TURING 图灵数学·统计学丛书

Springer

完全抛开行列式来描述线性算子的基本理论
被斯坦福大学等全球40多个国家、300余所高校采纳为教材

Linear Algebra Done Right, 3E

线性代数应该这样学

（第3版）

[美] Sheldon Axler 著
杜现昆 刘大艳 马晶 译

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书

Linear Algebra Done Right, 3E

线性代数应该这样学

（第3版）

[美] Sheldon Axler 著

杜现昆 刘大艳 马晶 译

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

线性代数应该这样学：第3版 / (美) 阿克斯勒 (Sheldon Axler) 著；杜现昆，刘大艳，马晶 译. —北京：人民邮电出版社，2016.9

（图灵数学·统计学丛书）

ISBN 978-7-115-43178-3

I. ①线… II. ①阿… ②杜… ③刘… ④马… III. ①线性代数 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 180261 号

内 容 提 要

本书强调抽象的向量空间和线性映射，内容涉及多项式、本征值、本征向量、内积空间、迹与行列式等. 本书在内容编排和处理方法上与国内通行的做法大不相同，它完全抛开行列式，采用更直接、更简捷的方法阐述了向量空间和线性算子的基本理论. 书中对一些术语、结论、数学家、证明思想和启示等做了注释，不仅增加了趣味性，还加强了读者对一些概念和思想方法的理解.

本书起点低，无需线性代数方面的预备知识即可学习，非常适合作为教材. 另外，本书方法新颖，非常值得相关教师和科研人员参考.

◆ 著　[美] Sheldon Axler
　译　杜现昆 刘大艳 马 晶
　责任编辑　朱 巍
　执行编辑　江志强
　责任印制　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路11号
　邮编 100164　电子邮件 315@ptpress.com.cn
　网址 http://www.ptpress.com.cn
　固安县铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000 1/16
　印张：16.75
　字数：342 千字　2016 年 9 月第 2 版
　印数：25 201－30 200 册　2016 年 9 月河北第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2015-7371号

定价：49.00 元

读者服务热线：(010)51095186　印装质量热线：(010)81055316

反盗版热线：(010)81055315

广告经营许可证：京东工商广字第 8052 号

译者序

线性代数教材非常多，这本有个特别的书名（*Linear Algebra Done Right*）、已被40多个国家约300所高等院校采用的教材，肯定是世界上最具特色、最流行的线性代数教材之一.

本书的主要内容是向量空间与线性算子. 描述线性算子的结构是线性代数的中心任务之一，传统的方法多以行列式为工具. 作者认为行列式既难懂又不直观，还缺少动机，并且导致思路曲折，从而掩盖了线性代数的本质. 因此，本书完全抛开行列式，采用更直接的方法阐述了线性算子的基本理论，作者认为这种方法可使学生更加直观、深刻地理解线性算子的结构. 线性代数就应该这样教与学.

本书虽然是线性代数的第二课程的教材，但起点低，由浅入深，论述详细，无需线性代数方面的预备知识即可学习，因此除了做课本之外，也很适合作自学教材和参考书. 本书对一些术语、结论、数学家、证明思想等做了注释，这不仅增加了趣味性，而且加深了读者对一些概念和思想方法的理解.

本书的内容大致相当于我国高校数学专业高等代数课程一个学期（通常是第二学期）的教学内容. 由于本书在内容编排和处理方法上与国内通行的做法大不相同，因此有很高的参考价值，对高等代数课程的教学、教研、教改都有很好的借鉴作用.

这本教材的（英文）第1版发行于1996年，第2版发行于1997年，本书译自2015年新出版的第3版. 这一版除采用了更漂亮的版式之外，在内容上也有很多变化. 例如，增加了一倍以上的习题，习题放在了每节之后而非每章之后，增加了很多例子，增加了积空间、商空间及对偶性的内容，利用复化完全改写了第9章，等等.

在本书的翻译过程中，我们得到了作者Axler教授以及吉林大学数学学院博士李月月的帮助，特此致谢.

由于译者的水平有限，因此译文难免有词不达意之处，欢迎读者指正.

致教师

您将要讲授的这门课，可能是学生第二次接触到线性代数了. 学生在第一次接触线性代数时，大概只是和欧几里得空间和矩阵打交道. 本课程则不同，重点是抽象的向量空间和线性映射.

我给这本书起了一个大胆的书名，这得做个解释. 绝大多数的线性代数书都是用行列式来证明有限维复向量空间上的线性算子都有本征值. 但是，行列式既难懂又不直观，而且其定义的引入也往往缺乏动机. 为了证明复向量空间上存在本征值的定理，大部分教科书的做法是：先定义行列式，再证明线性映射不可逆当且仅当其行列式等于 0，然后定义特征多项式. 这种曲折的（也许很折磨人的）思路不能让学生直观地理解为什么本征值一定存在.

与此相反，本书给出的证明（例如 5.21）没用行列式，而且更简单更直观. 本书把行列式放到最后，这就开辟了一条通向线性代数的主要目标——理解线性算子结构的新路径.

本书从线性代数的初步知识讲起，除了适当的数学素养之外，无需更多的预备知识. 本书的大部分习题都需要理解书中的证明，即使学生们已经学过前几章中的一些内容，他们可能仍会不适应本书提供的这种类型的习题.

现在给出本书各章的要点.

- 第 1 章：定义了向量空间，并给出它们的基本性质.
- 第 2 章：定义了线性无关、张成、基和维数，这些概念体现了有限维向量空间的基础理论.
- 第 3 章：引入线性映射. 主要结果是线性映射基本定理 3.22：如果 T 是（有限维向量空间）V 上的线性映射，则 $\dim V = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T$. 这一章的商空间和对偶要比本书的其他内容更抽象，但是跳过这些内容不会有任何问题.
- 第 4 章：给出多项式的部分理论，这是理解线性算子所必需的. 这一章没有线性代数的内容，可以讲快点，尤其是在学生已经熟悉这些结果时.

- 第 5 章：要研究一个线性算子，可将其限制到更小的子空间上，这一想法引出了章首的本征向量．这一章的精彩之处是复向量空间上本征值存在性的简洁证明．这一结果随后被用于证明复向量空间上的线性算子关于某个基有上三角矩阵．所有这些证明都不需要定义行列式和特征多项式!

- 第 6 章：定义了内积空间，并利用规范正交基和格拉姆–施密特过程等标准工具发展了内积空间的基本性质．这一章还描述了如何利用正交投影来解某些极小化问题．

- 第 7 章：其精彩之处是谱定理，它刻画了这样的线性算子：它的某些本征向量可以组成一个规范正交基．有了前几章的工作，这一章的证明都特别简单．这一章还讨论了正算子、等距同构、极分解和奇异值分解．

- 第 8 章：引入极小多项式、特征多项式和广义本征向量．这一章的主要成果是利用广义本征向量描述了复向量空间上的线性算子．这个描述可以用来证明许多通常要用若尔当形来证明的结果．例如，利用这些工具证明了复向量空间上的每个可逆线性算子都有平方根．这一章最后证明了复向量空间上每个线性算子都能化成若尔当形．

- 第 9 章：核心是实向量空间上的线性算子．主要方法是复化，它是实向量空间上算子到复向量空间上算子的自然扩张．利用复化，我们很容易把复向量空间的结果转化到实向量空间．例如，此法可用来证明实向量空间上的每个线性算子都有一维或二维的不变子空间．再如，我们证明了奇数维实向量空间上的每个线性算子都有本征值．

- 第 10 章：（在复向量空间上）把迹和行列式定义为本征值（按重数计）的和与积．本征值的传统处理方法不可能产生这些容易记住的定义，因为传统方法要用行列式来证明本征值的存在性．行列式的一些标准定理现在也变得更清楚了．利用极分解和实谱定理导出了重积分的变量替换公式，其中行列式的出现也显得自然了．

本书把实数域和复数域都用 **F** 来表示，如此便可同步地发展实向量空间和复向量空间上的线性代数．如果您和您的学生更希望把 **F** 看成任意的域，请看 1.A 节末的解释．在个课程的水平上，我更倾向于避免使用任意域，因为这徒增抽象性而不会产生新的线性代数．而且，学生更喜欢将多项式看成函数，而有限域上的多项式则需要看成更为形式化的对象．最后还有一点，即使理论一开始可以在任意域上展开，但是讨论内积空间时我们还是要回到实向量空间和复向量空间．

在一个学期把本书的所有内容都讲完不大可能，一个学期能讲完前 8 章就不错了．如果一定要讲到第 10 章，那就考虑把第 4 章和第 9 章各用 15 分钟讲完，还要跳过第 3 章关于商空间和对偶的内容．

提高学生理解和熟练运用线性代数知识的能力比讲授任何一个特殊的定理都更重要. 数学只能在实践中学习. 好在线性代数有很多好的习题. 在教这门课时，通常每次课我都会留几道习题作为作业，要求到下次课时交. 讲解作业大概要占用一节课的三分之一甚至一半的时间.

相对于上一版，本版的主要改动如下.

- 这一版包含了 561 道习题，其中有 337 道是新增的习题. 习题放在了每一节的最后，而不是每章的最后.
- 增加了许多新的例子，以阐明线性代数的主要思想.
- 本书的（英文）印刷版和电子版都采用了更漂亮的版式（包括使用彩色），[1] 看起来赏心悦目.
- 每个定理现在都有一个描述性的名字.
- 新增了积空间、商空间和对偶的内容.
- 完全重写了第 9 章（实向量空间上的算子），利用复化进行简化. 这样处理，第 5 章和第 7 章变得更简练了，这两章现在主要关注复向量空间.
- 全书有数百处改进. 例如，8.D 节简化了若尔当形的证明.

关于本书的其他信息，请查看下面的网站. 我偶尔会写一些关于其他课题的新章节，并将它们放在网站上. 非常欢迎提交建议、意见以及勘误.

祝顺利完成线性代数的教学!

Sheldon Axler
美国旧金山州立大学数学系
美国旧金山，CA 94132

网站: linear.axler.net
电子邮件: linear@axler.net
推特: @AxlerLinear

① 中译本为黑白印刷，但遵循了英文版的版式. ——编者注

致学生

你即将第二次接触到线性代数．你第一次接触线性代数时，重点大概是欧几里得空间和矩阵，而这次相逢则要关注抽象的向量空间和线性映射．这些术语以后会给出定义，所以如果你不知道它们的含义也不必在意．本书从线性代数的初步知识讲起，不需要线性代数的基础．关键是你要沉浸于严谨的数学，尤其要深入地理解定义、定理、证明．

你不能像看小说那样去读数学．要是你不到一小时就读完一页的话，可能就读得太快了．当遇到“请自行验证”这样的话时，的确需要自己动笔来验证一下．当一些步骤被省略时，要将它们补充完整．你应该仔细琢磨、用心体会每一个定义．对每一个定理，你都要找例子说明为什么其中每个假设都是必要的．跟别人讨论是有益的．

每个定理都有一个描述性的名字．

关于本书的其他信息，请查看下面的网站．我偶尔会写一些关于其他课题的新章节，并将它们放在网站上．非常欢迎提交建议、意见以及勘误．

祝学习线性代数顺利而愉快！

Sheldon Axler

美国旧金山州立大学数学系

美国旧金山，CA 94132

网站：linear.axler.net

电子邮件：linear@axler.net

推特：@AxlerLinear

致　谢

万分感谢在过去的两个世纪里为创建线性代数贡献智慧的广大数学家. 本书的所有结果都属于公共的数学遗产. 定理的某个特殊情况可能在 19 世纪被首次证明，然后又被众多数学家逐步加强和改进. 厘清每个贡献者的确切贡献是一项艰难的任务，我也没这么做. 读者千万不要把本书中的任何定理当成我的原创. 但是，在本书的写作过程中，我尽力思索展现线性代数理论和证明定理的最佳方式，而非考虑采用大多数线性代数教材的通用做法和证明.

本书在很多人的帮助下才得以完善. 本书的前两版被大约 300 所院校用作教材. 我收到用过本书第 2 版的教师和学生的数以千计的建议和意见. 在准备这一版时，我仔细考虑了所有这些建议. 起初，我试图记下其建议被我采纳的那些人，以便在此对他们表示感谢. 但是按建议做修改以后，往往又会有更好的建议，而且要感谢的人的名单越来越长，要记录所有建议的出处变得十分复杂. 并且这样的名单读来乏味，因此就不一一列举了. 在此我对提供建议和意见的每个人致以最诚挚的谢意. 非常感谢!

特别感谢加州大学伯克利分校的 Ken Ribet 和他庞大的线性代数课堂（220 人），他们试用了本书第三版的一个早期版本，并给了我比任何其他团队都要多的建议和更正.

最后，感谢 Springer 出版社在我需要时给予的帮助，并允许我最终决定本书的内容和外观. 特别感谢 Elizabeth Loew 作为编辑的出色工作以及 David Kramer 非常娴熟的排版校对工作.

目 录

第1章

勒内·笛卡儿正在向瑞典女王克里斯蒂娜讲解他的工作. 笛卡儿在 1637 年发表的著作中用两个坐标来描述平面. 向量空间是平面的一种推广.

向量空间

线性代数研究有限维向量空间上的线性映射. 我们以后会知道这些术语的含义. 本章将给出向量空间的定义，并讨论向量空间的基本性质.

在线性代数中，如果既研究实数也考虑复数，就会得到更好的定理，而且也会理解得更深刻. 因此，我们先介绍复数及其基本性质.

我们要把平面和普通空间这些例子推广到 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{C}^n$，然后再进一步推广到向量空间的概念. 所以向量空间的一些初等性质你将会觉得很眼熟.

接下来讨论子空间. 子空间在向量空间中所扮演的角色类似于子集之于集合. 最后，我们将看看子空间的和（类似于子集的并集）与直和（类似于不相交的集合的并集）.

本章的学习目标

- 复数的基本性质
- $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{C}^n$
- 向量空间
- 子空间
- 子空间的和与直和

1.A $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{C}^n$

复数

我们已经熟悉实数集 $\mathbf{R}$ 的基本性质. 复数的发明使得我们可以对负数取平方根. 大致的想法是假定 -1 有平方根，记为 i，并且遵循通常的算术法则. 下面是正式的定义：

1.1 定义 复数（complex number）

- 一个**复数**是一个有序对 (a,b)，其中 $a,b\in\mathbf{R}$，但我们把它写成 $a+b\mathrm{i}$.
- 所有复数构成的集合记为 $\mathbf{C}$：

$$\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}:a,b\in\mathbf{R}\}.$$

- $\mathbf{C}$ 上的**加法**和**乘法**定义为

$$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i},$$

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i},$$

其中 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$.

如果 $a\in\mathbf{R}$，我们就把 $a+0\mathrm{i}$ 等同于实数 a. 于是可以把 $\mathbf{R}$ 看作 $\mathbf{C}$ 的一个子集. 我们也常把 $0+b\mathrm{i}$ 写成 $b\mathrm{i}$，并且把 $0+1\mathrm{i}$ 写成 i.

1777 年瑞士数学家莱昂哈德·欧拉最先使用符号 i 来表示 $\sqrt{-1}$.

请自行验证在如上定义的乘法下 $\mathrm{i}^2=-1$. 不要去背上面的复数乘法公式，只要记住 $\mathrm{i}^2=-1$ 并利用通常的算术法则（见 1.3）就可以把它推导出来.

1.2 例 计算 $(2+3\mathrm{i})(4+5\mathrm{i})$.

解

$$\begin{aligned}(2+3\mathrm{i})(4+5\mathrm{i})&=2\cdot4+2\cdot(5\mathrm{i})+(3\mathrm{i})\cdot4+(3\mathrm{i})(5\mathrm{i})\\&=8+10\mathrm{i}+12\mathrm{i}-15\\&=-7+22\mathrm{i}.\end{aligned}$$

1.3 复数的算术性质

交换性（commutativity）
对所有 $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ 都有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\alpha\beta = \beta\alpha$;

结合性（associativity）
对所有 $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbf{C}$ 都有 $(\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda)$, $(\alpha\beta)\lambda = \alpha(\beta\lambda)$;

单位元（identities）
对所有 $\lambda \in \mathbf{C}$ 都有 $\lambda + 0 = \lambda$, $\lambda 1 = \lambda$;

加法逆元（additive inverse）
对每个 $\alpha \in \mathbf{C}$ 都存在唯一的 $\beta \in \mathbf{C}$ 使得 $\alpha + \beta = 0$;

乘法逆元（multiplicative inverse）
对每个 $\alpha \in \mathbf{C}$, $\alpha \neq 0$ 都存在唯一的 $\beta \in \mathbf{C}$ 使得 $\alpha\beta = 1$;

分配性质（distributive property）
对所有 $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbf{C}$ 都有 $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$.

上述性质可以利用我们所熟悉的实数性质以及复数的加法与乘法的定义来证明. 下面的这个例子给出了复数乘法的交换性的证明. 其他性质的证明留作习题.

1.4 例 证明 $\alpha\beta = \beta\alpha$ 对所有 $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ 成立.

证明 假设 $\alpha = a + b\mathrm{i}$，$\beta = c + d\mathrm{i}$，其中 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. 那么，复数乘法的定义表明

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\beta\alpha &= (c + d\mathrm{i})(a + b\mathrm{i}) \\ &= (ca - db) + (cb + da)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

上面这两组等式和实数的加法与乘法的交换性表明 $\alpha\beta = \beta\alpha$.

1.5 定义 $-\alpha$, 减法（subtraction）、$1/\alpha$, 除法（division）

设 $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

- 令 $-\alpha$ 表示 α 的加法逆元. 因此 $-\alpha$ 是使得

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

  的唯一复数.
- $\mathbf{C}$ 上的**减法**定义为

$$\beta - \alpha = \beta + (-\alpha).$$

- 对于 $\alpha \neq 0$，令 $1/\alpha$ 表示 α 的乘法逆元. 因此 $1/\alpha$ 是使得

$$\alpha(1/\alpha) = 1$$

  的唯一复数.
- $\mathbf{C}$ 上的**除法**定义为

$$\beta/\alpha = \beta(1/\alpha).$$

为了使下文中给出的定义和证明的定理对于实数和复数都适用，我们将采用如下记号：

1.6 记号 $\mathbf{F}$

在本书中 $\mathbf{F}$ 总是表示 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$.

选用字母 $\mathbf{F}$ 是因为 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 都是所谓域（field）的例子.

于是，如果我们证明了一个涉及 $\mathbf{F}$ 的定理，那么将其中的 $\mathbf{F}$ 换成 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$, 定理仍然成立.

$\mathbf{F}$ 中的元素称为**标量**（scalar）. “标量”是用来代表“数”的一个很别致的词，通常用来强调一个对象是数，而不是向量（马上就会给出向量的定义）.

对 $\alpha \in \mathbf{F}$ 及正整数 m，我们把 α^m 定义为 m 个 α 的乘积：

$$\alpha^m = \underbrace{\alpha \cdots\cdots \alpha}_{m\text{个}}.$$

显然，对所有 $\alpha, \beta \in \mathbf{F}$ 及正整数 m, n 都有 $(\alpha^m)^n = \alpha^{mn}$ 和 $(\alpha\beta)^m = \alpha^m\beta^m$.

组

在给出 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 的定义之前先来看两个重要的例子.

1.7 例 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$

- 集合 $\mathbf{R}^2$ 由全体有序实数对构成：

$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\},$$

可以把它看作一个平面.

- 集合 $\mathbf{R}^3$ 由全体有序三元实数组构成:
$$\mathbf{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbf{R}\},$$
可以把它看作通常的空间.

为了把 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 推广到更高的维数, 需要先讨论组的概念.

1.8 定义 组 (list)、长度 (length)

设 n 是非负整数. **长度**为 n 的**组**是 n 个有顺序的元素, 这些元素用逗号隔开并且两端用括弧括起来 (这些元素可以是数、其他组或者更抽象的东西). 长度为 n 的组具有如下形式:
$$(x_1, \ldots, x_n).$$
两个组相等当且仅当它们长度相等、所含的元素相同并且元素的顺序也相同.

于是, 长度为 2 的组是有序对 (pair), 而长度为 3 的组是有序三元组 (triple).

很多数学家称长度为 n 的组为 n 元组 (n-tuple).

有时候我们只说**组**而不指明其长度. 但要记住, 根据定义, 每个组的长度都是有限的, 这个长度是一个非负整数. 因此, 形如
$$(x_1, x_2, \ldots)$$
的对象不是组, 或许可以称为具有无限长度的序列.

长度为 0 的组形如 ( ). 将其视为组, 可使一些定理没有平凡的例外.

组与集合有两点不同: 组中的元素是有顺序的并且允许重复, 而对于集合来说, 顺序和重复都无关紧要.

1.9 例 组与集合

- 组 $(3,5)$ 和 $(5,3)$ 是不相等的, 但是集合 $\{3,5\}$ 和 $\{5,3\}$ 是相等的.
- 组 $(4,4)$ 和 $(4,4,4)$ 是不相等的 (它们的长度不同), 而集合 $\{4,4\}$ 和 $\{4,4,4\}$ 都等于集合 $\{4\}$.

$\mathbf{F}^n$

为了定义与 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 类似的高维对象, 只需用 $\mathbf{F}$ (等于 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$) 代替 $\mathbf{R}$, 并且用任意正整数代替 2 或 3. 特别地, 在本节的其余部分, 我们将固定正整数 n.