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s),\ \boldsymbol{\alpha}_2'\in L(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t),$$

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_t\boldsymbol{\beta}_t\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t).$$

反之，任取

$$\boldsymbol{\alpha}\in\text{右边},$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_t\boldsymbol{\beta}_t\in\text{左边}.$$

例 11　求两个子空间 V_1，V_2 的和子空间，其中 V_1，V_2 的表达式与例 10 的相同.

解　V_1 的坐标满足方程

$$x_1+x_2+x_3=0,$$

它的基础解系是

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

即

$$V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2).$$

同理，V_2 的基础解系是

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix},$$

即

$$V_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2),$$

则

$$V_1+V_2=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2),$$

而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 的秩为 3，所以

$$V_1 + V_2 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1).$$

两个子空间 V_1，V_2 的生成子空间 $V_1 \cap V_2$，$V_1 + V_2$ 与 V_1，V_2 的维数之间有一个关系，这个关系是普遍成立的：

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$

1.3.2 维数定理

由两个子空间 V_1，V_2 生成的子空间的维数 $\dim(V_1 + V_2)$，$\dim(V_1 \cap V_2)$ 与原来的子空间的维数之间有一个关系，称之为维数定理，即

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$

证明 设

$$\dim V_1 = r,\ \dim V_2 = s,$$
$$\dim(V_1 + V_2) = k,\ \dim(V_1 \cap V_2) = t.$$

在 $V_1 \cap V_2$ 中选取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$，扩充它使得 r 个线性无关的向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\alpha}_{t+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$$

是 V_1 的基底.

同样，s 个线性无关的向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\beta}_{t+1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$$

是 V_2 的基底，如果能够证明

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\alpha}_{t+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_{t+1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s \tag{1-1}$$

为 $V_1 + V_2$ 的基底，则有

$$\dim(V_1 + V_2) = r + s - t.$$

要证明上面的等式，只需要证明：第一，向量组(1-1)线性无关；

第二，$V_1 + V_2$ 的任何元素可以被式(1-1)线性表达.

第二个比较明显，现在证明第一个，设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_t\boldsymbol{\alpha}_t + k_{t+1}\boldsymbol{\alpha}_{t+1} + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r + l_{t+1}\boldsymbol{\beta}_{t+1} + \cdots + l_s\boldsymbol{\beta}_s = \mathbf{0}, \tag{1-2}$$

则

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_t\boldsymbol{\alpha}_t + k_{t+1}\boldsymbol{\alpha}_{t+1} + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = -l_{t+1}\boldsymbol{\beta}_{t+1} - \cdots - l_s\boldsymbol{\beta}_s.$$

左边属于 V_1，右边属于 V_2，所以它们都属于 $V_1 \cap V_2$，可以被 $V_1 \cap V_2$ 的基底线性表达，即存在一组数 $l_1, \cdots, l_t$，使得

$$-l_{t+1}\boldsymbol{\beta}_{t+1} - \cdots - l_s\boldsymbol{\beta}_s = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + l_t\boldsymbol{\alpha}_t,$$

即

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + l_t\boldsymbol{\alpha}_t + \cdots + l_s\boldsymbol{\beta}_s = \mathbf{0},$$

而

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\beta}_{t+1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$$

是 V_2 的基底，它的一个组合是零向量，系数都是零.

把这个结果代入式(1-2)，得系数全是零，于是式(1-1)线性无关.

例如三维空间 $\mathbf{R}^3$ 的维数为 3，

$$\dim L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 2,\ \dim L(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 2,$$
$$\dim L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 3 = \dim(L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + L(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)),\ \dim L(\boldsymbol{e}_2) = 1.$$

再来看 $V_1+V_2=W$.

W 是 V_1, V_2 的和，反过来，也可以看成 W 可以分解成 V_1+V_2，即 W 中的每个元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可以分解成 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，如果每个元素的分解式是唯一的，则称 V_1+V_2 是直和. 记作 $V_1\oplus V_2$ 或者 $V_1\dotplus V_2$.

例如三维空间之中，

$$L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)+L(\boldsymbol{e}_3)$$

是直和.

如图 1.2，向量 $\boldsymbol{OP}$ 分别向两个平面 $L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$，$L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3)$ 投影，则 $\boldsymbol{OP}$ 的分解式不唯一.

$$\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{OP}_1+\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P},$$
$$\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{OP}_2+\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}.$$

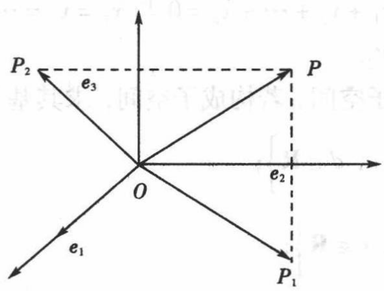

图 1.2

下面给出一种常用的判别直和的方法.

定理 1.2 V_1+V_2 是直和的充要条件是 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$.

证明 充分性，即若 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$，则 V_1+V_2 是直和.

任取
$$\boldsymbol{\alpha}\in V_1+V_2,$$
则
$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1\in V_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2\in V_2,$$
如果还有
$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1'+\boldsymbol{\alpha}_2',$$
$$\boldsymbol{\alpha}_1'\in V_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2'\in V_2,$$
则
$$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_1'=\boldsymbol{\alpha}_2'-\boldsymbol{\alpha}_2\in V_1\cap V_2,$$
$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1'=\boldsymbol{\alpha}_2'-\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0},$$
即分解式唯一.

必要性，即若分解式唯一，则 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$.

反证法，若 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap V_2$，$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，即存在
$$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0},$$
则
$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0},$$
即分解式不唯一，矛盾.

习题 1.3

1. 在 $\mathbf{R}^n$ 中，分量满足下列条件的向量全体能否构成在 $\mathbf{R}^n$ 的子空间？

1) $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$;

2) $x_1+x_2+\cdots+x_n=2$.

2. 试证：在 $\mathbf{R}^4$ 中，由 $(1,1,0,0)$，$(1,0,1,1)$ 生成的子空间与由 $(2,-1,3,3)$，$(0,1,-1,-1)$ 生成的子空间相同.

3. 设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1,-1),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,3,0),$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,0,1),\ \boldsymbol{\beta}_2=(4,1,3,1).$$

若

$$V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\ V_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2),$$

求 V_1+V_2 的维数及一个基.

4. 设 V_1，V_2 分别是齐次线性方程组

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \text{ 与 } x_1=x_2=\cdots=x_n$$

的解空间，试证 $P^n=V_1\oplus V_2$.

5. $\mathbf{R}^{2\times 3}$的下列子集是否构成子空间，若构成子空间，求其基与维数：

1) $W_1=\left\{\begin{pmatrix}-1 & b & 0\\ 0 & c & d\end{pmatrix}\middle| b,c,d\in\mathbf{R}\right\}$;

2) $W_2=\left\{\begin{pmatrix}a & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbf{R}\right\}$;

3) $W_3=\left\{\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & 0 & 0\end{pmatrix}\middle| a+d=0,\ a,b,c,d\in\mathbf{R}\right\}$.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维空间 V 的一个基，试求由

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{\beta}_3=4\boldsymbol{\alpha}_1+13\boldsymbol{\alpha}_2$$

生成的子空间的基与维数.

7. 证明线性空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$可以分解为二阶实对称矩阵构成的子空间与二阶实反对称矩阵构成的子空间的直和.

1.4 线性空间中的线性变换

设 V 是 P 的线性空间，从 V 到 V 的映射称为 V 中的变换，线性变换是常见的变换.

定义 1.6 设 T 是 V 上的变换，如果对于任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ 及 $k\in P$ 都有

$$T(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=T\boldsymbol{\alpha}+T\boldsymbol{\beta},\ T(k\boldsymbol{\alpha})=kT\boldsymbol{\alpha},$$

则称 T 为 V 上的线性变换.

线性变换保持 V 上的运算.

例 12 设

$$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{R}^4,$$

令

$$T\boldsymbol{\alpha}=(x_1+x_2-3x_3-x_4,\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4,\ x_1+x_2,\ x_2+x_3),$$

则 T 是 $\mathbf{R}^4$ 上的线性变换.