大学数学系列教材

线性代数与空间解析几何

主编　范崇金　王锋

3

高等教育出版社

大学数学系列教材

线性代数与空间解析几何

Xianxing Daishu yu Kongjian Jiexi Jihe

主编 范崇金 王锋

高等教育出版社·北京

内容提要

本书在内容编排上将线性代数与空间解析几何知识有机结合，在保持两部分内容完整的基础上，加强了彼此之间的相互联系和渗透；书中还介绍了 MATLAB 软件在线性代数与空间解析几何中的应用。在版式设计上，将纸质内容与网上数字化资源一体化设计，紧密配合，便于读者的自主化学习。同时，该书还配备有学习指导书。

本书主要内容包括行列式、空间解析几何、线性方程组、矩阵、向量组和向量空间、方阵的特征值和特征向量、方阵的对角化、二次型、线性空间与线性变换、MATLAB 简介。每章节配置适量习题，书后附部分习题参考答案二维码。

本书可作为高等学校非数学类专业本科生线性代数课程的教材，也可作为自学者学习线性代数知识的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与空间解析几何 / 范崇金，王锋主编．--北京 ：高等教育出版社，2016.9
ISBN 978-7-04-045920-3

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①范…　②王…　Ⅲ．①线性代数-高等学校-教材②立体几何-解析几何-高等学校-教材
Ⅳ．①O151.2②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 161429 号

策划编辑　张晓丽　　责任编辑　张晓丽　　封面设计　赵　阳　　版式设计　马　云
插图绘制　杜晓丹　　责任校对　刘娟娟　　责任印制　赵义民

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	21.5		
字　　数	390 千字	版　　次	2016 年 9 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2016 年 9 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	37.30 元

物 料 号　45920-00

与本书配套的数字课程资源使用说明

与本书配套的数字课程资源发布在高等教育出版社易课程网站,请登录网站后开始课程学习。

一、网站登录

1. 访问 http://abook.hep.com.cn/1250731,点击“注册”。在注册页面输入用户名、密码及常用的邮箱进行注册。已注册的用户直接输入用户名和密码登录即可进入“我的课程”界面。

2. 点击“我的课程”页面右上方“绑定课程”,按网站提示输入教材封底防伪标签上的数字,点击“确定”完成课程绑定。

3. 在“正在学习”列表中选择已绑定的课程,点击“进入课程”即可浏览或下载与本书配套的课程资源。刚绑定的课程请在“申请学习”列表中选择相应课程并点击“进入课程”。

账号自登录之日起一年内有效,过期作废。

二、资源使用

与本书配套的易课程数字课程资源以不同资源类型构成,包括典型题解析、应用案例、MATLAB 实验、拓展创新、电子教案、自测题及答案等,可登录网站学习。其中的电子教案是为教师上课使用的,与课程和教材紧密配合,可供教师下载使用,也可供学生课前预习或课后复习使用。自测题及答案与教材知识点紧密结合,有助于学生巩固学习成果。这两部分资源同时以二维码形式在书中出现,扫描后即可使用。另,课程网站上还包含有该课程的简介及教学大纲,可供有需求的教师参考使用。

资源抢先看:

典型题解析　　应用案例　　拓展创新

前言

线性代数是高等学校重要的公共数学基础理论课程之一。本书是编者结合多年的教学研究和教学改革实践,参照最新的本科数学基础课程教学基本要求,吸收当前国内外优秀教材的经验编写而成。本书具有以下特色:

1. 本书编写的理念是**结构严谨、逻辑清晰、简明扼要、易教易学**。按照这一原则,编者在该书的内容处理上做了一些尝试:

(1) 由行列式尽早地给出矩阵的秩及线性方程组可解性判别定理,再作为此理论的应用来处理向量组理论。这样,整个课程的教学过程更为流畅,消除了向量组理论的教学难点。

(2) 多处刻意强调了高斯消元法。例如,用高斯消元法轻松自然地证明了克拉默法则,回避了较难的传统证明。

(3) 在内容处理上,从等价分类的角度概述了矩阵的等价、复数域上方阵的相似、实对称阵的合同。这样,学生会对这三个内容有一个整体的理解,而不仅仅是零散的知识点。

(4) 给出了几个传统工科线性代数教材中一般不予给出的定理证明。这些定理的证明用的都是线性代数的基本理论,学生可以作为扩展阅读部分看待,从中受益。

2. 将线性代数与空间解析几何的内容有机结合:

本书在内容上尽早安排空间解析几何一章(第 2 章),在以后各章的线性代数内容中不断渗透空间解析几何的内容,使学生不但能看到线性代数概念的几何背景,增强几何直观能力,也能运用线性代数的方法解决几何问题。

3. 将数学软件 MATLAB 的学习和使用穿插在教学内容中:

利用数学软件 MATLAB 解决线性代数与空间解析几何中的计算、图形处理等问题,将抽象的线性代数概念与理论直观化、实验化、可视化。利用 MATLAB

的绘图功能给出线性代数中许多概念的几何意义,使学生更好地理解线性代数中的抽象概念;每一章最后一节的 MATLAB 在线性代数中的应用案例也可以帮助学生提高应用线性代数知识解决实际问题的能力。

4. 立体化的教材资源配置,全书纸质内容与数字化资源一体化设计,紧密配合:

本书例题和习题丰富,书末附有部分习题参考答案。同时还编写了《线性代数与空间解析几何学习指导》一书,与本教材配套出版。配套的数字化资源包括课程介绍、教学大纲、电子教案、典型题解析、应用案例、MATLAB 实验、自测题及答案等板块,便于学生自主学习。更多资源不断更新中,使用资源过程中若有问题,可与我们(Linghuanzhang@ hrbeu. edu. cn)联系。

本书的 1—7 章是基本内容,为工科类本科数学基础课程教学基本要求及全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲有关部分规定的内容,其余内容可选学。本书作为哈尔滨工程大学线性代数与空间解析几何课程的教材,共安排 72 学时,其中理论教学 64 学时,MATLAB 软件演示及上机实验 8 学时。

本书由哈尔滨工程大学理学院工科数学教研部组织编写,由范崇金、王锋主编,王立刚、凌焕章为副主编,其中第 1—8 章由范崇金、王锋编写,第 9 章和前八章中每章的最后一节由王立刚编写,本书的数字化资源由凌焕章完成。

哈尔滨工业大学理学院郑宝东教授仔细审阅了全部书稿,提出了许多宝贵的意见。本书编写过程中得到哈尔滨工程大学理学院广大数学教师的支持,得到哈尔滨工程大学各级相关部门的支持,也得到高等教育出版社的大力支持,在此我们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,敬请广大读者批评指正。

编　者

2016 年 4 月 5 日

本书部分常用符号说明(按出现的顺序)

符号	说明
$\triangleq$	定义与符号同时给出
$\lvert a_{ij} \rvert_n$	第 i 行第 j 列的元素为 a_{ij} 的 n 阶行列式的缩写
A$\Leftrightarrow$B	“A 的充分必要条件为 B”的缩写
$(\Rightarrow)$	必要性证明
$(\Leftarrow)$	充分性证明
$\lvert \boldsymbol{A} \rvert$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}},\cdots$	线性方程组的增广阵
$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价
$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\boldsymbol{E}_n$	n 阶单位阵
$\mathbb{Q}$	有理数域
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{R}^{m\times n}$	$m\times n$ 实数矩阵的集合
$[a_{ij}]_{m\times n}$	第 i 行第 j 列的元素为 a_{ij} 的 $m\times n$ 矩阵的缩写
$\boldsymbol{O}_{m\times n}$	$m\times n$ 零矩阵
$\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$	对角线为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的对角阵
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^{*}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵
$\boldsymbol{A}^{-1}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵

续表

符号	说明
$\mathbb{R}^n$	n 维实列向量的集合
$\dim V$	向量空间或线性空间 V 的维数
$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$	向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的向量(线性子)空间
$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$	向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩
$\mathrm{r}(\mathcal{A})$	向量组$\mathcal{A}$的秩
$\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域
$\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的核
$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似
$\boldsymbol{J}_k(\lambda)$	对角线为 λ 的 k 阶若尔当块
$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$	向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积
$\\|\boldsymbol{x}\\|$	向量 $\boldsymbol{x}$ 的模
$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同
$\mathbb{R}[x]$	x 的实系数多项式的集合
$P_n[x]$	次数不超过 n 的实系数多项式的集合(含零多项式)
$W\leqslant V$	W 为 V 的子空间
$V\cong W$	线性空间 V 与 W 同构
$V\oplus W$	线性空间 V 与 W 的直和
$\ker\sigma$	线性映射 σ 的核
$\hom(V,W)$	线性空间 V 到 W 的线性映射的集合
$\mathrm{End}(V)$	线性空间 V 的线性变换的集合
$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹
$W^{\perp}$	子空间 W 的正交补

目 录

第1章 行列式

线性代数起源于解线性方程组,人们在准确地阐述线性方程组的可解性与解的结构时,引入了行列式和矩阵;而行列式和矩阵本身也成了线性代数的重要组成部分.这样,线性方程组、行列式和矩阵就构成了线性代数重要的基础内容.

本章的主要内容:

(1) 任意阶行列式的定义与性质;

(2) 行列式按行或按列展开;

(3) 克拉默法则.

1.1 二阶行列式和三阶行列式

1.1 ppt

一、二阶行列式

引例1 若定义二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

则当 $ad - bc \neq 0$ 时,二元一次方程组

$$\begin{cases} ax + by = d_1, & ① \\ cx + dy = d_2 & ② \end{cases}$$

的解为

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},$$

这里

$$D=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix},\quad D_x=\begin{vmatrix}d_1 & b\\ d_2 & d\end{vmatrix},\quad D_y=\begin{vmatrix}a & d_1\\ c & d_2\end{vmatrix}.$$

证明 由①$\times d-$②$\times b$ 得到$(ad-bc)x=dd_1-bd_2$,从而

$$x=\frac{dd_1-bd_2}{ad-bc}=\frac{D_x}{D};$$

同理

$$y=\frac{ad_2-cd_1}{ad-bc}=\frac{D_y}{D}.$$

二、三阶行列式

引例 2 若定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\triangleq a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

则可证明三元一次方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1, & ①\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, & ②\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 & ③\end{cases}$$

的解为

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},\quad z=\frac{D_z}{D}\quad(D\neq 0),$$

这里

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

证明 在方程①,②中视 z 为常数去解 x 和 y 得到

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\cdot x=\begin{vmatrix} d_1-c_1z & b_1 \\ d_2-c_2z & b_2 \end{vmatrix}, \qquad ④$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\cdot y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1-c_1z \\ a_2 & d_2-c_2z \end{vmatrix}; \qquad ⑤$$

方程③两边同乘$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$,再将④,⑤两式代入,化简得到

$$\left(a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)\cdot z=$$

$$a_3\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}+d_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

这就是 $D\cdot z=D_z$,从而

$$z=\frac{D_z}{D};$$

同理可得另外两式.

在此,我们自然会猜到以上的公式能够一般化,但这要定义四阶和四阶以上的行列式. 这正是下一节的内容.

三阶行列式可按下面的图 1.1 所示的**对角线法则**计算.

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

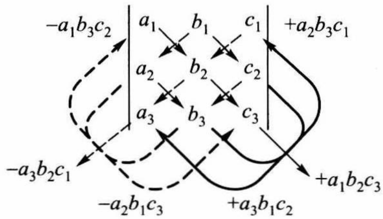

图 1.1

解 由对角线法则,

$$D = 1\times2\times2+(-2)\times1\times3+2\times0\times3-3\times2\times3-(-2)\times2\times2-1\times0\times1=-12.$$

习 题 1.1

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}a&b\\a^2&b^2\end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&4\\3&4&3\end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix}1&a&b\\0&2&c\\0&0&3\end{vmatrix}$; (5) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix}x&-1&0\\0&x&-1\\a_3&a_2&a_1\end{vmatrix}$.

2. 利用行列式解下列方程组:

(1) $\begin{cases}5x+2y=3,\\4x+2y=1;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x-4y+z=1,\\x-5y+3z=2,\\x-y+z=-1.\end{cases}$

3. 验证下列等式,并归纳出三阶行列式的性质:

(1) $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}a_2&b_2&c_2\\a_1&b_1&c_1\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix}ka_1&kb_1&kc_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=k\cdot\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+ka_1 & b_2+kb_1 & c_2+kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} a_1+x_1 & b_1+y_1 & c_1+z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

4. 令 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,化简下列两式,并找出规律:

(1) $a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$;

(2) $a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

1.2 n阶行列式

1.2 ppt

一、三阶行列式的特点

本节我们要定义任意 n 阶行列式,为此我们观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

的特点:

(1) 行列式为3!个单项式的和,每个单项式为 $\pm a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$;

(2) 排列 $p_1p_2p_3$ 取遍 1,2,3 的所有全排列;

(3) 当排列 $p_1p_2p_3$ 为 123,231,312 时,单项式的系数为 +1;当排列 $p_1p_2p_3$ 为 213,321,132 时,单项式的系数为 -1.

那么两组排列 123,231,312 和 321,213,132 的什么属性决定了 ±1? 若数字 $a>b$,我们称数对 ab 为**逆序对**,则我们发现:

(1) 排列 123,231,312 中逆序对的个数为偶数;

(2) 排列 321,213,132 中逆序对的个数为奇数.

鉴于这样的观察,下面我们给出 n 阶行列式的定义.

二、n 元排列

n 元排列:由数字 $1,2,\cdots,n$ 构成的不重复全排列称为(一个)n **元排列**.一切 n 元排列的集合记为 A_n,此集合有 n!个元素.

例如,

$$A_2=\{12,21\},\quad A_3=\{123,132,213,231,312,321\}.$$

排列的逆序数:设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为任意一个 n 元排列,数字 i 前面有 t_i 个数字大于 i,则称

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)\triangleq t_1+t_2+\cdots+t_n$$

为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的**逆序数**.

例如,$\tau(2431)=3+0+1+0=4$,$\tau(4231)=3+1+1+0=5$.

排列的奇偶性:若 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为奇(偶)数,则称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为**奇(偶)排列**.

例如,2431 为偶排列,4231 为奇排列.

对换:在一个排列中对调其中的两个数字,而保持其余的数字不变,这种过程称为**对换**;对换两个相邻的数字称为**相邻对换**.

命题 1.1 若 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t$,**则经过** t **次相邻对换,可将排列** $p_1p_2\cdots p_n$ **调成** $12\cdots n$.

证明 1 经过 t_1 次相邻对换调到首位,而这并不改变 $t_i(i=2,3,\cdots,n)$;2 经过 t_2 次相邻对换调到第 2 位;依此类推,最终排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 经过 $t_1+t_2+\cdots+t_n$ 次,即 t 次相邻对换调成了排列 $12\cdots n$.

命题 1.2 **对换改变原来排列的奇偶性.**

证明 若对换排列的两个相邻的数,排列的逆序数加 1 或减 1,因而奇偶性改变.现设排列