

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Panorama of Mathematics

数 学 概 览

12



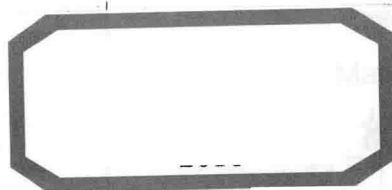
泛函分析史



J. 迪厄多内 著

曲安京 李亚亚 等译

高等教育出版社



ematics

览

12

FANHAN FENXISHI

泛函分析史

- J. 迪厄多内 著
- 曲安京 李亚亚 等译
- 译者：李亚亚 邹学文 李 威
李 斐 刘 茜 王光鑫
- 郭大钧 校

高等教育出版社·北京

图字: 01-2013-7872 号

Translation from English language edition:

History of Functional Analysis by J. Dieudonné

© North-Holland Publishing Company, 1981

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the copyright owner.

This edition of *History of Functional Analysis* 9780444861481 by J. Dieudonné is published by arrangement with ELSEVIER BV of Radarweg 29, 1043 NX Amsterdam, Netherlands

图书在版编目 (CIP) 数据

泛函分析史 / (法) 迪厄多内著; 曲安京等译. --

北京: 高等教育出版社, 2016. 7

(数学概览 / 严加安, 季理真主编)

书名原文: *History of Functional Analysis*

ISBN 978-7-04-045494-9

I. ①泛… II. ①迪… ②曲… III. ①泛函分析
IV. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 102959 号

策划编辑 王丽萍

责任编辑 李 鹏

封面设计 姜 磊

版式设计 张 杰

责任校对 殷 然

责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	涿州市星河印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm × 1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	14.5	版 次	2016年7月第1版
字 数	190千字	印 次	2016年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	49.00元
咨询电话	400-810-0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 45494-00

《数学概览》编委会

主编： 严加安 季理真

编委： 丁 玖 李文林

曲安京 王善平

徐 佩 姚一隼

《数学概览》序言

当你使用卫星定位系统 (GPS) 引导汽车在城市中行驶, 或对医院的计算机层析成像深信不疑时, 你是否意识到其中用到什么数学? 当你兴致勃勃地在网上购物时, 你是否意识到是数学保证了网上交易的安全性? 数学从来就没有像现在这样与我们日常生活有如此密切的联系。的确, 数学无处不在, 但什么是数学, 一个貌似简单的问题, 却不易回答。伽利略说: “数学是上帝用来描述宇宙的语言。” 伽利略的话并没有解释什么是数学, 但他告诉我们, 解释自然界纷繁复杂的现象就要依赖数学。因此, 数学是人类文化的重要组成部分, 对数学本身以及对数学在人类文明发展中的角色的理解, 是我们每一个人应该接受的基本教育。

到 19 世纪中叶, 数学已经发展成为一门高深的理论。如今数学更是一门大学科, 每门子学科又包括很多分支。例如, 现代几何学就包括解析几何、微分几何、代数几何、射影几何、仿射几何、算术几何、谱几何、非交换几何、双曲几何、辛几何、复几何等众多分支。老的学科融入新学科, 新理论用来解决老问题。例如, 经典的费马大定理就是利用现代伽罗瓦表示论和自守形式得以攻破; 拓扑学领域中著名的庞加莱猜想就是用微分几何和硬分析得以证明。不同学科越来越相互交融, 2010 年国际数学家大会 4 个菲尔兹奖获得者的工作就

是明证。

现代数学及其未来是那么神秘,吸引我们不断地探索。借用希尔伯特的一句话:“有谁不想揭开数学未来的面纱,探索新世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢?我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标?在广阔而丰富的数学思想领域,新世纪将会带来什么样的新方法和新成就?”中国有句古话:老马识途。为了探索这个复杂而又迷人的神秘数学世界,我们需要数学大师们的经典论著来指点迷津。想象一下,如果有机会倾听像希尔伯特或克莱因这些大师们的报告是多么激动人心的事情。这样的机会当然不多,但是我们可以通过阅读数学大师们的高端科普读物来提升自己的数学素养。

作为本丛书的前几卷,我们精心挑选了一些数学大师写的经典著作。例如,希尔伯特的《直观几何》成书于他正给数学建立现代公理化系统的时期;克莱因的《数学讲座》是他在19世纪末访问美国芝加哥世界博览会时在西北大学所做的系列通俗报告基础上整理而成的,他的报告与当时的数学前沿密切相关,对美国数学的发展起了巨大的作用;李特尔伍德的《数学随笔集》收集了他对数学的精辟见解;拉普拉斯不仅对天体力学有很大的贡献,而且还是分析概率论的奠基人,他的《概率哲学随笔》讲述了他对概率论的哲学思考。这些著作历久弥新,写作风格堪称一流。我们希望这些著作能够传递这样一个重要观点,良好的表述和沟通在数学上如同在人文学科中一样重要。

数学是一个整体,数学的各个领域从来就是不可分割的,我们要以整体的眼光看待数学的各个分支,这样我们才能更好地理解数学的起源、发展和未来。除了大师们的经典的数学著作之外,我们还将有计划地选择在数学重要领域有影响的现代数学专著翻译出版,希望本译丛能够尽可能覆盖数学的各个领域。我们选书的唯一标准就是:该书必须是对一些重要的理论或问题进行深入浅出的讨论,具有历史价值,有趣且易懂,它们应当能够激发读者学习更多的数学。

作为人类文化一部分的数学,它不仅具有科学性,并且也具有艺术性。罗素说:“数学,如果正确地看,不但拥有真理,而且也具有至高无上的美。”数学家维纳认为“数学是一门精美的艺术”。数学的美主

要在于它的抽象性、简洁性、对称性和雅致性,数学的美还表现在它内部的和谐和统一。最基本的数学美是和谐美、对称美和简洁美,它应该可以而且能够被我们理解和欣赏。怎么来培养数学的美感?阅读数学大师们的经典论著和现代数学精品是一个有效途径。我们希望这套数学概览译丛能够成为在我们学习和欣赏数学的旅途中的良师益友。

严加安、季理真
2012 年秋于北京

引言

“泛函分析”可以有多种定义. 它的名字表明它包含了数学中处理函数的所有部分, 实际上指的是所有的数学分析. 在这里我们采用一种狭义的定义: 泛函分析是研究拓扑向量空间以及拓扑向量空间 E 的子集 Ω 到拓扑向量空间 F 的映射 $u: \Omega \rightarrow F$ 的一门学科, 并且假定这些映射满足各种代数和拓扑条件. 因此泛函分析已经涵盖了现代分析中相当大的一部分, 特别是偏微分方程理论.

泛函分析是由代数学和拓扑学相互结合而产生的, 因此代数学和拓扑学这两大数学分支的发展对泛函分析的发展演变产生巨大影响就不足为奇. 事实上, 几乎不能将一般拓扑学的早期历史 (即使集合论语言的早期历史) 与泛函分析的起源分离开来, 因为函数集合和函数空间引起了大多数人的关注 (继 $\mathbb{R}^n$ 的子集出现之后).

在代数学中拓扑向量空间之间的映射是线性的, 所以线性代数自然而然对泛函分析产生了巨大影响. 事实上, 从代数的“差分演算”中通过“极限过程”得到无穷小微积分的想法由来已久, 19 世纪末当沃尔泰拉 (Volterra) 运用类似的想法处理积分方程时, 这一古老的思想取得了更精确且更有影响的成果. 沃尔泰拉研究了积分方程

$$\int_a^y \varphi(x)H(x, y)dx = f(y), \quad (1)$$

其中 φ 为未知函数, 函数 f 和 H 分别在 $[a, b]$ 和 $[a, b] \times [a, b]$ 上连续,

且 $f(a) = 0$. 他用点 $y_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ($1 \leq k \leq n$) 将 $[a, b]$ 分为 n 个子区间, 再用这 n 个值代替 (1) 中的 y , 用相应的黎曼和代替积分, 由此他得到一个由 n 个线性方程构成的方程组

$$\begin{cases} h_{11}z_1 & = b_1, \\ h_{21}z_1 + h_{22}z_2 & = b_2, \\ \dots\dots\dots & \\ h_{n1}z_1 + h_{n2}z_2 + \dots + h_{nn}z_n & = b_n, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $h_{jk} = H(y_j, y_k)$, $z_k = \varphi(y_k)$, $b_k = f(y_k)$. 因此, 积分方程 (1) 可以看成是当未知量的个数增加到无穷多个时, 方程组 (2) 的极限形式.

令人遗憾的是, 正如 19 世纪甚至更早些时候, 线性代数没能在这个方向上得以很好的发展. 线性代数本身的发展演变过程非常缓慢和艰难, 其历时 130 多年, 包含几个阶段, 以我们现在的观点来看, 这些阶段性的发展与概念的逻辑顺序刚好是相反的, 即



尽管格拉斯曼 (Grassmann) 和皮亚诺 (Peano) 在线性代数中做出的尝试并不成功, 但是在 1900 年以前线性代数中的本质内容和几何观点一直包含在这些尝试之中. 虽然凯莱 (Cayley) (1843 年) 讨论了向量和线性子空间, 但是它们却被看成是某个 $\mathbb{R}^n$ 的部分. 换句话说, 向量空间中的所有元素都依赖于一个固定的基, 通过对应于该基的矩阵才能处理线性映射. 1880 年, 数学家通过复杂的行列式计算, 在没有使用任何几何解释的情况下建立了各种“约简”定理. 弗罗贝尼乌斯 (Frobenius) 在构建线性代数一般框架方面的工作有很大的影响, 令人

遗憾的是他选用的是双线性形式 $\sum_{p,q} a_{pq} x_p y_q$ 而不是矩阵 $\{a_{pq}\}$ 来进行系统研究, 这使数学发展后退了一步, 甚至对凯莱而言都是后退的. 1930 年以前, 没有人能正确理解有限维向量空间之间的对偶概念, 甚至在范德瓦尔登 (van der Waerden) 1931 年的书中向量空间和它的对偶都是等同的.

线性代数中所有的发展严重影响了线性泛函分析的发展演变. 特别地, 线性泛函分析同样经历 (只是很短的几年) 了线性代数发展过程中经历的一系列令人遗憾的阶段. 只有在认识到通常将向量看成是“ n 重数组”的概念不可能推广到无穷维的函数空间上之后, 这个概念最终被取消而几何观点开始真正盛行起来.

通过指出泛函分析中的一些事件以及数学各个部分之间产生的影响, 引言后的示意图详细描绘了泛函分析发展的一系列阶段. 如果想用几个关键词来简述泛函分析复杂的历史发展过程的话, 我认为应该将重点放在两个概念的演变上: 谱理论和对偶. 当然这两个概念都起源于求解未知数是函数的线性方程 (或线性方程组) 中遇到的非常具体的问题. 谱理论的基础概念是特征值、特征函数以及函数关于特征函数的展开式, 早在 19 世纪初傅里叶级数理论中已经出现了特征函数. 这些基本概念为后来的数学发展提供了模板. 数学家用了 60 多年的艰苦努力才将常微分方程上的施图姆 - 刘维尔问题推广到薄膜振动的偏微分方程上. 他们在研究中逐渐认识到问题的关键不在微分方程 (或偏微分方程) 本身上, 而是在于与它们相关的积分方程上. 一开始这些积分方程没有明显地写出来, 从而被称为“密码积分”方程, 以积分估值为基础的方法直到后来才作为标准方法出现在积分方程理论中.

泛函分析历史的显著特征是经过一段缓慢的孕育期后, 或者说, 谱理论在短短几年时间里完全发展成熟, 在这一过程中产生了线性对偶的概念. 由于某种抵制效应, 所有数学家后来都熟悉了对偶概念, 但是分析学家们最先开始理解它. 泛函分析包含一系列可以称之为具体的步骤, 这是泛函分析快速发展中最有趣的一点. 先忽略所考虑问题的特殊性, 再确保将它置于一个更加一般的环境中仍然是可行的, 这是每个步骤中取得决定性一步的关键.

1896—1900 年间, 这些“不连续”步骤中的第一个出现了, 在此期间拉鲁 (Le Roux)、沃尔泰拉和弗雷德霍姆 (Fredholm) 没有像他们的前辈们 (阿贝尔 (Abel)、刘维尔 (Liouville) 和贝尔-诺依曼 (Beer-Neumann)) 那样研究特殊的积分方程, 而是对积分方程的核做出极小的假设, 他们这样做了之后发现积分方程理论比之前所考虑的要简单得多。

希尔伯特 (Hilbert) 在他 1906 年的文章中完成了第二步, 对称核积分方程的特殊理论可以纳入“有界”无穷二次型的更一般的概念中, 这一认识对常微分方程和偏微分方程随后的所有发展提供了所需要的框架。

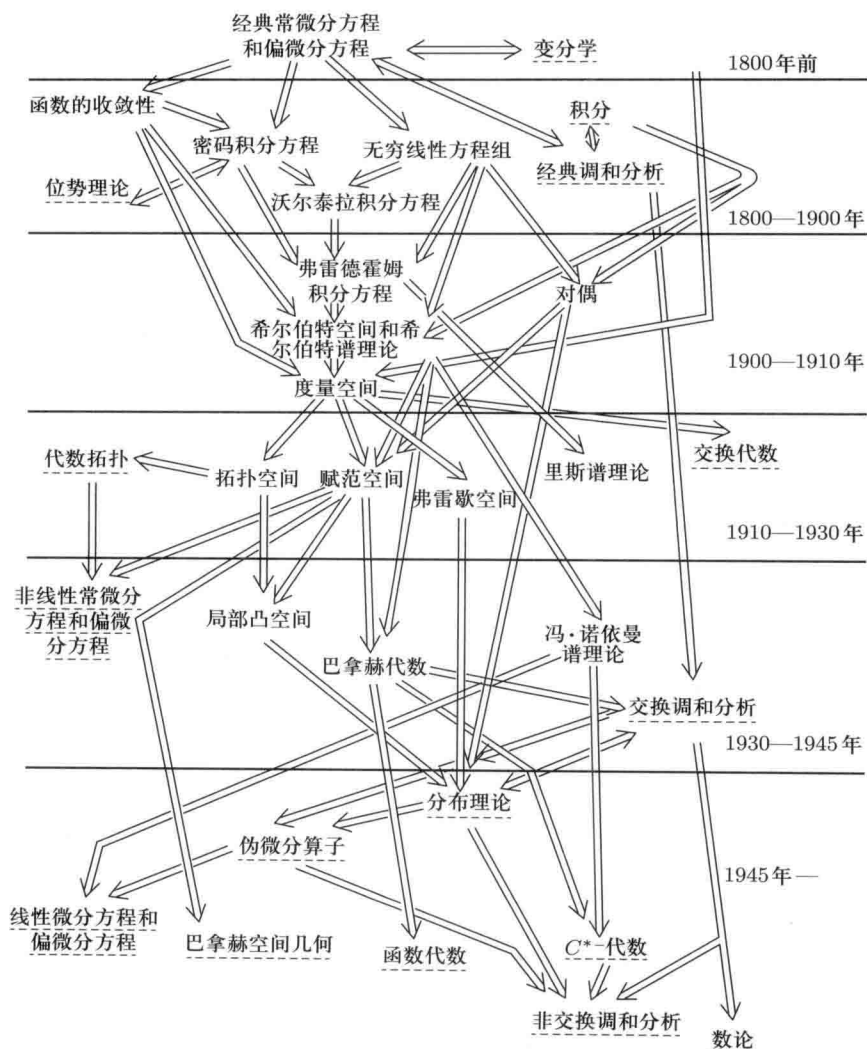
同时期发现的勒贝格积分以及弗雷歇 (Fréchet) 在分析学中引入的几何和拓扑概念, 使得希尔伯特的追随者们将希尔伯特的结果用我们现在所称的希尔伯特空间的语言表述出来, 希尔伯特空间将欧氏几何与积分理论联系起来, 同时在希尔伯特空间中也有可能讨论最一般的线性方程组。

有了这些工作, 里斯 (Riesz) 在 1910—1913 年间对任一指数 p ($1 < p < +\infty$) 引入 L^p 空间和 l^p 空间, 也发现了两个不同的空间 L^p 空间和 L^q 空间之间自然的对偶, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。希尔伯特空间的自对偶性在这一情形下与不能消除的混乱思想有本质区别。

虽然里斯在 l^p 空间中处理线性方程组时最早得到了一个条件, 这个条件后来在哈恩-巴拿赫定理中有特别的应用, 但是里斯没有发现这个条件其实相当于定义在子空间上的连续线性形式的延拓。1921 年, 黑利 (Helly) 再一次将线性方程组理论从特殊的 l^p 空间推广到 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 的任一赋范空间上而完成了泛函分析发展的第四步。之后, 只需要两步多一点就能使泛函分析取得现在的地位, 其中一步是哈恩 (Hahn) 和巴拿赫 (Banach) 一起运用超穷归纳法将线性方程组理论过渡到一般赋范空间上, 另一步是 1935—1945 年间将对偶理论扩展到局部凸空间上。

不断推广的进程有可能会使得 20 世纪中期数学研究取得的成果慢慢减少。鉴于此, 我们可能因为相隔时间太短而不能正确评价这些事件。1950 年后, 拓扑向量空间与线性代数、多重线性代数、一般拓

扑以及测度论一起稳固地成为现代数学的标准工具之一。20 世纪的后 30 年主要运用泛函分析的基本工具并以全新的富有创造性的方法取得了成果,即要么将泛函分析这个基础工具应用到以前不能应用的理论中,如微分几何、微分拓扑(K 理论、阿蒂亚-辛格指标定理和叶状结构),要么运用它来构造处理泛函方程(分布、索伯列夫空间和伪微分算子及它们的推广)的更有力的方法。



这本书稿来自我 1979 年在里约热内卢的一系列演讲, 这些演讲受到里约热内卢联邦大学 Jorge Alberto Barroso 教授的邀请, 在此向

他致以衷心的感谢。我还要感谢他为本书的顺利出版在指导手稿书写方面所付出的辛劳。

本书的出版得到了许多人的帮助。首先我要感谢我的妻子，她不仅在我写作本书的过程中给了我许多鼓励和支持，而且她还为我提供了许多宝贵的意见和建议。我还要感谢我的同事们，他们在我写作本书的过程中给了我许多帮助和支持。最后我要感谢我的朋友们，他们在我写作本书的过程中给了我许多鼓励和支持。



本书的出版得到了许多人的帮助。首先我要感谢我的妻子，她不仅在我写作本书的过程中给了我许多鼓励和支持，而且她还为我提供了许多宝贵的意见和建议。我还要感谢我的同事们，他们在我写作本书的过程中给了我许多帮助和支持。最后我要感谢我的朋友们，他们在我写作本书的过程中给了我许多鼓励和支持。

《数学概览》(Panorama of Mathematics)

(主编: 严加安 季理真)



1. Klein 数学讲座 (2013)
(F. 克莱因 著/陈光还、徐佩 译)



2. Littlewood 数学随笔集 (2014)
(J. E. 李特尔伍德 著, B. 博罗巴斯 编/李培廉 译)



3. 直观几何 (上册) (2013)
(D. 希尔伯特, S. 康福森 著/王联芳 译, 江泽涵 校)



4. 直观几何 (下册) 附亚历山德罗夫的《拓扑学基本概念》
(2013)
(D. 希尔伯特, S. 康福森 著/王联芳、齐民友 译)



5. 惠更斯与巴罗, 牛顿与胡克:
数学分析与突变理论的起步, 从渐伸线到准晶体 (2013)
(B. И. 阿诺尔德 著/李培廉 译)



6. 生命·艺术·几何 (2014)
(M. 吉卡 著/盛立人 译, 张小萍、刘建元 校)



7. 关于概率的哲学随笔 (2013)
(P.-S. 拉普拉斯 著/龚光鲁、钱敏平 译)



8. 代数基本概念 (2014)
(I. R. 沙法列维奇 著/李福安 译)



9. 圆与球 (2015)
(W. 布拉施克 著/苏步青 译)



- 10.1. 数学的世界 I (2015)
(J. R. 纽曼 编/王善平、李璐 译)



- 10.2. 数学的世界 II (2016)
(J. R. 纽曼 编/李文林 等译)



- 10.3. 数学的世界 III (2015)
(J. R. 纽曼 编/王耀东、李文林、袁向东、冯绪宁 译)



11. 对称的观念在 19 世纪的演变: Klein 和 Lie (2016)
(I. M. 亚格洛姆 著/赵振江 译)



12. 泛函分析史 (2016)
(J. 迪厄多内 著/曲安京、李亚亚 等译)

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581999 58582371 58582488

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社法律事务与版权管理部

邮政编码 100120

目 录

第一章 线性微分方程和施图姆－刘维尔问题	1
§1 18 世纪的微分方程和偏微分方程	1
§2 傅里叶展开式	3
§3 施图姆－刘维尔理论	6
第二章 “密码积分” 方程	11
§1 逐次逼近法	11
§2 19 世纪的偏微分方程	14
§3 位势理论的起源	16
§4 狄利克雷原理	19
§5 贝尔－诺依曼方法	21
第三章 薄膜振动方程	27
§1 施瓦茨 1885 年的论文	27
§2 庞加莱的贡献	33
第四章 无穷维思想	43
§1 19 世纪的线性代数	43

§2 无穷行列式	45
§3 对函数空间的探索	48
§4 从“有限到无限”的过渡	53
第五章 至关重要的几年和希尔伯特空间的定义	59
§1 弗雷德霍姆的发现	59
§2 希尔伯特的贡献	65
§3 几何、拓扑以及分析的融合	72
第六章 对偶和赋范空间的定义	77
§1 对连续线性泛函的研究	77
§2 L^p 空间和 l^p 空间	79
§3 赋范空间的诞生和哈恩 - 巴拿赫定理的建立	82
§4 滑脊方法和贝尔纲	88
§5 巴拿赫的书及其影响	91
第七章 1900 年后的谱理论	93
§1 里斯的紧算子理论	93
§2 希尔伯特的谱理论	96
§3 外尔和卡莱曼的工作	103
§4 冯·诺依曼的谱理论	110
§5 巴拿赫代数	117
§6 后续的发展	122
第八章 局部凸空间和广义函数论	135
§1 弱收敛和弱拓扑	135
§2 局部凸向量空间	138
§3 广义函数论	141
第九章 泛函分析在微分方程和偏微分方程中的应用	149
§1 不动点定理	149