高等职业教育"十三五"规划教材

高等数学
——理工版
习题全解指南

夏德昌 高玉静 杨燕飞◎主 编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育“十三五”规划教材

高等数学——理工版

习题全解指南

主　编　夏德昌　高玉静　杨燕飞

副主编　施桂萍　梁宏昌　李本图　王德华

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（理工版）习题全解指南 / 夏德昌，高玉静，杨燕飞主编．—北京：北京理工大学出版社，2016.9

ISBN 978-7-5682-3089-6

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①夏…②高…③杨…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 210926 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http：//www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市华骏印务包装有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 9
字　　数 / 206 千字
版　　次 / 2016 年 9 月第 1 版　2016 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 / 24.80 元

责任编辑 / 李慧智
文案编辑 / 孟祥雪
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 马振武

前　　言

本书为《高等数学——理工版》教材的配套学习辅导书，主要面向使用该教材的学生. 高等数学是高职高专的重要基础课，也是职业教育培养体系中服务于专业教育的必修课，让学生具备可持续发展的要求与高等教育专业要求的数学能力. 本书包含模块知识要点和教材习题详解两部分，按照《高等数学——理工版》教材顺序编写，模块知识要点给出了本模块的知识结构，教材习题详解给出习题解答过程. 在重要步骤和较难理解之处均做了注释，对典型习题，给出了两种及两种以上的解法. 本书解题过程详尽，方法技巧全面，真正从学习者的角度，给出解题的每一个过程与步骤，以免略掉一些看似简单但对有些同学理解解题思路很关键的细节.

参加编写人员具体分工如下：高玉静老师编写第一模块；施桂萍老师编写第二模块；李本图老师编写第三模块；杨燕飞老师编写第四模块；梁宏昌老师编写第五模块；王德华老师编写第六模块；夏德昌老师编写第七模块. 本书在编写过程中，得到了学院领导和部门领导的关心、支持，在此一并表示感谢!

由于时间紧迫，水平有限，书中难免存在一些不足和缺点，诚恳地期望广大师生及读者朋友提出宝贵的意见和建议.

编　者

目　　录

第一模块　函数的极限及连续

一、基本要求

（1）理解函数的概念，掌握基本初等函数的图像性质，掌握复合函数的复合过程.
（2）理解极限的思想、极限的概念，掌握极限的运算法则和求极限方法.
（3）理解函数的连续性概念及性质，掌握函数连续性的判断.

二、内容提要

（一）函数的概念

（1）函数 $y=f(x)$，$x\in D$. 定义域和对应法则是确定函数的两个要素.
（2）函数的特性：单调性，有界性，奇偶性，周期性.
（3）初等函数.
函数 $y=f(x)$的对应法则是一一对应的，则存在反函数 $y=f^{-1}(x)$.
$y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$可以复合成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$.
初等函数：由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所得到的并能用一个式子表示的函数.

（二）极限概念

（1）数列极限：若$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A$，则称数列 $\{y_n\}$ 收敛；否则，发散.
（2）函数极限：
①当 $x\to\infty$时（x 的绝对值无限增大），$f(x)\to A$，则$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

②当 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to A$，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

（3）无穷小与无穷大：
①若 $\lim y=0$，则称变量 y 为在这种变化趋势下的无穷小.
②若 $\lim y=\infty$，则称变量 y 为在这种变化趋势下的无穷大.
③在同一变化趋势下，无穷大的倒数是无穷小，非零的无穷小的倒数是无穷大.

（三）极限运算

1. 运算法则和推论

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$，可推广到有限项.

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$，可推广到有限项.

(3) $\lim Cf(x)=C\lim f(x)$，C 为常数；$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$，$n$ 为整数.

(4) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$，$B\neq 0$.

(5) 有界变量与无穷小的乘积还是无穷小.

(6) $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f\lim\limits_{x\to x_0}[\varphi(x)]$.

2. 求极限的常用方法

(1) $\dfrac{0}{0}$型，有提取公因式法、因式分解法、分式有理化法.

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$型，用分子分母中的最高次幂项分别去除分子和分母的每一项（分母的极限存在且不为零），然后再求极限.

有理分式的极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & m<n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

(3) $\infty-\infty$型，要先通分，消去零因子，再求极限.

（四）两个重要极限与无穷小的比较

(1) 第一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，变形有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$；

$$\lim_{x\to c}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1\quad(x\to c,\varphi(x)\to 0).$$

(2) 第二个重要极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，变形有$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$，

$$\lim_{x\to c}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}\quad(x\to c,\varphi(x)\to 0),$$

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}\quad(x\to a,\varphi(x)\to\infty).$$

(3) 无穷小的比较：

$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0\Rightarrow\beta=o(\alpha)$，$\beta$ 是比 α 较高阶无穷小；

$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，$\beta$ 与 α 是同价无穷小，当 $c=1$ 时，β 与 α 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

（五）函数的连续性

（1）连续的定义式

① $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$.

② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

间断点的分类（x_0 是间断点（不连续的点））：

第一类间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在；

第二类间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$至少有一个不存在.

（2）初等函数在其定义区间上是连续的.

（3）闭区间上连续函数具有最大值和最小值；有界；若端点函数值异号，则开区间上至少有一点的函数值为零.

三、习题解答

习题 1－1　函数的概念

1. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{2x+1}$；　　（2）$y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

（3）$y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x^2-9}$；　　（4）$y=\ln(x^2-4)$.

解　（1）$2x+1\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -\dfrac{1}{2}$，即定义域为$\left[-\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$.

（2）$1-x^2\neq 0\Rightarrow x\neq\pm 1$，即定义域为 $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$.

（3）该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ x^2-9\neq 0\end{cases}$$

的 x 的全体，解不等式组得 $x\geqslant 2$ 且 $x\neq\pm 3$，故原函数的定义域为 $[2,\ 3)\cup(3,\ +\infty)$.

（4）由对数的真数大于零可知，自变量 x 应满足 $x^2-4>0$，解得 $x>2$ 或 $x<-2$，故原函数的定义域为 $(-\infty,\ -2)\cup(2,\ +\infty)$.

2. 已知 $f(x)=e^x$，求 $f(0)$，$f(2)$，$f(x^2)$，$f(f(0))$，$f(f(x^2))$.

解　我们只需要用变量代替函数表达式中的 x 就可以得到

$$f(0)=e^0=1,f(2)=e^2,f(x^2)=e^{x^2},$$

$$f(f(0))=e^{f(0)}=e^1=e,$$

$$f(f(x^2))=e^{f(x^2)}=e^{e^{x^2}}.$$

3. 求下列函数的反函数：

（1）$y=3x-2$；　　　　（2）$y=\frac{1-x}{1+x}$；

（3）$y=\sqrt[3]{2x-1}$；　　　（4）$y=1-x^2(x<0)$.

解　（1）由 $y=3x-2$　解得 $x=\frac{y+2}{3}$，即反函数为 $y=\frac{x+2}{3}$.

（2）由 $y=\frac{1-x}{1+x}$　解得 $x=\frac{1-y}{1+y}$，即反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$.

（3）由 $y=\sqrt[3]{2x-1}$　解得 $y^3=2x-1$，$x=\frac{y^3+1}{2}$，即反函数为 $y=\frac{x^3+1}{2}$.

（4）由 $y=1-x^2(x<0)$　解得 $x^2=1-y$，$x=\pm\sqrt{1-y}$，因为 $x<0$，所以 $x^2>0$，即 $1-y>0$，$y<1$，所以反函数为 $x=-\sqrt{1-y}$，$y<1$.

4. 下列函数是由哪几个简单函数复合而成的：

（1）$y=\sin x^3$；　　　　（2）$y=\ln\sin x$；

（3）$y=\cos\sqrt{x+1}$；　　（4）$y=e^{\sin 2x}$；

（5）$y=(3+x+2x^2)^3$；　　（6）$y=\sin^2(1+2x)$；

（7）$y=\ln\ln\sin x$；　　　（8）$y=\sqrt{\ln 2x}$.

解　（1）令 $y=\sin u$，$u=x^3$，则函数 $y=\sin x^3$ 是由 $y=\sin u$，$u=x^3$ 复合而成的.

（2）令 $y=\ln u$，$u=\sin x$，则函数 $y=\ln\sin x$ 是由 $y=\ln u$，$u=\sin x$ 复合而成的.

（3）令 $y=\cos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x+1$，则函数 $y=\cos\sqrt{x+1}$是由 $y=\cos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x+1$ 复合而成的.

（4）令 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=2x$，则函数 $y=e^{\sin 2x}$是由 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=2x$ 复合而成的.

（5）令 $y=u^3$，$u=3+x+2x^2$，则函数 $y=(3+x+2x^2)^3$ 是由 $y=u^3$，$u=3+x+2x^2$ 复合而成的.

（6）令 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=1+2x$，则函数 $y=\sin^2(1+2x)$是由 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=1+2x$ 复合而成的.

（7）令 $y=\ln u$，$u=\ln v$，$v=\sin x$，则函数 $y=\ln\ln\sin x$ 是由 $y=\ln u$，$u=\ln v$，$v=\sin x$ 复合而成的.

（8）令 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=2x$，则函数 $y=\sqrt{\ln 2x}$是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=2x$ 复合而成的.

5. 应用题：

A、B 两地间的汽车运输，旅客携带行李按下列标准支付运费：不超过 10 kg 的不收行李费；超过 10 kg 而不超过 25 kg 的，每 kg 收运费 0.50 元；超过 25 kg 而不超过 100 kg 的，每 kg 收运费 0.80 元. 试列出运输行李的运费与行李的重量之间的函数关系式，写出定义域，并求出所带行李分别为 16 kg 和 65 kg 的甲乙两旅客各应支付多少运费.

解　设行李重量为 x kg，其运费为 y 元. 根据题意有

当 $0\leqslant x\leqslant 10$ 时，$y=0$；

当 $10<x\leqslant 25$ 时，$y=(x-10)\times 0.5=0.5x-5$；

当 $25<x\leqslant 100$ 时，$y=15\times 0.5+(x-25)\times 0.8=0.8x-12.5$.

故所求函数为：

$$y=f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 10,\\ 0.5x-5, & 10<x\leqslant 25,\\ 0.8x-12.5, & 25<x\leqslant 100.\end{cases}$$

其定义域为 $[0,100]$.

又

$$f(16)=0.5\times 16-5=3,$$
$$f(65)=0.8\times 65-12.5=39.5.$$

得甲和乙两旅客应分别支付运费 3.00 元和 39.50 元.

习题 1－2　数列的极限

1. 观察并写出下列数列的极限值：

(1) $y_n=\dfrac{n}{n+1}$；　　(2) $y_n=n\,(-1)^n$；

(3) $y_n=1-\dfrac{1}{10^n}$；　　(4) $y_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

解　(1) 当 $n\to\infty$ 时，y_n 与常数 1 无限接近，所以 $y_n=\dfrac{n}{n+1}$ 的极限是 1，即

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

(2) 当 $n\to\infty$ 时，$|y_n|$ 无限增大，所以 $y_n=n\,(-1)^n$ 是发散的，没有极限.

(3) 当 $n\to\infty$ 时，y_n 与常数 1 无限接近，所以 $y_n=1-\dfrac{1}{10^n}$ 的极限是 1，即

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=1.$$

(4) 因为 $y_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，由观察可知，

当 $n\to\infty$ 时，分母 $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\to\infty$，分子为常数 1，所以 $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0$，即

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

2. 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^3}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+1}{8-n^2}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n+1}{3+n^2}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{2\times4}+\dfrac{1}{3\times5}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+2)}\right]$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n}=2-0=2$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^3}=3-0-0=3$.

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{8-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{8}{n^2}-1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}1}=\frac{3-0+0}{0-1}=-3.$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+1}{3+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{3}{n^2}+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}1}=\frac{2-0-0}{0+1}=2.$$

(5) $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+2)}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n+1}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n+2}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-0-0\right)=\frac{3}{4}.$$

3. 求下列无穷递缩等比数列的和：

(1) 3，1，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{9}$，…；　　　(2) 1，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$-\dfrac{1}{8}$，…；

(3) 1，$-x$，x^2，$-x^3$，…$(|x|<1)$.

解 (1) 由等比公式可得 $S=\dfrac{3}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{9}{2}$.

(2) 由等比公式可得 $S=\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{2}{3}$.

(3) 由等比公式可得 $S=\dfrac{1}{1-(-x)}=\dfrac{1}{1+x}$.

习题 1-3　函数的极限

1. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$；　　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{5}{x^2}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right]$；

(5) $\lim\limits_{x\to3}(x^2-6x+8)$；　　(6) $\lim\limits_{x\to-1}(3x^2-x+1)$；

(7) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2-16}{x+4}$.

解　(1) 由函数的图像可知，当 $x\to-\infty$时，$\dfrac{1}{x}\to0$，所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$.

(2) 由幂函数的图像可知，当 $x\to+\infty$时，$x^{\frac{1}{2}}\to+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}=+\infty$.

(3) 当 $x\to\infty$时，$\dfrac{5}{x^2}\to0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{5}{x^2}\right)=3$.

(4) 当 $x\to+\infty$时，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\to0$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right]=2$.

(5) 结合二次函数的图像可知，$\lim\limits_{x\to3}(x^2-6x+8)=3^2-6\times3+8=-1$.

(6) 结合二次函数的图像可知，$\lim\limits_{x\to-1}(3x^2-x+1)=3\times(-1)^2-(-1)+1=5$.

(7) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x+3)=6$.

(8) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2-16}{x+4}=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{(x+4)(x-4)}{x+4}=\lim\limits_{x\to-4}(x-4)=-8$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant0,\\ 1-x, & x>0.\end{cases}$试讨论极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+1)=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(1-x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant1,\\ x-3, & x>1.\end{cases}$试讨论极限 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x+2)=3$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x-3)=-2$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x+a, & x>0,\\ e^{\frac{1}{x}}+3, & x<0.\end{cases}$若极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在，求常数 a 的值.

解　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(e^{\frac{1}{x}}+3)=3$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+a)=a$，
因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在，所以 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，即 $a=3$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1+\sin x, & x<0,\\ a+e^x, & x>0.\end{cases}$若极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在，求常数 a 的值.

解　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(1+\sin x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+e^x)=a+1$，
因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在，所以 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，即 $a+1=1$，$a=0$.

习题 1-4 无穷小量与无穷大量

1. 填空题：

(1) 当 $x\to$ ________ 或 ________ 时，$f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ 是无穷小；

当 $x\to$ ________ 或 ________ 时，$f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ 是无穷大.

(2) 当 $x\to 0$ 时，与下列无穷小等价的无穷小分别是：

$\sin kx\sim$ ________ $(k\neq 0)$；$\tan kx\sim$ ________ $(k\neq 0)$；$e^{2x}-1\sim$ ________；

$1-\cos 3x^2\sim$ ________；$\ln(1+10x)\sim$ ________；$\sqrt{1+x^2}-1\sim$ ________.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2-4}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-4}=0$，所以当 $x\to 0$ 或 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ 是无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x^2-4}=\infty$，$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x}{x^2-4}=\infty$，所以当 $x\to 2$ 或 $x\to -2$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ 是无穷大.

(2) 当 $x\to 0$ 时，与下列无穷小等价的无穷小分别是：

$\sin kx\sim\underline{\ kx\ }$ $(k\neq 0)$；$\tan kx\sim\underline{\ kx\ }$ $(k\neq 0)$；$e^{2x}-1\sim\underline{\ 2x\ }$；

$1-\cos 3x^2\sim\underline{\ \dfrac{9^{x^4}}{2}\ }$；$\ln(1+10x)\sim\underline{\ 10x\ }$；$\sqrt{1+x^2}-1\sim\underline{\ \dfrac{1}{2}x^2\ }$.

2. 选择题：

(1) 当 $x\to 0$ 时，下列变量是无穷大的是（　　）.

A. $\cos\dfrac{1}{x}$　　B. $\arctan\dfrac{1}{|x|}$　　C. e^{-x}　　D. $\ln|x|$

解 由函数图像可知当 $x\to 0$ 时，$\ln|x|\to\infty$，故选 D.

(2) 当 $x\to 1$ 时，$1-x$ 是 $\dfrac{1}{2}(1-x^2)$ 的（　　）无穷小.

A. 较低阶　　B. 同阶　　C. 等价　　D. 较高阶

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\frac{1}{2}(1-x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\frac{1}{2}(1+x)(1-x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\frac{1}{2}(1+x)}=1$，所以当 $x\to 1$ 时，$1-x$ 是 $\dfrac{1}{2}(1-x^2)$ 的等价无穷小，故选 C.

(3) 当 $n\to\infty$ 时，$\sin^2\dfrac{1}{n}$ 与 $\dfrac{1}{n^k}$ 是等价的无穷小，则 $k=$（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解 由等价无穷小的替换原理知：$\sin^2\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n^2}$，所以 $k=2$，故选 B.

3. 利用无穷小的性质和等价无穷小求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\sin x$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{3x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解　(1) 因为当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x^2}$ 为无穷小，而 $\sin x$ 为有界函数，$|\sin x|\leqslant 1$，所以 $\dfrac{1}{x^2}\sin x$ 也是无穷小，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\sin x=0$.

(2) 因为当 $x\to 0$ 时，x 为无穷小，而 $\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界函数，$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 也是无穷小，即 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

(3) 因为 $\tan 5x\sim 5x$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3x}=\dfrac{5}{3}$.

(4) 因为 $\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$.

(5) 因为 $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin x\cos x}{\sin^3 x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^3 x\cos x}$.

因为 $\sin x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^3 x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}.$$

4. 解答题：

(1) 当 $x\to 1$ 时，$1-x$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是同阶无穷小还是等价无穷小?

(2) 证明：当 $x\to -3$ 时，x^2+6x+9 是比 $x+3$ 较高阶的无穷小.

(1) **解**　因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2\right)=3$，

所以当 $x\to 1$ 时，$1-x$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是同阶无穷小.

(2) **证**　因为 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)^2}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}(x+3)=0$，

所以当 $x\to -3$ 时，x^2+6x+9 是比 $x+3$ 较高阶无穷小.

习题 1-5 极限的四则运算

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2-3x+6)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to -1}(6x^2+2x-5)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-5}{3x+1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$；

(7) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^6-x^3+2}{5x^6+x^3-2}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{4}{4-x^2}\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2-3x+6)=\lim\limits_{x\to 2}4x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}6=4\times 2^2-3\times 2+6=16.$

(2) $\lim\limits_{x\to -1}(6x^2+2x-5)=\lim\limits_{x\to -1}6x^2+\lim\limits_{x\to -1}2x-\lim\limits_{x\to -1}5=6\times(-1)^2-2\times(-1)-5=3.$

(3) $$\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+x-5}{3x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+x-5)}{\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)}=\frac{2\times 2^2+2-5}{3\times 2+1}=\frac{5}{7}.$$

(4) $$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2.$$

(5) $$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=6.$$

(6) $$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^2+9)-9}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}=\frac{1}{6}.$$

(7) $$\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^6-x^3+2}{5x^6+x^3-2}=\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{2}{x^6}}{5+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^6}}=\frac{1}{5}.$$

(8) $$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{4}{4-x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2+x-4}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{(2+x)(2-x)}=-\frac{1}{4}.$$

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3+3x-5)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 5}(2x^2-5x+3)$；

(3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x+1}{2-3x^2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+4x-2}{3x+2}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+2}{x^2+x}(3+\cos x)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3+3x-5)=\lim\limits_{x\to 2}5x^3+\lim\limits_{x\to 2}3x-\lim\limits_{x\to 2}5=5\times 2^3+3\times 2-5=41.$

(2) $\lim\limits_{x\to 5}(2x^2-5x+3)=\lim\limits_{x\to 5}2x^2-\lim\limits_{x\to 5}5x+\lim\limits_{x\to 5}3=2\times 5^2-5\times 5+3=28.$