Comprendre les mathématiques par les textes historiques

IREM - HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

L'ANALYSE ALGÉBRIQUE

Un épisode clé de l'histoire des mathématiques

Jean-Pierre Lubet
Jean-Pierre Friedelmeyer

ellipses

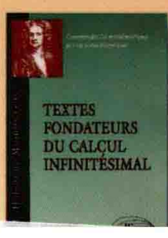
- D'où nous viennent les notions de fonction dérivée ? de primitive ?
- Comment s'est répandu l'usage des notations f', f'', … pour représenter les dérivées successives ?
- Quels résultats pouvait-on obtenir en manipulant des sommes infinies sans se préoccuper de leur convergence, comme c'était souvent le cas au XVIII[e] siècle ?
- De quels moyens disposait-on pour faire face aux problèmes issus de la physique mathématique naissante ?
- À quelle occasion les termes commutatif ou distributif qui faisaient partie du vocabulaire juridique et moral ont-ils été introduits en mathématiques ?

Pour répondre à toutes ces questions il faut lire des auteurs illustres comme Euler ou Lagrange, mais aussi bien d'autres, souvent méconnus tels Arbogast, Brisson ou Servois.

Cet ouvrage permet un contact avec les textes originaux, il s'adresse à toute personne intéressée par la culture scientifique : étudiant, enseignant, formateur, amateur curieux de comprendre le développement des idées en mathématiques…

Une mise en perspective générale, des introductions et des commentaires sont là pour situer le contexte, lever les principales difficultés, signaler les enjeux. Les errements et les incertitudes sont examinés avec précision, ils rendent manifestes quelques-uns des obstacles qu'il a fallu surmonter pour aboutir à l'analyse mathématique que nous connaissons aujourd'hui.

Dans la même collection :



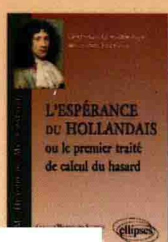


Illustration de couverture : Joseph

9 782729 883942

ıs-ellipses.fr

L'ANALYSE ALGÉBRIQUE

ellipses

L'ANALYSE ALGÉBRIQUE

J.-P. Lubet
J.-P. Friedelmeyer

PRÉSENTATION

Le présent ouvrage a pour objectif de mettre à la disposition du lecteur une anthologie de textes mathématiques originaux et commentés, concernant un épisode clef de l'histoire de l'analyse et décrite par le terme d'*analyse algébrique,* expression traditionnellement utilisée par les historiens des mathématiques pour couvrir le sujet dont il est question ici[1]. Elle est présente dans le titre complet du traité publié en 1797 par Lagrange et qui occupe une place importante de ce recueil : *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies* ; devant ses étudiants, l'auteur s'assignait d'ailleurs comme objectif de *rattacher ce calcul au reste de l'algèbre de manière à ne faire du tout qu'une seule méthode*[2]. Pour le lecteur du 21$^{\text{ème}}$ siècle, cette expression a un pouvoir d'évocation qui ne trompe pas sur la matière qui va être traitée : l'*analyse* s'occupe de fonctions, de dérivées, de calcul différentiel et intégral. Le qualificatif *algébrique* rend alors compte d'un mouvement général qui s'amorce au milieu du 18$^{\text{ème}}$ siècle et qui est marqué d'une double ambition : dissocier les principes du calcul différentiel de leurs références géométriques et contourner la question des infinitésimaux en essayant de réduire le calcul différentiel à un

---

[1] Par exemple, l'article de [Fraser 1989] a pour titre *The Calculus as Algebraic Analysis. Some Observations on mathematical Analysis in the 18th Century* ; un chapitre de [Jahnke 1999] s'intitule *Algebraic Analysis in the 18th Century.*

[2] Cité par Ch. Phili d'après *Le manuscrit du Cours de Lagrange à l'École Polytechnique (1797-179*8) [Féry 2012, p. 342].

ensemble d'opérations algébriques. Cette démarche va impliquer un recours aux séries entières, elles-mêmes présentées comme une généralisation du domaine de l'algèbre des polynômes. Schématiquement on peut faire commencer cette période en 1748 avec l'*Introductio in Analysin infinitorum* d'Euler et la terminer à la publication de *l'Analyse algébrique* par Cauchy, en 1821. Les textes que nous allons présenter sont antérieurs à l'intervention de Cauchy, et dans de nombreux cas ils ne satisfont pas aux exigences qu'il va imposer. Pourtant ils apportent des résultats non négligeables pour le développement des mathématiques. Ils témoignent d'un effort de clarification et de mise en ordre. Ils imposent, dans le contexte même de leur émergence, plusieurs concepts fondamentaux, avec le vocabulaire qui les accompagne depuis cette époque : les termes *dérivation, fonction dérivée*, les qualificatifs *commutatif, distributif,* ainsi que de nombreuses notations qui datent aussi de cette période : f', f'', etc. pour les dérivées successives, D, E, Δ pour divers opérateurs. Ils montrent comment les travaux sur les fondements du calcul différentiel et sur les méthodes du calcul intégral fournissent un terrain sur lequel pourront se développer le calcul des opérateurs et la conception d'une algèbre abstraite.

Nous considérons cette période comme un épisode clef pour comprendre l'histoire de l'analyse. Le mot *épisode* est à prendre ici dans son sens originel, dérivé du grec ancien ἐπεισόδιον *(epeisódion)* signifiant dans une œuvre littéraire une action incidente liée à l'action principale tout en semblant former un tableau à part entière. En histoire des mathématiques, l'*analyse algébrique* est souvent considérée comme une digression, une dérive du cours « normal », un incident, en un mot un épisode aboutissant à une impasse car fondé sur des présupposés erronés, manquant de définitions précises et de méthodes de démonstration rigoureuses. Mais, outre le fait que nombre de concepts et de notations ayant cours aujourd'hui ont été inventés durant cette période, Koyré nous a appris combien l'historien des sciences doit *étudier les erreurs et les échecs avec autant de soin que les réussites* (…), *(ils) ne sont pas seulement instructifs ; ils sont révélateurs des* *difficultés qu'il a fallu vaincre, des obstacles qu'il a fallu surmonter*[3]. Des personnalités aussi illustres qu'Euler, Lagrange, Laplace vont contribuer à ces remarquables développements, mais aussi de nombreux mathématiciens moins connus tels Arbogast, Brisson, Servois et quelques autres. Leurs écrits tirés pour certains quasiment de l'oubli doivent aider à mieux comprendre tant les avancées remarquables de cette période dans l'élaboration de l'analyse moderne que les zones d'ombre représentant autant d'obstacles à surmonter. Tous ces écrits tissent un lien entre les débuts du calcul infinitésimal ancré dans la géométrie et la pratique de l'analyse telle qu'elle va se déployer dans toute sa rigueur moderne au 19ème siècle. Notre objectif est de faciliter l'accès à leur lecture par un commentaire introductif, complété quelquefois par quelques observations. Les textes cités seront, quant à eux, signalés par un retrait et un trait vertical à gauche.

Après une présentation de la situation du calcul infinitésimal au milieu du 18ème siècle, deux chapitres sont consacrés aux deux initiateurs du courant de l'*analyse algébrique,* Euler et Lagrange, qui fournissent les thèmes et les méthodes. Ceux-ci sollicitent particulièrement le concept de fonction dont la nature et l'évolution sont étudiées dans un quatrième chapitre. Se pose alors dans le chapitre cinq la question des fondements de ce courant qui s'appuie sur la formule de Taylor comme base d'une théorie des fonctions analytiques développée par Lagrange. Ces fondements et les méthodes ainsi mises en place suscitent des développements nombreux autour d'algorithmes de calcul et de techniques opératoires utilisant des théories nouvelles et développant des procédés inédits, par des « outsiders » tels que Arbogast, Brisson, Français et Servois. Une conclusion d'ensemble tentera de faire le point sur les apports de l'épisode *analyse algébrique* et de son influence sur les mathématiciens de l'époque.

[3] [Koyré 1973, p. 14].

Chapitre I

FÉCONDITÉS ET FAIBLESSES D'UN NOUVEAU CALCUL

En 1684 Leibniz rend publiques les règles de son calcul différentiel dans un article publié à Leipzig par la toute nouvelle revue des *Acta Eruditorum*. Il s'agit d'un article bref exposant rapidement la notation des différentielles, leur mode d'emploi et leur usage pour la détermination des tangentes ou des maxima. La diffusion du nouveau calcul va se réaliser lentement ; elle se fera d'abord par des écrits ponctuels que Leibniz lui-même va continuer à livrer et par les développements apportés par ses disciples, essentiellement les deux frères Jacques Bernoulli et Jean Bernoulli. En 1696, à Paris, est publié un premier exposé systématique du nouveau calcul : *L'analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, réalisé par Guillaume de l'Hospital et largement inspiré des leçons que l'auteur a reçues de Jean Bernoulli. Il ne contient aucun élément de calcul intégral, mais il traite de nombreux problèmes géométriques relevant directement du calcul différentiel (tangentes, points de rebroussement, points d'inflexion, développées, caustiques…) et il montre que les méthodes leibniziennes permettent d'étudier les courbes transcendantes (logarithmique, spirales, cycloïdes…).

Cependant le nouveau calcul est loin de rencontrer une adhésion unanime. À Paris une opposition se manifeste au sein de l'Académie des Sciences[1]. Par des articles qu'il donne au *Journal des Sçavans* et par des

[1] Voir [Sergescu 1995] et [Mancosu 1989].

mémoires à l'Académie, Michel Rolle est l'un des porte-parole les plus actifs des opposants. Les problèmes soulevés concernent les résultats obtenus : le nouveau calcul serait inutile parce que les méthodes anciennes permettraient d'obtenir les résultats dont se prévalent les inventeurs ; pire, il conduirait à des erreurs et Rolle donne un exemple de courbe où, selon lui, des minima correspondant à des points de rebroussement, ne peuvent être mis en évidence par le calcul différentiel.

Mais surtout, Rolle met en cause le statut des différentielles et l'usage des infiniment petits. Dans le traité de L'Hospital, la différentielle (alors appelée *différence*) est *la portion infiniment petite dont une quantité augmente ou diminue continuellement* [p. 2] ; d'autre part l'une des *demandes* explicitées au début du traité est *que l'on puisse prendre l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité infiniment petite* [p. 3]. Rolle objecte qu'avec de tels énoncés on est amené à considérer - au mépris de toute logique - que la partie est égale au tout ; et dans les calculs, les différentielles sont prises tantôt comme des zéros absolus, tantôt comme des quantités non nulles. La nécessité d'introduire les différentielles d'ordre supérieur fragilise encore plus l'édifice ; ainsi les différentielles d'ordre deux sont les quantités infiniment petites dont croissent les différentielles d'ordre un (lesquelles sont déjà des infiniment petits). Et Rolle refuse cette hiérarchie des infinis dont il met en doute l'existence.

Pierre Varignon s'est rangé dans le camp des défenseurs du calcul leibnizien. À l'été 1697, une des ses lettres à Jean Bernoulli témoigne de la vigueur de la polémique

> *M. le Marquis de l'Hospital est encore à la campagne de sorte que je me trouve seul ici chargé de la défense des infiniment petits, dont je suis le vray martyr tant j'ay desja soutenu d'assauts pour eux contre certains mathématiciens du vieux stile, qui chagrins de voir que par ce calcul les jeunes gens les attrapent et même les passent, font tout ce qu'ils peuvent pour la décrier* ... [Johann Bernoulli 1988, p. 124]

Rolle finira par rendre les armes et la querelle s'apaisera après 1706. Un nouveau traité est publié en 1708, intitulé l'*Analyse démontrée*, il est l'œuvre de Charles René Reyneau, il connaîtra une deuxième édition sans grands changements en 1736-1738. Un premier volume est consacré à l'algèbre et à ses applications géométriques. Le calcul différentiel et intégral n'intervient que dans le second volume. L'Hospital plaçait la définition de la différentielle au tout début de son traité, Reyneau procède de façon beaucoup plus progressive. Il utilise d'abord les infiniment petits sans avoir recours au formalisme du calcul différentiel, il obtient ainsi la tangente à la cycloïde, il étudie le pendule isochrone, et dans un long plaidoyer il développe un point de vue que Leibniz lui-même avait déjà produit face à ses contradicteurs : le nouveau calcul consiste seulement à démontrer directement ce que les Anciens obtenaient par une double réduction à l'absurde ; la modification porte sur la forme du raisonnement mais elle n'ôte rien à sa légitimité. Une notion de *variable* (ou *changeante*) est introduite, elle est ancrée dans la géométrie, c'est une quantité *qui augmente insensiblement ou qui diminue insensiblement dans la formation des lignes et des figures* [Reyneau 1738, p. 152]. La différentielle (appelée plutôt *différence*) est alors *l'augmentation ou la diminution infiniment petite que reçoit une quantité changeante à chaque instant par une vitesse quelconque, dans la formation d'une ligne ou d'une figure* [p. 152]. La notion dépend donc de la géométrie ; elle fait aussi appel à l'idée de mouvement et il y a peut-être là, chez l'auteur, la trace des apports newtoniens, mais le formalisme et les calculs qui suivent restent fondamentalement dans la lignée de Leibniz. Reyneau introduit des éléments de calcul intégral. Les quantités transcendantes sont le plus souvent classées suivant leur signification géométrique, telle intégrale dépend en dernier ressort de la quadrature du cercle, telle autre de la quadrature de l'hyperbole. Quelques exemples d'équations différentielles sont traités, en liaison avec des problèmes géométriques ou physico-mathématiques. Outre ce contexte géométrique il faut noter la présence des développements en séries entières, introduites dès la fin du premier volume. Celles-ci sont parfois présentées comme des *approximations* utilisées à défaut d'une expression exacte, mais cela ne les empêche pas de jouer un rôle théorique ; ainsi, après avoir défini les logarithmes à l'aide de l'hyperbole, Reyneau utilise les séries pour démontrer la propriété fondamentale

$$\log a + \log b = \log(ab).$$

Les techniques infinitésimales utilisées par Newton n'ont pas connu le même type de diffusion. Les *rapports ultimes des quantités évanescentes* sont utilisés dans les *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, œuvre magistrale publiée en 1687, ils interviennent dans un cadre et une forme qui relèvent de la géométrie classique. Le nom de Newton est aussi attaché à la méthode des fluxions ; tout en poursuivant les mêmes objectifs, elle met en œuvre un symbolisme très différent de celui de Leibniz. Elle est présentée notamment en annexe d'un traité d'optique en 1704. Le traité *De Methodus Serierum et Fluxionem*, écrit en 1671, a fait l'objet d'abord d'une diffusion restreinte et c'est sa traduction anglaise en 1736 qui donnera lieu à la première publication imprimée. Newton a énoncé la formule du binôme dans une lettre du 13 juin 1676, adressée au secrétaire de la Royal Society qui était chargé de la transmettre à Leibniz ; il s'agissait de prendre date pour une découverte dont on trouvera une trace imprimée en 1685, dans un traité d'algèbre dû à Wallis. Enfin, c'est avec le formalisme et le langage des fluxions, que Brook Taylor établit la formule qui porte aujourd'hui son nom et qui - avec une notation actuelle - donne le développement de $f(x+h)$ selon les puissances croissantes de h. Elle apparaît dans la *Methodus incrementorum directa et inversa*, partiellement consacrée au calcul des différences finies et publiée en 1715.

On sait que des querelles de priorité se sont développées au début du $18^{\text{ème}}$ siècle entre les partisans de Newton et ceux de Leibniz, mais, pour notre propos il est surtout intéressant de noter que les travaux des deux mathématiciens sont concernés par la critique développée en 1734 par George Berkeley. Depuis les écrits de Rolle, trente ans se sont écoulés, les méthodes infinitésimales ont eu le temps de faire leurs preuves et d'accumuler des résultats spectaculaires et incontestables. Berkeley ne va pas mettre en cause les résultats obtenus ; des critiques de Rolle, il va retenir celles qui concernent les objets sur lesquels porte le calcul. Ces objets ne sont pas conçus clairement. On ne peut pas établir des équations sous l'hypothèse que des incréments sont différents de zéro et dire ensuite que ces équations subsistent quand les incréments sont nuls. Une démarche qui se fonde sur des principes aussi obscurs ne peut pas être exempte d'erreurs. Berkeley avance la thèse de la compensation des erreurs et sur quelques exemples, il tente de montrer que des résultats exacts n'ont été obtenus que parce que les erreurs commises se sont finalement compensées. L'ouvrage de Berkeley (intitulé *The Analyst; or, a discours addressed to an infidel mathematician*) a une visée philosophique et théologique. La polémique reste parfois sur ce plan, ainsi, dans la préface de la traduction française de la *Methodus Serierum et Fluxionem*, Buffon fait part de son indignation

> *On était tranquille depuis plusieurs années, lorsque du sein même de l'Angleterre il s'est élevé un Docteur ennemi de la Science qui a déclaré la Guerre aux Mathématiciens ; ce Docteur monte en Chaire pour apprendre aux Fidèles que la Géométrie est contraire à la Religion [...] selon lui le Calcul de l'Infini est un mystère plus grand que tous les mystères de la Religion.* [Newton 1740, p. xxxv]

Mais les critiques de Berkeley seront souvent prises au sérieux. Sur le continent, le thème de la compensation des erreurs sera évoqué jusqu'à la fin du $18^{\text{ème}}$ siècle par des mathématiciens comme Lagrange ou Carnot, sans que cela conduise, il est vrai, à des apports fondamentaux. En Grande Bretagne, l'émoi est plus immédiat et plus profond. Par exemple, en 1736, lorsque Colson réalise la traduction anglaise de la *Methodus*, il assure dans la préface qu'il a tenté de satisfaire l'auteur de l'*Analyst* et de trouver des remèdes aux principales difficultés soulevées. Mais l'œuvre la plus conséquente suscitée par la critique de Berkeley est sans doute *The Treatise of Fluxions* publié en 1742 par Maclaurin. L'auteur déploie beaucoup d'efforts pour éviter le recours aux infinitésimaux dans les démonstrations. La référence au temps et au mouvement, inévitable dans la tradition newtonienne, est dûment rapportée à des axiomes liminaires. Les résultats fondamentaux sont obtenus par une double réduction à l'absurde, *à la manière des Anciens.*

Mais, à regarder de près le nouveau calcul hérité de Leibniz et de Newton, les difficultés liées à la manipulation de l'infini ne se posent pas seulement à propos des différentielles ou des quantités évanescentes ; des problèmes importants sont soulevés à propos des séries infinies dont le nouveau calcul fait un usage systématique. Par exemple, pour obtenir la formule qui va porter son nom, Taylor s'appuie sur une formule finie dont il fait croître indéfiniment le nombre de termes. Dans de nombreux autres cas, des séries sont obtenues par des moyens algébriques qui restent occultés dans l'écriture définitive ; ainsi une division suivant les puissances croissantes sera invoquée pour aboutir à une écriture où le reste de la division ne figure pas [2]

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

et l'on sera amené à s'interroger, *a posteriori*, sur les résultats paradoxaux auxquels cette écriture peut conduire si l'on pose $x = 1$

$$\frac{1}{1+1} = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0$$

$$\frac{1}{1+1} = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1.$$

Certains résultats sont obtenus en faisant fi de toute frontière entre le domaine des polynômes et celui des séries entières. Euler est particulièrement concerné. Dans un mémoire écrit dès 1735, il applique des résultats connus sur les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme, pour traiter l'équation $sinx = 1$; en mettant cette équation sous la forme

$$0 = 1 - x + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \cdots$$

et en utilisant les solutions $(-1)^k \frac{2k+1}{2}\pi$ (en quantité infinie) il démontre des relations telles que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\ [3].$$

Malgré les interrogations qu'elles suscitent parfois, de telles pratiques vont rester très présentes dans les mathématiques du 18$^{\text{ème}}$ siècle.

Le foisonnement des écrits de Leonhard Euler, la richesse et la variété de ses inventions vont bousculer le paysage du nouveau calcul, irriguer le champ des investigations possibles et créer un terrain inépuisable de questions et de méthodes nouvelles sur lequel le calcul infinitésimal se constituera en une discipline autonome, initialisée par un ouvrage en deux volumes, *Introductio in Analysin infinitorum* publié en

[2] Voir [Leibniz 1989, p. 436-450], [Varignon 1715].

[3] [Euler 1740b].

1748. Euler est à ce moment là directeur de la classe de mathématiques de l'Académie de Berlin, poste qu'il occupera jusqu'à son départ en 1766 pour retourner à l'Académie de Saint Petersbourg.

Il faut souligner ici le rôle stimulant de ces Académies qui donnent aux savants un cadre dans lequel ils peuvent s'occuper en toute sérénité de leurs recherches, et sont en capacité d'en diffuser les résultats au monde savant par des publications régulières. Bien plus, les Académies vont elles mêmes susciter les recherches innovantes en attribuant des prix après la mise au concours des questions les plus débattues de l'époque. Ainsi, D'Alembert, membre de l'Académie royale des sciences de Paris depuis 1741, et qui avait acquis une certaine notoriété à la suite de la publication, en 1743, de son célèbre *Traité de dynamique,* allait gagner le prix du premier concours organisé par l'Académie de Berlin sur une question concernant *la cause générale des vents*[4]. Ce qui entraîna une précieuse correspondance avec Euler et une publication d'une partie importante des travaux de D'Alembert par l'Académie de Berlin. La réputation d'Euler incita également le jeune Lagrange, isolé à Turin, à entamer avec lui une correspondance scientifique. Joseph Louis Lagrange n'a que dix-huit ans lorsqu'il envoie sa première lettre à Euler le 28 juin 1754 pour lui communiquer une étude sur l'analogie formelle existant entre le développement du binôme $(a+b)^n$ et la différentielle d'un produit du type $d^n(xy)$. Il communique aussi ce résultat [Lagrange 1754] à son compatriote G.C. da Fagnano (1682-1766). Malheureusement il apprend rapidement que cette analogie a déjà été relevée par Leibniz dès 1695. Lagrange en est confus mais cela n'altére pas l'estime d'Euler et les deux hommes vont correspondre régulièrement, constituant *un témoignage d'une valeur exceptionnelle sur l'évolution des relations personnelles entre deux des savants les plus éminents de la période 1754-1775*[5]. Lorsqu'Euler quitte l'Académie de Berlin pour retourner à Saint Petersbourg en 1766, c'est Lagrange qui est choisi pour lui succéder comme directeur de la classe de mathématiques, poste qu'il occupera jusqu'en 1787. D'Alembert a beaucoup contribué à ce « recrutement » ; le 25 avril 1766, il écrit d'ailleurs à Lagrange

[4] Voir [Taton 2000, p. 263].

[5] [*Ibid.*, p.284].

le roi de Prusse me charge de vous écrire que, si vous voulez venir à Berlin pour y occuper une place dans l'Académie, il vous donne 1500 écus de pension qui font 6000 livres argent de France ... Voyez si cette proposition vous convient : je le désire beaucoup et je serais charmé d'avoir fait faire à un grand roi l'acquisition d'un grand homme [Lagrange, *Œuvres* XIV, p. 61].

À Berlin, Lagrange publiera une soixantaine de mémoires sur toute sorte de sujets : théorie des nombres, algèbre, astronomie et bien sûr calcul différentiel et intégral. En particulier, il reprendra l'analogie soulignée par Leibniz, dans un important mémoire publié en 1774 sous le titre *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables* [Lagrange 1774] ; ce mémoire peut être aussi considéré comme le point de départ d'une tentative de fondement du calcul infinitésimal sans recours à l'idée d'infini. Son aboutissement sera la *Théorie des fonctions analytiques,* étape fondamentale dans l'algébrisation de l'analyse, et qui devait pour son auteur résoudre les problèmes de cohérence posés par le nouveau calcul.

Alors que celui-ci continue à montrer toute sa fécondité, de nombreux travaux vont également se poursuivre pour en donner un exposé qui mette ses fondements à l'abri des critiques. On sait que cet objectif ne sera pleinement atteint que dans la deuxième moitié du $19^{\text{ème}}$ siècle. Entre temps, Cauchy aura imposé de ne manipuler que des expressions qui puissent avoir une interprétation numérique (en écartant par exemple les calculs sur des séries divergentes), puis plusieurs mathématiciens auront fourni des constructions de l'ensemble des nombres réels, tandis que s'imposera une définition des limites en (ε, η) à la Weierstrass.

Chapitre II

EULER ET LES FONDEMENTS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

Leonhard Euler (1707-1783) a profondément marqué la plupart des domaines mathématiques au $18^{\text{ème}}$ siècle. Il a exercé son activité successivement à l'Académie de Saint Petersbourg (1727-1741), puis à celle de Berlin (1741-1766), avant de retourner à Saint Petersbourg. En analyse, nous lui devons une partie importante des notations et de la terminologie employées aujourd'hui. C'est pendant son séjour à Berlin qu'il a publié les deux traités qui présentent ses conceptions fondamentales sur le calcul différentiel.

L' *INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM*, ET LE CONCEPT DE FONCTION

L'*Introductio in analysin infinitorum* qu'Euler publie en 1748 marque un tournant dans l'histoire du calcul différentiel et intégral en ce qu'il rompt l'ancrage de celui-ci dans les figures géométriques qui donnaient jusque là sens et consistance aux outils du calcul. Ces outils étaient jusqu'à présent essentiellement fournis par l'algèbre ou *Art analytique* comme la désigne Viète dans son ouvrage majeur *In Artem Analyticum Isagoge.* Cet *Art analytique* consiste à pouvoir mettre tout problème en équations et à ramener ainsi la géométrie à des méthodes de résolution de ces équations. Tout au long du $17^{\text{ème}}$ siècle et du début du $18^{\text{ème}}$, particulièrement sous l'impulsion de Descartes, les géomètres développent cette *analyse* là, consistant à

> *exprimer les lignes et les figures par les caractères familiers de l'alphabet, et de réduire ces expressions à un calcul facile qui exprimât aussi tous les rapports simples et composés que peuvent avoir ces lignes et ces figures* [Reyneau 1708, p. ij].

L'invention du calcul infinitésimal élargit cette méthode aux éléments infinitésimaux, non sans difficultés, car dépassant *a priori* les possibilités d'une intuition géométrique et figurée

> *On ne pensait pas à trouver des expressions à ces espaces qui étaient trop petits pour avoir un rapport déterminé avec ceux auxquels convenaient les expressions ordinaires* [p. iv].

Un titre comme celui du traité de Guillaume de L'Hospital, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* [1696], reflète bien cette difficulté en ce que son auteur éprouve la nécessité d'ajouter au mot *analyse* une référence supplémentaire et explicite aux éléments infinitésimaux, sur lesquels il doit fonder son calcul différentiel. Mais si chez Euler la référence à l'infini subsiste, par contre celle qui concerne *l'intelligence des lignes courbes* a disparu, et avec elle la référence à la géométrie. Cela ne veut pas dire que l'analyse est désormais coupée de la géométrie, mais seulement qu'il y a un renversement dans la hiérarchie des disciplines. Au lieu *d'exprimer les lignes et les figures par les caractères familiers de l'alphabet et de réduire ces expressions à un calcul ...*, Euler va d'abord développer dans un premier volume le calcul des quantités numériques et algébriques par l'intermédiaire de l'étude des fonctions, l'étude des courbes géométriques interviendra dans un second volume. Le calcul différentiel proprement dit n'intervient dans aucun des deux traités. Il fera l'objet d'un traité ultérieur.

L'innovation que représente le premier volume ne réside pas seulement dans sa rupture avec la géométrie, mais dans l'élaboration et le développement de deux concepts abstraits et formels, permettant d'inscrire l'analyse dans une démarche purement logique et déductive. Ces deux concepts sont la *variable* et la *fonction*.

Auparavant, la notion de variable renvoyait à une quantité géométrique continûment croissante ou décroissante, telle que abscisse,