The Polish Mathematical Competition Test From The First to The Last

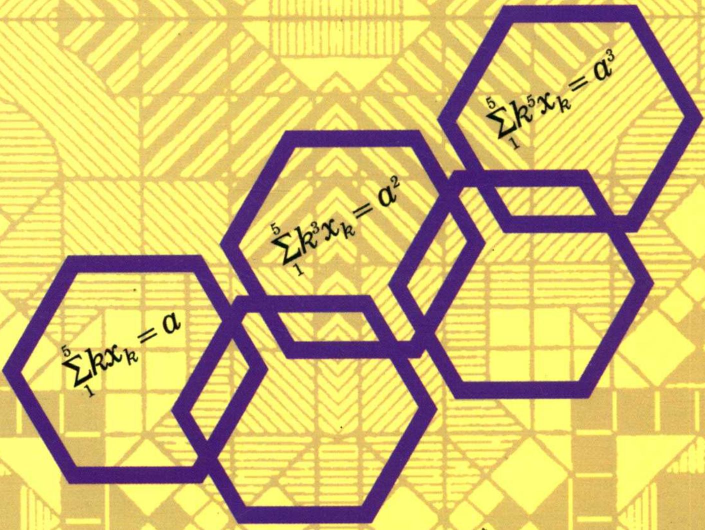
历届波兰数学竞赛试题集

第2卷

1964~1976

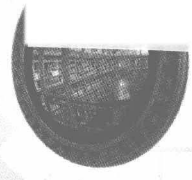
● [波] 耶·勃罗夫金 [波] 斯·斯特拉谢维奇 著

● 朱尧辰 译



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

The Polish Mathematical Competition Test From The First to The Last



历届波兰数学竞赛试题集

第2卷

1964~1976

● [波] 耶·勃罗夫金 [波] 斯·斯特拉谢维奇 著
● 朱尧辰 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书汇集了第16～27届波兰数学竞赛题及解答，并在附录中提供了1970～1976年数学竞赛前两试试题. 本书详细地对每一道题进行了解答，并且注重初等数学与高等数学的联系.

本书适用数学奥林匹克选手及教练员、中学生相关人员及数学爱好者使用.

图书在版编目(CIP)数据

历届波兰数学竞赛试题集. 第2卷，1964～1976/(波)勃罗夫金，(波)斯特拉谢维奇著；朱尧辰译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.3

ISBN 978-7-5603-5236-7

Ⅰ. ①历… Ⅱ. ①勃… ②斯… ③朱… Ⅲ. ①数学—竞赛题 Ⅳ. ①01-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第035495号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 张永文
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传 真 0451－86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 8.5 字数 131千字
版 次 2015年3月第1版 2015年3月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5236-7
定 价 18.00元

目 录 | Contents

第 16 届波兰数学竞赛题

1964～1965 年

1 求所有的素数 p，使 $4p^2+1$ 和 $6p^2+1$ 也是素数.

解 为解本题，必须研究 5 能否整除形如 $u=4p^2+1$ 及 $v=6p^2+1$（p 为素数）的数.

设 r 是 p 除以 5 所得的余数，亦即 $p=5k+r$，这里 k 是整数，而 r 是 0，1，2，3，4 之一. 于是

$$u=100k^2+40kr+4r^2+1$$
$$v=150k^2+60kr+6r^2+1$$

由这两个式子可得下列结论①

如果 $p\equiv 0 \pmod 5$，则 $u\equiv 1 \pmod 5$，$v\equiv 1 \pmod 5$

如果 $p\equiv 1 \pmod 5$，则 $u\equiv 0 \pmod 5$，$v\equiv 2 \pmod 5$

如果 $p\equiv 2 \pmod 5$，则 $u\equiv 2 \pmod 5$，$v\equiv 0 \pmod 5$

如果 $p\equiv 3 \pmod 5$，则 $u\equiv 2 \pmod 5$，$v\equiv 0 \pmod 5$

如果 $p\equiv 4 \pmod 5$，则 $u\equiv 0 \pmod 5$，$v\equiv 2 \pmod 5$

因此，对任何整数 p，三个数 p,u,v 之中有一个且仅有一个被 5 整除.

如果 p 是素数，那么 $p\geqslant 2$，$u>5$，$v>5$. 这表明，当且仅当 p 被 5 整除，亦即 $p=5$ 时，u 和 v 才可能为素数. 不难证实，当 $p=5$ 时，数 u 和 v 确实是素数：$u=4\times 5^2+1=101$，$v=6\times 5^2+1=151$.

因此，本题有唯一解：$p=5$.

2 证明：如果 x_1 和 x_2 是方程 $x^2+px-1=0$ 的两个根（这里 p 是奇数），那么对任何整数 $n\geqslant 0$，数 $x_1^n+x_2^n$ 和 $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ 是互素整数.

证明 用数学归纳法证明本题. 因为 p 是奇数，所以数

$$x_1^0+x_2^0=2 \text{ 与 } x_1+x_2=-p$$

是互素整数，因此，$n=0$ 时命题成立.

现设对某个整数 $n\geqslant 0$，数

---

① 记号 $a\equiv b \pmod n$ 读作"a 与 b 关于模 n 同余"，它表示整数 a 与 b 的差 $a-b$ 被自然数 n 整数. 如果 $0\leqslant b\leqslant n-1$，那么 b 就是 a 被 n 除的余数（或者，a 模 n 的余数）. 读者可参考华罗庚的《数论导引》或陈景润的《初等数论（Ⅰ）》（都是科学出版社出版的）.

$$x_1^n+x_2^n \text{ 与 } x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$$

是互素整数，我们来证明，数 $x_1^{n+2}+x_2^{n+2}$ 是与数 $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ 互素的整数，事实上

$$(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})(x_1+x_2)=x_1^{n+2}+x_2^{n+2}+x_1x_2(x_1^n+x_2^n)$$

将 $x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=-1$ 代入，得

$$x_1^{n+2}+x_2^{n+2}=-p(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})+(x_1^n+x_2^n)$$

因此，数 $x_1^{n+2}+x_2^{n+2}$ 是两个整数之和，并且数 $x_1^{n+2}+x_2^{n+2}$ 与 $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ 的每个公因子也是 $x_1^n+x_2^n$ 的因子，因而也是数 $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ 与 $x_1^n+x_2^n$ 的公因子. 但后两数互素，因此 $x_1^{n+2}+x_2^{n+2}$ 与 $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ 互素. 按数学归纳法，命题对任何自然数 n 成立.

3 证明：如果整数 a 和 b 满足关系式：$2a^2+a=3b^2+b$，那么 $a-b$ 和 $2a+2b+1$ 是整数的平方.

证明 设整数 a,b 满足关系式

$$2a^2+a=3b^2+b \tag{1}$$

如果 $a=0$，那么 $3b^2+b=b(3b+1)=0$. 由此可知 $b=0$(因为对于整数 b，因子 $3b+1\neq 0$). 在这种情形，$a-b=0$，$2a+2b+1=1$，因而问题的结论正确.

现在研究 $a\neq 0$ 的情形. 当 $a\neq 0$ 时由关系式(1) 可知 $b\neq 0$，$a\neq b$.

设 d 是数 a 与 b 的最大公因子，且设

$$a=a_1d, b=b_1d \tag{2}$$

整数 a_1,b_1 互素，且 $a_1\neq b_1$. 因此 $b_1=a_1+r$，其中 r 是与 a_1 互素的非零整数.

由关系式(1) 和(2) 得

$$2da_1^2+a_1=3db_1^2+b_1$$

将新关系式 $b_1=a_1+r$ 代入，可将上式变换为

$$2da_1^2+a_1=3d(a_1+r)^2+a_1+r$$

由此得

$$da_1^2+6da_1r+3dr^2+r=0 \tag{3}$$

式(3) 左边前三项能被 d 整除，所以 r 也能被 d 整除；而后三项能被 r 整除，所以 da_1^2 能被 r 整除，但因为 r 与 a_1 互素，所以 d 能被 r 整除. 因此，$r=d$，或者 $r=-d$. 如果 $r=d$，那么由关系式(3) 知

$$a_1^2+6a_1r+3r+1=0$$

但因为对任何整数 a_1，数 a_1^2+1 不能被 3 整除，所以上式不能成立. 于是

$$r=-d$$

因为 $b_1=a_1-d$，所以 $b=a-d^2$ 以及

$$a-b=d^2 \tag{4}$$

由关系式(1)知

$$2a^2-2b^2+a-b=b^2$$

或者

$$(a-b)(2a+2b+1)=b^2 \tag{5}$$

注意关系式(2)和(4),由关系式(5)可知

$$2a+2b+1=b_1^2 \tag{6}$$

关系式(4)和(6)包含了问题的结论.

附注　可以证明,当关系式(1)成立时,$3a+3b+1$ 也是完全平方数.事实上,$(3a+3b+1)(a-b)=3a^2+a-3b^2-b=3a^2+a-2a^2-a=a^2$.因此,如果 $a\neq b$,那么整数 $3a+3b+1$ 等于 a^2 除以 $a-b$ 的商,亦即等于 a_1^2.如果 $a=b=0$,那么 $3a+3b+1=1$.

4 证明下列命题:如果封闭的五星形折线任何三个顶点都不在一直线上,那么它可以具有一个,两个,三个或五个自交点,但不可能有四个自交点.

证明　在一个闭折线中,只属于折线的一个节段的点,以及只属于两个节段的顶点,称作正常点;如果一个点不是顶点,但属于折线的两个节段,则称为二重点.如果封闭五星形折线的任何三个顶点都不在一直线上,那么它的任一点或者是正常点,或者是二重点.我们来证明,这样的折线可以有 0,1,2,3 或 5 个二重点,但不可能有 4 个二重点.

设点 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 是正五边形的顶点(排列顺序见图 1).折线 $A_1A_2A_3A_4A_5A_1$,$A_1A_2A_3A_5A_4A_1$,$A_1A_3A_5A_4A_2A_1$ 及 $A_1A_3A_5A_2A_4A_1$ 分别有 0,1,2,5 个二重点.

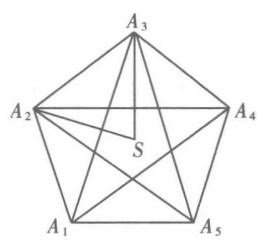


图 1

设点 S 是正五边形中心.折线 $A_1A_3SA_2A_4A_1$ 有 3 个二重点.

因为 5 条直线的交点个数不可能多于 $\frac{5\times 4}{2}=10$,所以五星形折线(有五个顶点)中二重点不可能多于 5 个.

还需证明,这种类型的折线中有二重点个数不可能等于 4.

我们假定折线 $A_1A_2A_3A_4A_5A_1$ 中二重点多于 3 个.我们来证明,它一定有 5 个二重点.因为折线有 5 条节段,所以它的某两个二重点属于同一节段,比如说节段 A_1A_2,我们把这两个二重点记为点 M 和点 N,并且使点 M 落在点 A_1 和点 N 之间.点 M 和点 N 是节段 A_1A_2 与有公共顶点 A_4 的两个节段 A_3A_4,A_4A_5 的交点.整个折线位于平面 $A_1A_2A_4$ 上,并且其余的二重点与顶点 A_4 位于直线 A_1A 两侧,亦即这些二重点属于节段 A_1A_5 和 A_2A_3.

不难证明,点 A_3 在直线 A_4M 上,点 A_5 在直线 A_1N 上.事实

上，如若不然，亦即如果点 A_3 在直线 A_4N 上，而点 A_5 在直线 A_4M 上(图 2)，那么点 A_1 和点 A_3 将位于直线 A_4A_5 两侧. 因此，节段 A_1A_5 不与节段 A_2A_3，A_3A_4 相交. 类似地，节段 A_2A_3 不与节段 A_4A_5，A_5A_1 相交. 这样便和点 M，N 是折线的二重点这一假设矛盾.

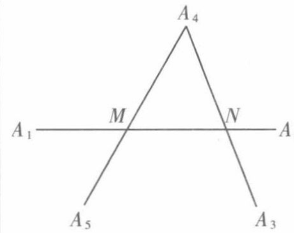


图 2

按上面所证，点 A_1 和点 A_5 位于直线 A_3A_4 两侧，点 A_2 和点 A_3 位于直线 A_4A_5 两侧. 节段 A_1A_5 与直线 A_3A_4 交于某点 P，节段 A_2A_3 与直线 A_4A_5 交于某点 Q. 我们来证明，点 P 和点 Q 是折线的二重点，亦即证明点 P 位于点 A_3 和点 M 之间，点 Q 位于点 A_5 和点 N 之间.

如果点 P 位于线段 A_4A_3 向点 A_3 方向的延长线上(图 3)，那么点 A_2，A_3，A_4 位于直线 A_1A_5 的同侧，因而折线的节段 A_1A_5 就不会与节段 A_2A_3，A_3A_4 中的任一个相交.

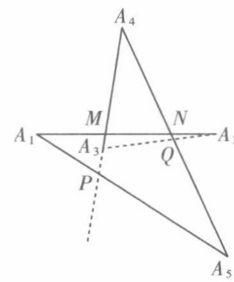


图 3

但这样一来在节段 A_1A_5 上就没有任何二重点，而节段 A_2A_3 上仅有一个二重点(节段 A_2A_3 与 A_4A_5 的交点). 因此，折线只有 3 个二重点，这与原来的假设矛盾. 类似地可以证明点 Q 位于点 A_5 和点 N 之间(图 4).

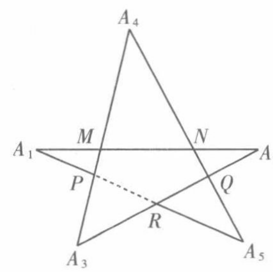


图 4

线段 A_1A_5 与 A_2A_3 一定相交于一点 R. 事实上，线段 A_1A_5 的端点在 $\triangle A_3A_4Q$ 之外，而线段 A_1A_5 与这个三角形的边 A_3A_4 相交，但不与边 A_4Q 相交. 因此，线段 A_1A_5 应当与 $\triangle A_3A_4Q$ 的边 A_3Q 相交. 于是，折线有 5 个二重点：点 M，N，P，Q，R.

附注 上面证明的命题是下列关于闭折线显著点个数的一般定理之特例. 我们只针对这种折线来叙述这个定理：在这种折线中，它的每个点都属于不多于两条节段. 只属于一条节段的点，以及折线的顶点，称为折线的正常数；属于两条不相邻接的节段的点称为折线的二重点. 对于我们所研究的这类折线，这个一般定理如下：

节段条件 $n \geqslant 4$ 的闭折线，其二重点个数：

(a) 当 n 为奇数时，等于从 0 到 $\dfrac{n(n-3)}{2}$ 为止的所有整数，但其中除去 $\dfrac{n(n-3)}{2}-1$.

(b) 当 n 为偶数时，等于从 0 到 $\dfrac{n(n-4)}{2}+1$ 为止的所有整数.

折线的二重点个数不可能等于其他任何数.

5 证明：任一正方形可以剖分成任意个数多于 5 个的正方形，但不能恰好剖分成 5 个正方形.

证明 (a) 首先注意，如果一个正方形被剖分为 m 个正方形，我们从 m 个正方形中任取一个，联结它的两组对边中点，它就

被剖分为四个更小的正方形. 这时原正方形被剖分为 $m+3$ 个正方形.

设 n 是大于 1 的自然数. 将正方形 Q 各边 n 等分,并用与正方形边平行的直线联结两组对边的各对分点,正方形 Q 被剖分为 n^2 个小正方形 Q_i,而且它每条边上都紧贴着 n 个正方形 Q_i.

我们来考察正方形 Q 的两条邻边. 有 $2n-1$ 个正方形 Q_i 和它们紧贴(正方形 Q_i 中有一个与这两条边紧贴),其余那些正方形 Q_i 填满一个边长是正方形 Q 边长的 $\frac{n-1}{n}$ 的正方形 R. 如果擦去正方形 R 中的所有平行线,那么正方形 Q 被剖成 $2n-1$ 个正方形 Q_i 及正方形 R,亦即被剖成 $(2n-1)+1=2n$(个) 正方形.

因此,正方形可以剖成任意偶数(大于 2) 个正方形.

于是,利用我们在解题开始所注意到的事实,正方形可以剖分为 $2n+3=2(n+1)+1(n>1)$(个) 正方形,亦即正方形可以剖分成任意奇数(大于 5) 个正方形.

总之,我们证明了,正方形可以剖分成任意个(个数大于 5) 正方形.

(b) 如果一个正方形被剖分成小正方形,那么在这种图形中,只可能出现直角或平角,并且小正方形的边必定平行于原正方形的边.

我们设正方形 Q 的边长为 1,顶点为 A,B,C,D,它被剖分为 5 个正方形 Q_1,Q_2,Q_3,Q_4,Q_5. 正方形 Q 的每个顶点都是正方形 $Q_i(i=1,2,\cdots,5)$ 顶点之一,并且 Q 的两个不同的顶点不可能属于同一个正方形 Q_i(因为这两顶点间距离 $\geqslant 1$). 设点 A,B,C,D 分别是边长为 a,b,c,d 的正方形 Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 的顶点.

如果正方形 Q_5 的所有顶点都在正方形 Q 内部,那么正方形 $Q_i(i=1,2,3,4)$ 完全布满在 Q 的各边,亦即适合等式

$$a+b=b+c=c+d=d+a=1$$

由此可得 $c=a,d=b$. 于是正方形 Q 的面积

$$S_Q=2a^2+2b^2+S_{Q_5}$$

但它的面积也可以表示成

$$S_Q=(a+b)^2$$

于是得到

$$S_{Q_5}=(a+b)^2-2a^2-2b^2=-(a-b)^2\leqslant 0$$

显然此式是不可能成立的.

如果正方形 Q_5 的某个顶点位于正方形 Q 的一条边上(比如说 AB 边上),那么 Q_5 的某条边(比如说 MN),必落在 AB 上,Q_5 的另两个顶点位于 AB 的经过点 M,N 的两条垂线上,而且与 AB 的距离小于 1,亦即这两个顶点位于正方形 Q 内部,这表明

$$b+c=1, c+d=1, d+a=1, a+b<1$$

因为由前三个等式可推出$(b+c)-(c+d)+(d+a)=1-1+1$，亦即 $a+b=1$，所以，前三个条件与最后一个条件矛盾.

总之，如果假定正方形 Q 能分成 5 个小正方形，将会导致矛盾，所以正方形不能剖分为 5 个小正方形.

6 在圆上任取 $n>2$ 个点，把每个点用线段与其余各点相联结. 能否一笔画出所有这些线段，使第一条线段的终点与第二条线段的起点相重，第二条线段的终点与第三条线段的起点相重，第三条线段的终点与第四条线段的起点相重……最后的一条线段的终点与最初的一条线段的起点相重?

解 如果引进一些记号，可使下面的推理大为简化. 设 Z 是圆上的点的有限集[①]. 如果一条封闭折线，它的顶点全部属于集 Z，并且联结 Z 中任意两点所得的线段在这折线的节段中都出现且只出现一次，那么将这折线记作 $L(Z)$.

我们假定，对于某个含有 $n\geqslant 3$ 个点的集 Z，折线 $L(Z)$ 存在. 那么对于集 Z 的每个点都有折线的$n-1$个节段通过它. 当我们一笔画出这条折线时，走向每个顶点的次数与离开这个顶点的次数相等，因此 $n-1$ 是一个偶数，而数 n 是奇数. 于是，如果 n 是偶数，那么 $L(Z)$ 不存在. 我们来证明，当 n 为奇数时，折线 $L(Z)$ 确定存在(因而也就完全解决了本题).

我们用数学归纳法. 设 $n=2m+1$(m 是自然数). 当 $m=1$ 时，集 Z 含有 3 点 A_1, A_2, A_3，折线 $A_1A_2A_3A_1$ 具备所要求的性质，因而命题正确.

现在设命题当 $m=k-1$ 时正确，亦即对于含 $2k-1$ 个点的集 Z(k 是自然数，$\geqslant 2$)，$L(Z)$ 存在. 我们要证明，当 $m=k$ 时命题也正确，亦即对于含 $n=2k+1$ 个点的集 Z，$L(Z)$ 存在.

我们来研究由圆上的点 $A_1, A_2, \cdots, A_{2k-1}, A_{2k}, A_{2k+1}$ 组成的集 Z. 设 U 是由点 $A_1, A_2, \cdots, A_{2k-1}$ 组成的集. 按归纳假设，对于集 U，折线 $L(U)$ 存在.

不难看出，存在这样的闭折线 K，它的节段由将 $A_1, A_2, \cdots, A_{2k-1}$ 中的每点分别与 A_{2k} 及 A_{2k+1} 联结所得的线段，以及线段 $A_{2k}A_{2k+1}$ 所组成，并且这些线段中的每一条都仅在 K 的节段中出现一次. 例如，下面的折线 K 就是如此

$$A_1A_{2k}A_2A_{2k+1}A_3A_{2k}A_4A_{2k+1}A_5\cdots A_{2k-1}A_{2k}A_{2k+1}A_1$$

在联结集 Z 的点所得的线段中，只有不在折线 $L(U)$ 的节段

① 如果需要的话，可将此条件大为减弱，只需要求 Z 中的任何三个点不在一直线上. 此时，下面一切推理都有效.

中出现的那些线段才成为折线 K 的节段.

现在我们用下列方式将折线 $L(U)$ 和 K 合并成一条折线. 取点 A_1 作为折线 $L(U)$ 的起点,画出了整条折线 $L(U)$ 后,又回到点 A_1,然后从点 A_1 出发画出折线 K,又回到点 A_1. 我们得到一条以点 A_1 为始点和终点的折线. 联结 Z 的任意两点所得的线段都只在这条折线的节段中出现一次. 因此,我们构造出折线 $L(Z)$. 按归纳法原理,命题完全得证.

第17届波兰数学竞赛题

1965～1966年

1 证明:如果两个整系数三次方程有一个公共的无理根,那么它们还有另一个公共根.

证明 设多项式

$$\begin{aligned}P(x) &= a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3\\ Q(x) &= b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3\end{aligned} \tag{1}$$

有公共无理根 α,其中系数 $a_i,b_i(i=0,1,2,3)$ 是整数,$a_0\neq 0$,$b_0\neq 0$.

数 α 也是多项式

$$\begin{aligned}R(x) = b_0P(x)-a_0Q(x) &= (a_1b_0-a_0b_1)x^2+\\ &(a_2b_0-a_0b_2)x+(a_3b_0-a_0b_3)\end{aligned} \tag{2}$$

的根,这是因为 $R(\alpha)=b_0P(\alpha)-a_0Q(\alpha)=0$. 现在分两种情况讨论.

(a)$a_1b_0-a_0b_1\neq 0$. 于是 $R(x)$ 是 x 的整系数二次多项式,因此它的无理根 α 有 $m+n\sqrt{p}$ 的形式,这里 m,n,p 是有理数,p 不是有理数的平方,且 $n\neq 0$.

注意

$$\begin{aligned}P(m+n\sqrt{p}) &= a_0(m+n\sqrt{p})^3+a_1(m+n\sqrt{p})^2+\\ &a_2(m+n\sqrt{p})+a_3=M+N\sqrt{p}\\ P(m-n\sqrt{p}) &= a_0(m-n\sqrt{p})^3+a_1(m-n\sqrt{p})^2+\\ &a_2(m-n\sqrt{p})+a_3=M-N\sqrt{p}\end{aligned}$$

这里 M 和 N 是有理数

$$M=a_0m^3+3a_0mn^2p+a_1m^2+a_1n^2p+a_2m+a_3.$$
$$N=3a_0m^2n+a_0n^3p+2a_1mn+a_2n$$

因为数 $m+n\sqrt{p}$ 是多项式 $P(x)$ 的根,所以 $M+N\sqrt{p}=0$. 因而 $N=0$. 因为不然的话,将会有 $\sqrt{p}=-\dfrac{M}{N}$,但 $\sqrt{p}$ 是无理数,$\dfrac{M}{N}$ 是有理数,所以这是不可能的. 于是也有 $M=0$. 从而 $M-N\sqrt{p}=0$. 这表明 $m-n\sqrt{p}$ 也是多项式 $P(x)$ 的根.

类似地可以证明 $m-n\sqrt{p}$ 也是多项式 $Q(x)$ 的根.

总之,多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 有与根 $m+n\sqrt{p}$ 不同的公共根

$m-n\sqrt{p}$(因为 $n\neq 0,p\neq 0$).

(b)$a_1b_0-a_0b_1=0$. 此时 $R(x)$ 是 x 的整系数一次多项式,但当独立变量 x 取无理值 α 时这多项式为零,因此它必须恒等于零,亦即对一切 x

$$b_0P(x)-a_0Q(x)=0$$

因此,多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 的值成比例,多项式 $P(x)$ 的每个根也是多项式 $Q(x)$ 的根,且反过来也对. 三次多项式 $P(x)$ 除了 α 外还有两个(实的或复的)根 α' 和 α''. 它们中至少有一个异于 α,因为不然的话,将有 $\alpha=\alpha'=\alpha''$,于是从 $\alpha+\alpha'+\alpha''=\frac{a_1}{a_0}$ 推出 $\alpha=-\frac{a_1}{3a_0}$,但 α 是无理数,而 $-\frac{a_1}{3a_0}$ 是有理数,所以这不可能. 现在设,$\alpha'=\alpha$,那么 α' 就是多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 的另一个公共根. 于是本题完全得证.

2 求下列方程的整数解:$x^4+4y^4=2(z^4+4u^4)$

解 显然方程

$$x^4+4y^4=2(z^4+4u^4) \tag{1}$$

有解(0,0,0,0). 我们来证明这就是方程(1)的唯一整数解.

为证明这个结论,我们需要下列引理:

如果 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是互异的非负整数,而 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是不被自然数 c 整除的整数,那么

$$c^{k_1}x_1+c^{k_2}x_2+\cdots+c^{k_n}x_n\neq 0 \tag{2}$$

这个不等式的证明很简单. 设 k_1 是数 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中的最小数. 我们有恒等式

$$c^{k_1}x_1+c^{k_2}x_2+\cdots+c^{k_n}x_n=c^{k_1}(x_1+c^{k_2-k_1}x_2+\cdots+c^{k_n-k_1}x_n)$$

因为当 $i\neq 1$ 时 $k_i-k_1>0$,所以这个式子右边括号中的各个相加项除第一项外都被 c 整除. 因此这个和不为零,又因为 $c^{k_1}\neq 0$,所以得不等式(2).

现设整数 x,y,z 是方程(1)的解,存在非负整数 k,l,m,n 适合

$$x=2^kx_1,y=2^ly_1,z=2^mz_1,u=2^nu_1$$

其中 x_1,y_1,z_1,u_1 是奇数或零. 将这些式子代入方程(1). 方程变形为

$$2^{4k}x_1^4+2^{4l+2}y_1^4-2^{4m+1}z_1^4-2^{4n+3}u_1^4=0 \tag{3}$$

数 $4k,4l+2,4m+1,4n+3$ 被 4 除所得余数不相等,所以这 4 个数互异,因而 $x_1=y_1=z_1=u_1=0$. 事实上,如果 x_1,y_1,z_1,u_1 中任一个都不为零,那么它们都是奇数,从而等式(3)与引理矛盾.

因此，$x = y = z = u = 0$，这正是要证的结论.

3 证明：如果非负数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$（n是任意自然数）满足不等式 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \frac{1}{2}$，那么 $(1 - x_1)(1 - x_2)\cdots(1 - x_n) \geqslant \frac{1}{2}$.

证明　用数学归纳法证明. 当 $n = 1$ 时，因为当 $x_1 \leqslant \frac{1}{2}$ 时，$1 - x_1 \geqslant \frac{1}{2}$，所以命题成立. 现设当$n$取某个自然数$k$时命题成立，亦即如果数 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 非负，且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leqslant \frac{1}{2}$，那么 $(1 - x_1)(1 - x_2)\cdots(1 - x_k) \geqslant \frac{1}{2}$.

我们要证明，当 $n = k + 1$ 时，命题也成立，设 $x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}$ 是非负数，适合不等式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \leqslant \frac{1}{2} \tag{1}$$

令 $x_k' = x_k + x_{k+1}$，那么 $x_k' \geqslant 0$，式(1) 可以写成

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k' \leqslant \frac{1}{2}$$

按归纳假设，有

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\cdots(1 - x_k') =$$

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\cdots(1 - x_k - x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2}$$

因为 $x_k x_{k+1} \geqslant 0$，所以 $1 - x_k - x_{k+1} \leqslant 1 - x_k - x_{k+1} + x_k x_{k+1} = (1 - x_k)(1 - x_{k+1})$，因而

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\cdots(1 - x_k)(1 - x_{k+1}) \geqslant$$

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\cdots(1 - x_k - x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2}$$

因此命题对任何自然数 n 成立.

附注　上面证明的不等式可以推广如下：

如果数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足不等式

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$$

那么

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\cdots(1 - x_n) \geqslant 1 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

4 证明：长方体的各个面在同一个平面上的正射影的面积之平方和与这个平面位置无关的充要条件是：这个长方体是正方体.

证明　设 σ 是长方体各面的平面 π 上的正投影的面积之平方和.

如果平面 π 是长方体的一个面所在的平面，那么 σ 等于这个面的面积平方的 2 倍. 如果长方体不是正方体，那么它至少有两个面积不同的面. 因此，当长方体各面投影在面积不同的面所在的平面上时，σ 将有不同的值.

我们来证明，对于棱长为 a 的正方形，σ 的值与平面 π 的位置无关，亦即对平面 π 的任何位置，$\sigma = 2a^4$.

因为同一个图形在互相平行的平面上的投影是全等的，所以在下面的证明中，不失一般性，可以假定平面 π 经过正方体的某个顶点(将这顶点记为 S)，而整个正方体位于平面 π 划分全空间而得的两个闭半空间① 之一中.

设 n 是在含有正方体的半空间中由 S 引出的垂直于平面 π 的射线. 因为射线 n 与由顶点 S 发出的正方体的棱 SA，SB，SC 之间的夹角 α,β,γ 都不大于 $90°$，因此射线 n 落在三个面角都是直角的三面角 $SABC$ 内部.

为了计算和 σ，我们要利用下述定理：多边形在平面 π 上的正投影之面积等于这多边形面积与多边形平面和平面 π 间夹角的余弦之积.

正方体的经过顶点 S 的三个面与平面 π 的夹角，分别等于正方体与相应面垂直的棱 SA，SB，SC 与射线 n 的夹角，亦即分别等于 α,β,γ. 因此，正方体经过顶点 S 的三个面的正投影面积分别等于 $a^2\cos\alpha, a^2\cos\beta, a^2\cos\gamma$，于是

$$\sigma = 2a^4(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \tag{1}$$

我们在射线 n 上任取一个与顶点 S 不相同的点 M. 设点 M_1，M_2，M_3 是点 M 在直线 SA，SB，SC 上的投影. 那么

$$SM_1^2 + SM_2^2 + SM_3^2 = SM^2 \tag{2}$$

事实上，如果点 M_1，M_2，M_3 都不与顶点 S 重合，那么 SM 是以 SM_1，SM_2，SM_3 为棱的长方体的对角线(图 5). 如果点 M_1，M_2，M_3 中有一个，比如说 M_3 与顶点 S 重合，那么 SM 是 $\mathrm{Rt}\triangle SMM_1$ 的斜边；如果点 M_1，M_2，M_3 中有两个，比如点 M_2 和 M_3，与顶点 S 重合，那么 $SM = SM_1$.

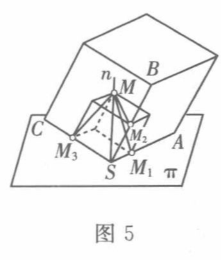


图 5

将值 $SM_1 = SM\cos\alpha$，$SM_2 = SM\cos\beta$，$SM_3 = SM\cos\gamma$ 代入关系式(2)，得到

$$SM^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = SM^2$$

因为 $SM \neq 0$，所以

① 位于一个平面同侧的所有点组成的集称为开半空间，如果这个集还包含这平面上的所有点，则称为闭半空间.

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{3}$$

比较关系式(1)和(3),得最终的答案

$$\sigma=2a^4$$

这正是所要证的.

5 已知凸六边形 $ABCDEF$ 的对角线 AD,BE,CF 都平分它的面积.求证:对角线 AD,BE,CF 通过同一点.

证明 设$(ABC\cdots)$表示多边形 $ABC\cdots$ 的面积.按已知条件(图6)

$$(ABCD)=\frac{1}{2}(ABCDEF)=(BCDE) \tag{1}$$

还有

$$\begin{aligned}(ABCD)&=(ABD)+(DBC)\\(BCDE)&=(EBD)+(DBC)\end{aligned} \tag{2}$$

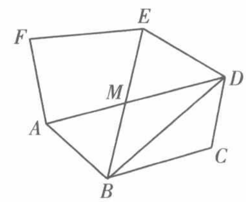


图6

由关系式(1)和(2)得

$$(ABD)=(EBD)$$

因为 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EDB$ 有公共底边,而且顶点 A,E 在直线 BD 同侧,所以由上式知 $AE /\!/ BD$.

类似地可以证明 $AC /\!/ DF$,$CE /\!/ BF$.

设点 M 是对角线 AD 和 BE 的交点.因为已知六边形是凸的,所以这个交点存在.我们来研究以点 M 为中心,将点 A 变为点 D 的位似变换.在此变换下,直线 AE 的象是直线 DB(因为 DB 经过点 A 的象 D,而且与 AE 平行),而点 B 是直线 AE 的象与直线 EM 的公共点,因此点 B 是点 E 的象.又因为直线 AC 的象是经过点 D 而且与 AC 平行的直线,直线 EC 的象是经过点 B 而且与 EC 平行的直线,而点 F 是这两条直线的公共点,因此点 F 是点 C 的象.于是直线 CF 经过相似中心 M,因而对角线 AD,BE,CF 有公共点 M.本题证毕.

6 在平面上任意取6个点.求证:两两联结这些点所得的线段中,最长线段与最短线段长度之比大于或等于$\sqrt{3}$.

证明 我们引进下列记号.设 Z 是已知点 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 组成的集,d 是线段 A_iA_k 中最长线段的长度,δ 是其中最短线段的长度$(i,k=1,2,\cdots,6,i\neq k)$.

要求证明 $d\geqslant\sqrt{3}\delta$.这个不等式容易通过下列推理来证明.

(a)设集 Z 中有3点在一直线上.例如,设点 A_2 位于线段 A_1A_3 上,并且 $A_1A_2\leqslant A_2A_3$.那么 $A_1A_3\geqslant 2A_1A_2$,$d\geqslant A_1A_3$,$\delta\leqslant A_1A_2$,因此 $d\geqslant 2\delta>\sqrt{3}\delta$.