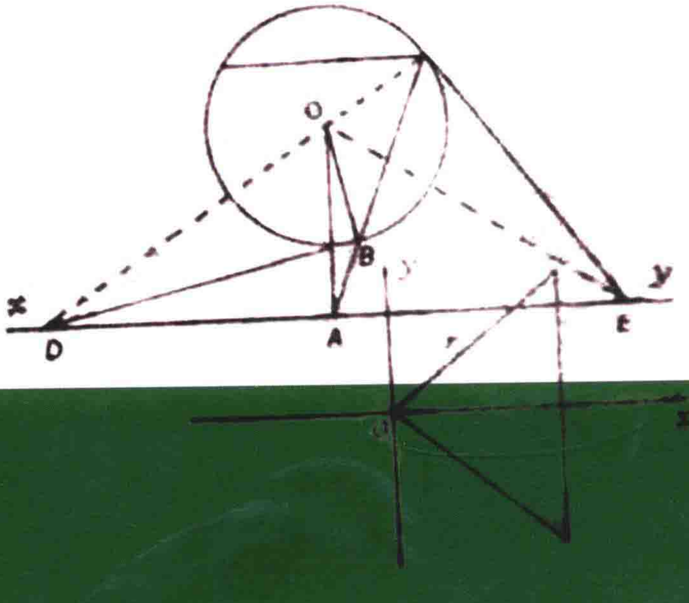
微积分辅导

（第二版）

陈锡祯 主编

广东金融学院成人高等教育系列教材

weijifen fudao



暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

广东金融学院成人高等教育系列教材

weijifen fudao

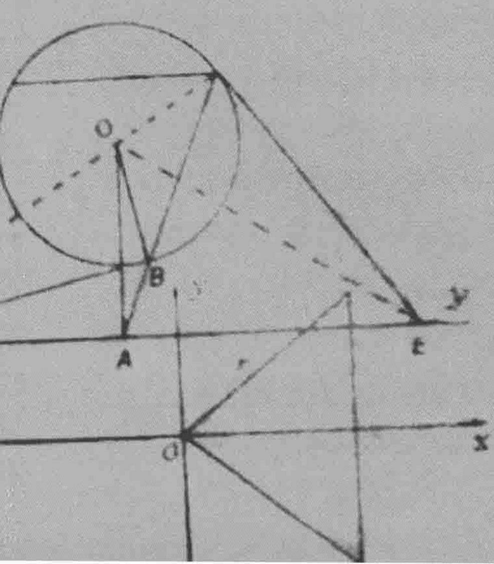
微积分辅导

（第二版）

陈锡祯　主编

暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

中国·广州



图书在版编目（CIP）数据

微积分辅导/陈锡祯主编．—2版．—广州：暨南大学出版社，2012.8
（广东金融学院成人高等教育系列教材）
ISBN 978-7-5668-0276-7

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①微积分—成人高等教育—教学参考资料
Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 184192 号

出版发行：暨南大学出版社

地　　址：中国广州暨南大学
电　　话：总编室（8620）85221601
　　　　　营销部（8620）85225284　85228291　85228292（邮购）
传　　真：（8620）85221583（办公室）　85223774（营销部）
邮　　编：510630
网　　址：http：//www.jnupress.com　http：//press.jnu.edu.cn

排　　版：广州市天河星辰文化发展部照排中心
印　　刷：广州百思得彩印有限公司

开　　本：787mm×960mm　1/16
印　　张：16.125
字　　数：282 千
版　　次：2008 年 8 月第 1 版　2012 年 8 月第 2 版
印　　次：2012 年 8 月第 3 次
印　　数：10001—16000 册

定　　价：32.00 元

总 序

经济的全球化发展，使得国际竞争的实质在很大程度上是各国科学技术力量的竞争、人才的竞争。发展教育事业，不断完善人们的知识结构、提高人们的知识水平已成为时代的要求。随着我国经济的迅速发展、产业结构的不断调整、传统产业部门的改造、新兴产业部门的建立，数以千万计的各种岗位劳动者需要通过边工作边学习的方式来调整自己的知识结构和提高自己的知识水平，以适应这种现代经济与社会发展的要求。我国成人高等教育的发展面临着可贵的机遇，也肩负着重大的历史使命。

为了适应成人高等教育事业蓬勃发展的需要，打造我院成人高等教育品牌，实现“规模扩大、结构合理、效益显著”的奋斗目标，在学校领导和有关部门的大力支持下，经过周密筹划和积极准备，我院继续教育学院正式启动“成人高等教育系列教材”编写工作，计划用三年时间，聘请学校各专业长期从事成人教育的专家、学者，在总结我院成人教育教学经验的基础上，编写公共基础课和专业基础课教材及学习辅导书十五本左右，力求使这批教材从内容到形式真正符合成人学习的特点和要求。

2008 年，第一批推出的“广东金融学院成人高等教育系列教材”包括以下七种：《计算机应用基础》、《计算机应用基础习题解答与上机实验》、《微积分》、《微积分辅导》、《中国特色社会主义理论体系论纲》、《经济应用文写作》、《经济应用文写作范例与练习》。

2009 年，第二批将推出的“广东金融学院成人高等教育系列教材”包括以下六种：《统计学》、《会计学基础》、《会计学基础习题集》、《西方经济学》、《西方经济学习题集》、《管理学原理》。

本系列教材吸收了同类教材的优点，具有简明扼要、条理清晰、深入浅出、通俗易懂的特点。在内容的选择上，本教材注意面向大多数学生，既确保

落实教学大纲的基本要求，又具有适当的弹性，能够适应学生进一步提高的要求，也给授课教师留有较大的选择和发挥空间。

本系列教材的使用对象主要为成人高等教育的专科学生，同时，本系列教材也可作为其他层次成人教育学生的参考书。

广东金融学院成人高等教育系列教材编委会

2008 年 5 月

第二版前言

该书第一版出版以来，受到了广大教师和学生的广泛好评。本教材的第二版是在第一版基础上，根据我们多年的教学实践改革，总结了使用经验，同时又收集了广大读者的意见和建议，按照新形势下教材改革的精神进行全面的修订而成。在修订中，我们保留了原教材的系统、风格及其结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、习题详解、便于自学等优点，同时注意吸收了当前教材改革中成功的举措，使新版教材更适合当前教学的需要。

本次修订改正了原教材中的一些错误与不妥之处，删除了原书中的个别习题，增加了一些应用性很强的例题和习题。通过这次修订让读者使用起来更方便、更适用。参加本次教材修订工作的有陈锡祯、刘娟、岳卫芬、魏雪君、胡蓉、王响、何胜美。

暨南大学出版社对本书的出版给予了大力支持，在此表示衷心的感谢！

书中若有不妥之处，敬请读者指正。

作　者

2012 年 7 月

前　言

本书是与《微积分》（暨南大学出版社出版，夏建业主编）教材配套的辅导教材。编写的目的是对正在学习微积分和复习微积分准备参加各种考试的读者提供学习指导，帮助读者克服在学习过程中遇到的各种困难，以便更有效地掌握和运用微积分的思想与方法。本书分章节编写，包括各章重点难点、内容提要、基本要求和解题能力训练四部分，本书的后面附有各章节习题的详细解答。“内容提要”包含了重要的定义、性质、定理、公式等，是对所讲的教学内容的提炼和浓缩；“基本要求”指出了每章的教学目的和最基本的要求，使教和学的目的明确，便于检查教和学的效果；“解题能力训练”就一些具有代表性、典型性、启发性和广泛性的习题，加以解题能力训练，部分题目一题多解，一些具有代表性的习题又作了详细的分析，并点明了解题思路。可使学生进一步深入理解有关的基本概念、基本理论和基本方法；并针对准备参加专升本考试的学生，增加了类似的例题和习题。本教材可供高等专科院校经济类各专业作辅导教材之用，也可供干部培训或自学之用。

本书由陈锡祯主编，并负责部分内容的编写及统稿和定稿工作。参加编写的还有：刘娟、岳卫芬、魏雪君、胡蓉、王响、何胜美等。由于编者水平和精力有限，外加时间仓促，书中难免存在一些不足和错误，敬请读者批评指正，以便日后进一步修改和完善。

编　者

2008 年 5 月于广州

目录

第一章　函数与极限

一、重点难点

1. **重点**

（1）复合函数的分解；

（2）函数极限的概念及其极限的运算；

（3）函数连续性的概念；

（4）求函数的间断点.

2. **难点**

（1）函数连续性判定；

（2）间断点的求法.

二、内容提要

1. **函数的概念**

定义 1.1　在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，如果 x 在某集合 D 内的每一个值，y 按照一定的对应规则有确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$，集合 D 称作函数的定义域；也可记作 $D(f)$；y 的取值范围称作函数的值域，记作 $Z(f)$.

2. **基本初等函数**

（1）常值函数 $y=c$.　　（c 为任意常数）

（2）幂函数 $y=x^a$.　　（$a\neq 0$ 的任意实数）

（3）指数函数 $y=a^x$.　　（$a>0$ 且 $a\neq 1$）

（4）对数函数 $y=\log_a x$.　　（$a>0$ 且 $a\neq 1$）

（5）三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

（6）反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

3. **复合函数的概念**

定义 1.2　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，若函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为

$Z(\varphi)$，$Z(\varphi)\cap D(f)$非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数. x 为自变量，u 为中间变量.

4. **初等函数**

定义 1.3 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合所得到的函数，且用一个式子表示的，叫做初等函数.

5. **分段函数**

定义 1.4 设 $y=g(x)$ 是定义在 D 上的函数，D 是若干个互不相交的子区间并集，且函数的“对应规则”是由定义在各子区间上的表达式所确定时，则称 y 是 D 上的分段函数. 一般的表达式为

$$y=\begin{cases} g_1(x), & x\in D_1 \\ g_2(x), & x\in D_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ g_k(x), & x\in D_k \end{cases}$$

6. **几个常见的经济函数**

(1) 成本函数 $C=C(x)$，x 是产量. 成本函数一般由两部分组成，其一是固定成本可记为 C_0，如厂房、机器等设备的折旧，它是不变的；二是可变成本可记为 $C_1(x)$，这部分成本是随产量的变化而变化的. 如原材料费、水电费、产品的加工费等. 故成本函数可表示为

$$C(x)=C_0+C_1(x).$$

(2) 收益函数 $R=R(x)$，x 是产量. 收益是指产品销售后换回来的货币. 收益函数是销售量与该产品价格之积. 若产品的市场价格为 p，销售量为 x，则收益函数

$$R(x)=xp.$$

(3) 利润函数 $L=L(x)$，x 是产量. 利润是指纯收益，它是由总收益中扣除成本后的剩余部分，故有

$$L(x)=R(x)-C(x).$$

(4) 需求函数 $Q=Q(p)$，p 是商品的价格. 一般情况下需求量 Q 与价格 p 是呈反方向变化的. 也就是说价格升高，需求量减少，反之亦然. 类似，$Q=Q(p)$ 也可以当作供给函数；这里的 Q 应为市场商品的供应数量.

如果把 $Q=Q(p)$ 当作供给函数时，供给量 Q 与价格 p 呈同向变化，当某种商品的价格升高时，商家就会去采购该种商品，厂家由于价格的升高，当然愿意生产该产品，从而增加了该产品的供给量.

7. **数列与数列的极限**

定义 1.5　数列 $y=f(n)$ 是定义域为自然数的函数，并把函数值按自然数的顺序排列成 y_1，y_2，…，y_n，…，称为一个数列. 记作 y_n .

定义 1.6　（数列极限）设有一个数列 y_n ，如果当 n 无限增大时，数列 y_n 无限趋于某一固定常数 A，则称 A 为数列 y_n 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty} y_n=A$. 或称数列 y_n 收敛于 A. 否则，称数列 y_n 发散.

也可用“$\varepsilon-N$”定义数列的极限.

定义 1.6′　如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$|y_n-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为当 n 趋于无穷大时数列的极限. 记作

$$\lim_{x\to\infty} y_n=A$$

其实，这两个定义是一样的，只不过表达方式不同.

“$\varepsilon-N$”定义中的 ε 是刻画 y_n 与 A 的接近程度，N 是刻画总有那么一个时刻（即刻画 n 充分大的程度）. 这与前一个定义中的当 n 无限增大时，y_n 无限趋近 A，也就是说 y_n 与 A 的距离无限小，小于任意给定的正数 ε.

8. **函数的极限**

（1）当 $x\to\infty$ 时函数的极限.

定义 1.7　设函数 $y=f(x)$ 在（$-\infty$，a）∪（b，$+\infty$）内有定义，当 $|x|$ 无限增大时，对应的函数值无限趋于某固定常数 A，则称数 A 为当 x 趋于无穷大时，函数 $f(x)$ 的极限. 记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$；或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

与数列的极限一样，函数的极限也可用“$\varepsilon-X$”定义.

定义 1.7′　如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 X，使得一切 $|x|>X$，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称常数 A 为当 x 趋于无穷大时，函数 $f(x)$ 的极限. 记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

（2）当 $x\to x_0$ 时函数的极限.

定义 1.8　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 某邻域有定义（x_0 可以除外），当 x 无限趋近于 x_0 时对应的函数值无限趋近于某常数 A，则称 A 为当 x 趋近于 x_0 时的极限. 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$；或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

也可用“$\varepsilon-\delta$”定义函数的极限.

定义 1.8′　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 某邻域有定义（x_0 可以除外），如果任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，使得 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称 A 为当 x 趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的极限. 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$；或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

9. **单侧极限**

(1) **左极限的定义 1.9** 设函数$f(x)$在x_0的左邻域有定义，当x从x_0的左侧无限趋于x_0时函数值无限趋于某一固定常数A，则称A为$f(x)$的左极限. 记为$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$，或记为$f(x_0 - 0) = A$.

(2) **右极限的定义 1.10** 设函数$f(x)$在x_0的右邻域有定义，当x从x_0的右侧无限趋于x_0时函数值无限趋于某一固定常数B，则称B为$f(x)$的右极限. 记为$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = B$，或记为$f(x_0 + 0) = B$.

(3) 当$x \to x_0$时，函数$f(x)$有极限的充要条件是左右极限存在且相等.

10. **无穷大量与无穷小量**

(1) **定义 1.11** 在某一变化过程中，变量y的绝对值无限增大，则称变量y为在该变化过程中的无穷大量.

(2) **定义 1.12** 在某一变化过程中，以零为极限的变量，称为无穷小量.

11. **无穷小量的运算性质**

(1) 有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量；

(2) 有限个无穷小量的积仍为无穷小量；

(3) 有界量与无穷小量的积仍为无穷小量.

12. **无穷小量的比较**

定义 1.13 设α与β是同一变化过程中的两个无穷小量

(1) 若$\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$，则称$\alpha$是比$\beta$高阶的无穷小量，记作$\alpha = o(\beta)$.

(2) $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = c \neq 0$，则称$\alpha$与$\beta$是同阶的无穷小量，当$c = 1$时，则称$\alpha$与$\beta$是等价的无穷小量，记作$\alpha \sim \beta$.

(3) $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$，则称$\alpha$是比$\beta$低阶的无穷小量.

13. **无穷大量与无穷小量的关系**

无穷大量的倒数是无穷小量；无穷小量的倒数是无穷大量.

14. **极限的运算法则**

若$\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，则有

(1) $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$.

(2) $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$.

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$. $\quad (B \neq 0)$

15. **两个重要极限**

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$；或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$

16. **函数的连续性**

（1）**函数在某点连续的定义 1.14**　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义，若当自变量 x 在 x_0 处取得的改变量 Δx 趋于零时，函数相应的改变量 Δy 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0，或\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$$

又 $\Delta x\to 0$，$x-x_0\to 0$ 即 $x\to x_0$，所以，也可表示为

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0.$$

（2）上述定义也可以表示为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

（3）**函数在区间内连续的定义 1.15**　如果函数对于区间（a，b）内任意一点 x 都连续，则称函数在（a，b）内连续.

17. **函数的间断点及函数的间断点的求法**

定义 1.16　由函数连续的定义$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$可以看出，函数连续要满足以下三个条件：

①函数 $f(x)$ 在 x_0 有定义；

②$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；

③$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

不满足以上三个条件之一，函数就是不连续的，不连续就是间断的.

函数间断点的求法：

①若函数 $f(x)$ 在该点无定义，函数在该点间断；

②若函数 $f(x)$ 在该点虽然有定义，但是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

③若函数 $f(x)$ 在该点有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

18. **连续函数的性质**

（1）初等函数在其定义区间内是连续函数；

（2）闭区间上的连续函数，在该区间内必可取到最大值和最小值；

（3）设函数 $f(x)$ 是闭区间［a，b］上的连续函数，m、M 分别是 $f(x)$ 的最小值和最大值，如果 c 是介于 m 与 M 之间的实数（$m<c<M$），则至少存在

一点$\xi \in (a, b)$，使得$f(\xi)=c$.

三、基本要求

（1）掌握函数的定义，会求函数的定义域及函数值，特别是分段函数的定义域.

（2）了解复合函数的概念和初等函数的概念，熟练掌握复合函数的分解.

（3）知道几个常用的经济函数，在实际中会建立一些简单经济问题的函数关系.

（4）掌握函数极限的定义，理解左、右极限的定义，会求分段函数在分界点的左、右极限.

（5）了解无穷小量与无穷大量的定义，以及它们的关系，掌握无穷小量的性质与比较.

（6）熟练掌握极限的四则运算法则，以及两个重要极限的公式.

（7）了解函数连续性的概念，初等函数的连续性，会求函数的间断点.

（8）了解闭区间连续函数的一些简单性质.

四、解题能力训练

例1　求下列函数的定义域，并用区间表示.

（1）$y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$　　（2）$y=\dfrac{x-3}{x^2-x-6}$

（3）$y=\sqrt{\ln\dfrac{5x-x^2}{4}}$

（4）$y=\begin{cases}1-x^2, & |x|\leqslant 1\\ x+1, & 1<|x|<2\end{cases}$

（5）$y=\arccos\dfrac{2x-5}{3}$

解　（1）要使函数有意义，必须满足不等式

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$$

解不等式组得

$$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x\neq 1\end{cases}$$

所以函数的定义域为 $[-2,1)\cup(1,2]$.

(2) 要使函数有意义应满足 $x^2-x-6\neq0$，得 $x\neq3$ 或 $x\neq-2$，故函数的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,3)\cup(3,+\infty)$.

(3) 要使函数有意义，应满足不等式组

$$\begin{cases}\ln\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant0\\ \dfrac{5x-x^2}{4}>0\end{cases}\quad 得到\quad \begin{cases}\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant1\\ \dfrac{5x-x^2}{4}>0\end{cases}$$

于是有 $\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant1$，即 $x^2-5x+4\leqslant0$，解该二次不等式，得到函数的定义域为 $[1,4]$.

(4) 因为该函数为分段函数，所以其定义域为各个区间的并集，$|x|\leqslant1$ 用区间表示为 $[-1,1]$；$1<|x|<2$，解得

$$(-2,-1)\cup(1,2).$$

故函数的定义域为

$$(-2,-1)\cup[-1,1]\cup(1,2)=(-2,2).$$

(5) 因为该函数为反余弦函数，所以该函数的定义域应满足不等式

$$-1\leqslant\frac{2x-5}{3}\leqslant1$$

解该不等式，得 $1\leqslant x\leqslant4$，所以函数的定义域为 $[1,4]$.

例 2　下列各组函数是否是相同的函数？为什么？

(1) $f(x)=3\ln x$ 与 $g(x)=\ln x^3$

(2) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x^2+x+1$

(3) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt[4]{x^4}$

解　(1) 是相同的函数，因为定义域相同，对应关系也相同.

(2) 不是相同的函数，定义域不同.

(3) 不是相同的函数，定义域虽相同，但对应关系不同.

例 3　下列表达式中哪些是函数？哪些不是函数？

(1) $y=\sqrt{\sin x-2}$　　(2) $y=\arccos(-2-x^2)$

(3) $y=\sqrt{-3-x}$　　(4) $y=\ln(1-x)$

(5) $y=\begin{cases}3+x^3, & x<5\\ e^x, & x>2\end{cases}$

(6) $y=\begin{cases}3+2x, & x\geqslant2\\ \sin x, & x<0\end{cases}$

解 （1）不是函数，因为此表达式是偶次根式，被开方数应大于或者等于零，由于 $|\sin x| \leqslant 1$，无论 x 取何值都不能使 $\sin x - 2 \geqslant 0$，从而所给表达式对任何实数 x 都无意义，所以表达式不是函数关系式.

（2）不是函数，因为 $y = \arccos x$ 的定义域 $[-1, 1]$，不论 x 取什么值，$-2 - x^2$ 都不在其定义域内，所以 $y = \arccos(-2 - x^2)$ 不是函数.

（3）是函数，因为只要 $-3 - x \geqslant 0$，即 $x \leqslant -3$.

（4）、（6）是函数.

（5）不是函数，因为分段函数的定义域是若干互不相交的子区间的并集. 而（5）中 $x < 5$ 与 $x > 2$ 是相交的区间，故（5）不是函数.

例 4 设函数 $f(x) = e^x \ln(1+x)$，求 $f[f(0)]$.

解 因为 $f(0) = e^0 \ln(1+0) = 0$，所以

$f[f(0)] = 0$.

例 5 设函数 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$，求 $f(1)$，$f(-x)$，$f(x-1)$，$f(\dfrac{1}{x})$.

解 可令 $f(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$，则 $f(1) = \dfrac{1}{1+1^2} = \dfrac{1}{2}$

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2}$$

$$f(x-1) = \left.\frac{t}{1+t^2}\right|_{t=x-1} = \frac{x-1}{1+(x-1)^2} = \frac{x-1}{x^2-2x+2}$$

$$f(\frac{1}{x}) = \left.\frac{t}{1+t^2}\right|_{t=\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{x}{x^2+1}.$$

例 6 下列函数哪些是基本初等函数？为什么？

（1）$y = 3^{-x}$　　（2）$y = \dfrac{7}{3^x}$

（3）$y = 2x^{-2}$　　（4）$y = \dfrac{2}{x^2}$

（5）$y = \cos\arccos x$　　（6）$y = \ln x^2$

（7）$y = x$　　（8）$y = \cos x$

解 （1）、（7）、（8）是基本初等函数；（2）、（3）、（4）、（5）、（6）都不是基本初等函数，因为它们不满足基本初等函数的定义.

例 7 把下列复合函数分解为基本初等函数.

（1）$y = \cos(x^2 + 3x + 1)$　　（2）$y = \tan^2(\sqrt{x^2+1})$