HANDBUCH DER PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON

S. FLÜGGE

BAND II

MATHEMATISCHE METHODEN II

MIT 98 FIGUREN

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1955

PRINTED IN GERMANY

DRUCK DER UNIVERSITÄTSDRUCKEREI H. STÜRTZ AG., WÜRZBURG

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Algebra. Von Dr. GOTTFRIED FALK, Privatdozent für Theoretische Physik an der Technischen Hochschule Aachen (Deutschland) 1

A. Grundbegriffe und Definitionen 4
B. Polynomringe 26
C. Lineare Algebra 39
D. Gruppendarstellungen 62
I. Allgemeine Darstellungstheorie (insbesondere endlicher Gruppen) 62
II. Die Darstellungen der 3-dimensionalen Drehgruppe $\mathfrak{d}_3$ 75
E. Algebra und ihre Darstellung 85
Anhang: Algebra und Mechanik 108
Literatur 115

Geometrie. Von Dr. HORST TIETZ, Privatdozent für Mathematik an der Technischen Hochschule Braunschweig (Deutschland). (Mit 15 Figuren) 117

A. Analytische Geometrie 117
I. Der Anschauungsraum 117
II. n-dimensionale Geometrie und Matrizenrechnung 125
a) Der affine Raum 125
b) Der euklidische Raum 131
III. Projektive Geometrie 139
B. Elementare Differentialgeometrie 146
I. Kurventheorie 146
II. Flächentheorie 148
a) Erste Fundamentalform 148
b) Die zweite Fundamentalform 150
c) Geodätische Größen 154
C. Elementare Feldtheorie 157
D. Höhere Geometrie 163
I. RICCI-Kalkül 163
a) Der allgemeine Raum X_n 163
b) Der affin-zusammenhängende Raum A_n 172
c) Metrische Räume 177
II. Spinoren 187
III. Geometrie der Berührungstransformationen 192
Literatur 196

Functional Analysis. By Dr. I. N. SNEDDON, Professor of Mathematics at the University College of North Staffordshire, Stoke on Trent (Great Britain). (With 6 figures) . . 198

A. Integration and Abstract Spaces 198
I. Introduction 198
a) Introductory Remarks 198
b) Integration 199
c) The LEBESGUE Spaces L_p 203
II. BANACH Space 205
a) The Theory of BANACH Space 205
b) Integral Transforms 212

Seite

B. Integral Transforms 216

I. The LAPLACE Transforms 216

a) The LAPLACE-STIELTJES Transform and the LAPLACE Transform 217
b) Elementary Rules of Manipulation of the LAPLACE Transform 222
c) The DIRAC Delta Function 229
d) Inversion Formulae for the LAPLACE Transform 235
e) Asymptotic Properties 241
f) The Bilateral LAPLACE Transform 243
g) Double LAPLACE Transform 245

II. The FOURIER Transforms 266

a) FOURIER Transforms 266
b) FOURIER Sine and Cosine Transforms 271
c) Formal properties of FOURIER Transforms 273
d) Multiple FOURIER Transforms 278
e) Applications of FOURIER Transforms 280
f) FOURIER Transforms in Quantum Mechanics 288

III. The MELLIN Transform 290

a) Definition and Elementary Properties of the MELLIN Transform 290
b) The Inversion Theorem for the MELLIN Transform 293
c) Applications of the MELLIN Transform 294

IV. The HANKEL Transform 298

a) The HANKEL Inversion Theorem 298
b) Other Forms of FOURIER-BESSEL Integral Theorem 300
c) Properties of the HANKEL Transform 300
d) The Relation between HANKEL and FOURIER Transforms 302

V. Finite Transforms 307

a) Finite FOURIER Transforms 308
b) The Finite HANKEL Transforms 314
c) The Finite LEGENDRE Transforms 319

VI. Approximate methods of Evaluating integral Transforms 325

C. HILBERT Space 330

a) Abstract HILBERT Space 331
b) Integral Transforms in HILBERT Space 336

D. SCHWARTZ's Theory of Distributions 340

E. Variational Methods in Functional Analysis 345

Bibliography 347

Numerische und graphische Methoden. Von Professor Dr. L. COLLATZ, Direktor des Mathematischen Seminars und Leiter des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Hamburg (Deutschland). (Mit 51 Figuren) 349

A. Allgemeine Hilfsmittel 349

I. Zahlenrechnen und Rechenstäbe 349
II. Nomographie 352
III. Ausgleichsrechnung 361

B. Praktische Gleichungslehre 370

I. Gleichungen mit einer Unbekannten 370
II. Eliminationsverfahren bei linearen Gleichungssystemen 383
III. Iterationsverfahren und nicht lineare Gleichungssysteme 389

C. Differenzenrechnung, Interpolation und Integration 399

I. Differenzenrechnung und Interpolation 399
II. Angenäherte Integration 404
III. Trigonometrische Interpolation 411

Seite

D. Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen . . . 415
I. Graphische Verfahren bei gewöhnlichen Differentialgleichungen . . . 415
II. Numerische Verfahren bei gewöhnlichen Differentialgleichungen . . . 417
III. Anfangs- und Anfangsrandwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen 429

E. Rand- und Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen . . . 436
I. Einige allgemeine Methoden . . . 436
II. Differenzenverfahren . . . 444
III. RITZsches und TREFFTZsches Verfahren . . . 452
IV. Einige spezielle Verfahren bei Eigenwertaufgaben . . . 458

F. Integral- und Funktionalgleichungen . . . 463
I. Einige allgemeine Methoden . . . 463
II. Spezielle Typen von Integralgleichungen . . . 465

Literatur . . . 470

Moderne Rechenmaschinen. Von Dr. phil. habil. H. BÜCKNER, Mathematician, General Electric Comp. Schenectady (USA). (Mit 26 Figuren) . . . 471
Einleitung . . . 471
I. Analogiemaschinen . . . 472
II. Programmgesteuerte Ziffernmaschinen . . . 480
Literatur . . . 497

Sachverzeichnis (Deutsch-Englisch) . . . 499

Subject Index (English-German) . . . 510

Algebra.

Von

G. Falk.

Algebra und Physik haben erst in neuester Zeit engere Berührung gefunden. Jedoch erfolgt die Annäherung zögernd und nicht ohne eine gewisse Reserve von seiten der traditionellen Physik. Es lassen sich leicht Gründe dafür angeben, und zwei scheinen besonders einleuchtend: Die Grundaufgabe der Physik ist die Untersuchung *konkreter* natürlicher Sachverhalte, während es der Algebra um die Durchleuchtung der *formalen* inneren Struktur von Gegenstandsbereichen geht, deren konkrete Züge im allgemeinen gar nicht interessieren. Ein zweiter nicht unwesentlicher, wenn auch scheinbar oberflächlicher Grund ist der, daß die Algebra über keinen durchgängigen Kalkül im Sinne des rechnenden Physikers verfügt, sondern daß ihr methodischer Wesenskern aus einer ungewohnt abstrakten und begrifflichen Denkweise besteht.

Die beiden Gründe lassen Stärke und Schwäche der Algebra als Hilfsmittel für die Physik deutlich genug erkennen. Für konkrete Einzelprobleme, die sich mit dem Kalkül der Analysis behandeln lassen, wird man sie selten verwenden; ihre Methoden werden sich vielmehr erst da nützlich erweisen, wo ein Durchblick durch die Struktur einer Theorie ein besonders rationelles oder das einzige Mittel zur Gewinnung genereller Aussagen ist. Gerade die moderne Physik hat die Zweckmäßigkeit solcher Betrachtungen erwiesen und gezeigt, daß auch die in physikalischen Theorien beschriebenen *Beziehungen* zwischen den (physikalischen) Größen sich *formal* charakterisieren lassen und somit als Untersuchungs- und Anwendungsgebiet der axiomatischen Algebra gelten können. Unter diesem Gesichtswinkel wird auch der „utilitaristisch“ gesinnte Physiker ihre Hilfe nicht verschmähen.

1. Form und Inhalt. Die Algebra läßt sich weniger als die anderen in der Physik verwendeten mathematischen Disziplinen durch eine kompendiöse Sammlung von Einzeltatsachen oder gar Formeln so weit beschreiben, daß man genügend feste Anhaltspunkte zur selbständigen Verwendung finden würde. Da überdies die Begriffswelt der modernen Algebra nicht als bekannt vorausgesetzt werden kann, ist die Form der Darstellung insoweit vorgezeichnet, als sie eine Erläuterung der heutigen algebraischen Terminologie in hinreichend ausführlicher Weise enthalten muß. Nach bewährtem Vorbild ist diese in einem Kapitel vorweggenommen, das somit als Voraussetzung für alle übrigen anzusehen ist. Diese selbst sind dann weitgehend unabhängig voneinander lesbar. Im übrigen sind deduktive Abhängigkeiten angegeben. Die Ausführlichkeit des Textes ist in den einzelnen Kapiteln verschieden und nach dem Kenntnisstand bemessen, der nach der heutigen mathematischen Ausbildung im Durchschnitt vorausgesetzt werden kann. Hauptbestreben war es, durch Erklärungen einerseits und auf Übersichtlichkeit abzielende Kürze der Darstellung andererseits die Möglichkeit einer (relativ) schnellen Informierbarkeit zu schaffen, ein Ziel, das (wenn überhaupt) nicht immer ohne Opfer zu erreichen war.

Der Inhalt des vorliegenden Artikels muß sich notwendigerweise auf die Teile der Algebra beschränken, die mit der Physik in Berührung gekommen sind. Für den Mathematiker bedeutet dies eine Auswahl aus dem (für ihn) klassischen Bestand der Algebra. So folgt nach der Erklärung der ständig verwendeten Grundbegriffe ein kurzes Kapitel (B) über Polynomringe. Dabei wird besonderer Wert auf die Erklärung des algebraischen Polynombegriffes gelegt und dieser mit relativ breiter Ausführlichkeit behandelt, während die Teilbarkeitstheorie sowie die Theorie der algebraischen Körpererweiterungen und damit die Theorie der algebraischen Gleichungen völlig beiseite gelassen werden. Erfahrungsgemäß empfindet der Physiker diese Teile der Algebra ohnehin als Belastung. Kapitel C enthält die lineare Algebra, deren sachlicher Inhalt wohl als weitgehend bekannt angesehen werden kann und die deshalb in etwas strafferer Form gebracht werden konnte. Im Anschluß daran bringt Kapitel D, Abschnitt I die Darstellungstheorie der Gruppen (insbesondere der endlichen Gruppen), und zwar nach der Methode von I. SCHUR. Die Wahl dieser Methode erfolgte vor allem wegen ihrer Einfachheit und leichten Zugänglichkeit auch für denjenigen, der sich nicht erst mit dem umfangreichen Begriffsapparat der Algebren-Theorie beschäftigen will. Von den Darstellungen kontinuierlicher Gruppen werden (Abschnitt II) nur die der 3-dimensionalen Drehgruppe behandelt. Diese Beschränkung (die im Hinblick auf physikalische Zwecke gar nicht einmal so einschränkend wirkt) bedarf in Anbetracht des Umfanges einer systematischen Behandlung des Gebietes wohl kaum einer Erklärung. Kapitel E schließlich bringt eine Einführung in die Theorie der Algebren. Dieses Kapitel ist gegenüber den anderen (wohl merklich) breiter geschrieben, um dem Eindringen Verständnis-Hindernisse möglichst aus dem Wege zu räumen. Die Betonung, die das Kapitel dadurch erhält, findet ihre Erklärung einmal darin, daß die Algebren-Theorie wohl als ein besonders typisches Teilgebiet der Algebra anzusehen ist, zum anderen in einem Hinweis auf den Anhang.

Schließlich noch einige Hinweise: Der Begriff „Menge" (von irgendwelchen Gegenständen, wie Zahlen, Ring- oder Gruppen-Elementen usw.) wird in völlig naiver Weise gebraucht und alle damit verbundene mathematische Problematik vermieden. Das Wort „Bereich" bezeichnet im allgemeinen eine Menge, zwischen deren Elementen noch irgendwelche Relationen erklärt sind, kurz eine „Menge mit Struktureigenschaften". Zur Bezeichnung von *Mengen* werden *deutsche Buchstaben* verwendet. Mengen, die *Körper* im algebraischen Sinne sind (Ziff. 4), werden auch mit *großen griechischen* Lettern bezeichnet. *Kleine Buchstaben* (lateinische wie griechische) werden zur Bezeichnung von *Elementen* der Mengen verwendet.

Unter dem *Durchschnitt* zweier Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ versteht man die Gesamtheit derjenigen Elemente, die sowohl zu $\mathfrak{A}$ als auch zu $\mathfrak{B}$ gehören. Die Relation „a ist Element der Menge $\mathfrak{A}$" wird ausgedrückt durch das Symbol $a \in \mathfrak{A}$, und die Relation „die Menge $\mathfrak{A}$ ist in der Menge $\mathfrak{B}$ enthalten" (d.h. alle Elemente von $\mathfrak{A}$ gehören auch zu $\mathfrak{B}$) durch $\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{A}$ *echt* in $\mathfrak{B}$ enthalten, d.h. gibt es in $\mathfrak{B}$ Elemente, die nicht zu $\mathfrak{A}$ gehören, so schreibt man: $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$.

2. Der algebraische Zahlbegriff. Die Wurzel der Algebra ist der Begriff der Zahl, und zwar die Zahl als Element eines Bereiches, in dem man nach bestimmten, vorgegebenen Regeln rechnen kann. Die Regeln beziehen sich dabei auf Operationen, die als Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division bekannt und so geläufig sind, daß ein besonderer Hinweis auf sie oft eher langweilig als belehrend wirkt. Wie geläufig das formale Operieren nach diesen Regeln eines vertrauten Kalküls ist, erhellt besonders durch eine häufig beobachtete Erfahrung: Bei

Einführung der komplexen Zahlen durch die Rechenregel $i^2 = -1$ hat der Anfänger fast nie nennenswerte Schwierigkeiten zu überwinden, obwohl i gar keine Zahl ist, die in den Bereich der ihm vertrauten Zahlen fällt. Es kostet im Gegenteil manchmal sogar Mühe klarzumachen, daß hier eine Begriffsschwierigkeit vorliegt. Analogen Situationen sieht sich der Lernende in der Algebra manchmal gegenüber. Dabei kann er sich nicht immer des Eindrucks erwehren, daß triviale Sachverhalte durch sorgfältige Formulierungen zu objektiver Bedeutung erhoben werden sollen. Es erfordert schon einige Erfahrung und einen gewissen Überblick, um die Reichweite mancher Aussagen richtig einzuschätzen.

Eine Zahl im gewöhnlichen Sinn ist ein Element des Bereiches aller reellen (oder auch aller komplexen) Zahlen. Diese Beschreibungsweise, die eine Zahlgesamtheit vor das Einzelexemplar setzt, soll darauf hinweisen, daß die Betrachtung solcher *Gesamtheiten* der Schlüssel zum Verständnis des algebraischen Zahlbegriffs und der „modernen" Algebra überhaupt ist. Genauer handelt es sich um die Kennzeichnung derjenigen (formalen) Eigenschaften solcher Bereiche, die für bestimmte mathematische Zwecke wesentlich sind. So entfaltete z.B. die Zahlentheorie ihre größte Wirksamkeit erst, als man den „konkreten" Inhalt des Zahlbegriffes (nämlich im vertrauten Sinn reell zu sein) zurückzudrängen gelernt hatte zugunsten der primären Eigenschaft der Zahl, Element eines (allgemeinen) „Körpers" oder „Ringes" zu sein.

Einige wesentliche Eigenschaften des reellen Zahlenbereiches lassen sich folgendermaßen beschreiben[1]:

1. Man kann in ihm unbeschränkt (d.h. *jede* Zahl zu *jeder*) addieren und ebenso subtrahieren.

2. Man kann jede Zahl mit jeder multiplizieren und (außer durch die Null) dividieren.

3. Die reellen Zahlen lassen sich anordnen, d.h. es gibt eine eindeutige Größer-Beziehung zwischen ihnen.

4. In dem Bereich der reellen Zahlen läßt sich ein Umgebungsbegriff (und mit ihm ein Stetigkeitsbegriff) erklären.

Fragen wir nach typischen Eigenschaften des Bereiches der *komplexen* Zahlen, so verliert 3. seinen Inhalt, läßt sich aber durch eine andere Eigenschaft ersetzen: Jeder komplexen Zahl läßt sich ihr Betrag, d.h. eine reelle Zahl zuordnen, und für diese Zuordnung gelten kennzeichnende Rechenregeln (als bekannteste die sog. Dreiecksungleichung).

Dem Bereich der rationalen Zahlen kommen nur die Eigenschaften 1., 2. und 3. zu, dagegen nicht 4. Vollziehen wir schließlich den Schritt zu den ganzen Zahlen, so bleiben 1. und 3. und von 2. die Möglichkeit unbeschränkter Multiplikation, dagegen nicht die der Division. Alle genannten Zahlbereiche haben, wie wir sehen, nur die Eigenschaften 1. und 2. (eventuell ohne die Möglichkeit unbeschränkter Division) gemeinsam. Es erscheint daher einleuchtend, daß man sich in der Algebra primär für diese Eigenschaften interessiert, wogegen die übrigen in ihrer Bedeutung zunächst zurücktreten. Man nennt übrigens die durch 1. und 2. ausgedrückten Eigenschaften „Verknüpfungen"[2], die durch 3. und 4. ausgedrückten Eigenschaften nennt man die der „Anordnung" und der „Umgebung".

[1] Man beachte, daß in Formulierungen, die auf die *Elemente* eines Bereiches Bezug nehmen, die *Bereichs*-Eigenschaft in Worten wie „jedes", „alle" usw. enthalten ist.

[2] Unter einer *Verknüpfung* versteht man eine Zuordnung von je zwei Elementen eines Bereiches zu einem dritten Element desselben Bereiches.

3. Die axiomatische Methode. Es wurde bereits gesagt, daß die Kennzeichnung der Zahlbereiche durch Postulierung formaler Eigenschaften erfolgt. Die Kennzeichnung der Struktur eines Bereiches durch seine inneren Eigenschaften ist aber Sinn und Aufgabe der Axiomatik; demnach handelt es sich darum, die unter 1. und 2. bezeichneten Verknüpfungseigenschaften axiomatisch zu formulieren. Dies geschieht folgendermaßen:

Mit $a, b, c, \ldots$ seien die Elemente eines Bereiches $\mathfrak{B}$ (in Zeichen: $a, b, c, \ldots \in \mathfrak{B}$) bezeichnet. In $\mathfrak{B}$ gibt es

(I) Eine Verknüpfung, *Addition* genannt, welche zwei beliebigen Elementen $a, b \in \mathfrak{B}$ eindeutig ein drittes Element $(a+b) \in \mathfrak{B}$ zuordnet. Für diese Verknüpfung gelten die Regeln

$$\left.\begin{array}{lll} \text{a) Assoziatives Gesetz:} & a+(b+c)=(a+b)+c \\ \text{b) Lösbarkeit der Gleichung:} & a+x=b \\ \text{c) Kommutatives Gesetz:} & a+b=b+a \end{array}\right\} \text{ für alle } a, b, \ldots \in \mathfrak{B}.$$

Die unter b) geforderte Lösbarkeit der Gleichung $a+x=b$ bedeutet natürlich, daß bei beliebiger Wahl von $a, b \in \mathfrak{B}$ stets ein $x \in \mathfrak{B}$ existiert, so daß die Gleichung besteht.

(II) Es gibt eine zweite Verknüpfung, *Multiplikation* genannt, welche zwei beliebigen Elementen $a, b \in \mathfrak{B}$ eindeutig ein drittes Element $a \cdot b \in \mathfrak{B}$ zuordnet. Dabei gelten für alle Elemente von $\mathfrak{B}$ die Regeln

a) Assoziatives Gesetz: $a(bc) = (ab)c$

b) Lösbarkeit der Gleichung: $ax = b$ (für $a \neq 0$).

c) Kommutatives Gesetz: $ab = ba$

Schließlich bestehen die beiden genannten Verknüpfungen nicht unabhängig nebeneinander, sondern werden verbunden durch

(III) Das *Distributivgesetz:* $a(b+c) = ab + ac$.

Diesem Axiomensystem genügen sicher die oben genannten Zahlbereiche außer dem der ganzen Zahlen [bei welchem man das Axiom (IIb) fortlassen müßte]. Damit sind also bestimmte, Verknüpfungs-Eigenschaften wiedergebende Strukturzüge der genannten Zahlbereiche axiomatisch gekennzeichnet.

Es gibt nun im Prinzip zwei verschiedene Möglichkeiten, das axiomatische Interesse weiter zu verfolgen: Entweder untersucht man die durch das angegebene Axiomensystem definierten Strukturen und vergewissert sich über ihre mathematische Reichhaltigkeit, oder man sucht das Axiomensystem so zu erweitern, daß man etwa einen bestimmten „konkreten" Zahlbereich axiomatisch „vollständig" kennzeichnen kann (d.h. derart, daß alle Realisierungen des axiomatisch definierten Bereiches untereinander isomorph sind). In der Algebra verfolgt man, wie bereits gesagt, vornehmlich den ersten dieser beiden Wege, während der zweite (überdies mit dem Problem der „Vollständigkeit" eines Axiomensystems belastete Weg) demgegenüber an Interesse zurücktritt.

A. Grundbegriffe und Definitionen.

Im vorliegenden Kapitel werden die in der Algebra verwendeten Grundbegriffe und Termini definiert und erläutert. Sie werden im weiteren Verlauf der Darstellung durchgehend benutzt.

Den Axiomen (I), (II), (III) gilt das weitere Interesse. Bei Vorweisung eines Axiomensystems erheben sich primär zwei Fragen: 1. Die nach der Widerspruchsfreiheit und 2. die nach der Unabhängigkeit der Axiome. Die Klärung dieser beiden Fragen erfolgt in bekannter Weise so, daß man

1. zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit eine als widerspruchsfrei erkannte Realisierung (d.h. einen „konkreten" Größenbereich) angibt, welche die Axiome erfüllt;

2. zur Untersuchung der Abhängigkeit der Axiome weitere in sich widerspruchsfreie Realisierungen zu finden sucht, welche die Axiome bis auf eines erfüllen. Das nicht erfüllte Axiom ist dann sicher von den übrigen unabhängig, d.h. es kann nicht aus diesen hergeleitet werden[1].

Im vorliegenden Fall ist die Frage nach der Widerspruchsfreiheit praktisch bereits gelöst, denn wir sind überzeugt, daß das Rechnen in den angeführten Zahlbereichen (obwohl sie unendlich viele Elemente besitzen) niemals zu Widersprüchen führen wird. Wir werden jedoch weiter unten sehen, daß man sehr einfache Beispiele angeben kann, die nicht mit dieser „Unsicherheit des Unendlichen" behaftet sind. Die Frage nach der Abhängigkeit tritt gegenüber der der Widerspruchsfreiheit an Bedeutung zurück.

4. Körper. *Definition:* Jeder Bereich von Größen, zwischen denen zwei Verknüpfungen erklärt sind, welche den Axiomen (I), (II) und (III) genügen, heißt ein (kommutativer) *Körper.*

Wir beweisen zunächst einige einfache Folgerungen aus den Axiomen und beginnen mit den Axiomen (I) der Addition. Setzt man in (Ib) $b = a$, so folgt aus der postulierten Lösbarkeit der Gleichung $a + x = a$, daß es in jedem Körper ein Element geben muß, das sog. *Nullelement* 0, mit der Eigenschaft

$$a + 0 = a \quad \text{für jedes } a. \tag{4.1}$$

Setzt man nun in (Ib) $b = 0$, so sieht man, daß es zu jedem Element a eines Körpers ein *entgegengesetztes* oder *additiv-inverses* Element $(-a)$ geben muß mit der Eigenschaft

$$a + (-a) = 0. \tag{4.2}$$

Durch die Axiomengruppe (I) ist also die Existenz eines Nullelementes, sowie die eines additiv Inversen zu jedem Körperelement gesichert. Es fehlt noch der Nachweis, daß es nur *ein* Nullelement gibt und daß ebenso zu jedem Element ein *eindeutiges* additiv Inverses gehört. Angenommen, es gäbe zwei Nullelemente 0 und 0′, so würde wegen Gl. (4.1) sowohl

$$a + 0 = a \quad \text{als auch} \quad a + 0' = a$$

für jedes Element a des Körpers gelten, also auch für 0′ und 0 selbst. Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt damit aber $0' + 0 = 0'$, aus der zweiten $0 + 0' = 0$, und wegen des Kommutativitätsaxioms der Addition (Ic) folgt die Gleichheit der linken Seiten dieser beiden Gleichungen und somit $0' = 0$. Die Eindeutigkeit des Additiv-Inversen ist ebenso einfach zu beweisen und schließlich auch die Eindeutigkeit der Lösung der Gleichung unter (Ib); ihre eindeutige Lösung ist $x = b + (-a)$, was man auch kürzer als Differenz $x = b - a$ schreibt. Für die so definierte Subtraktion gelten analoge Regeln wie für die Addition.

Das Assoziativgesetz (Ia) besagt, daß hinsichtlich der Addition eine Klammersetzung überflüssig ist, und daß ein Ausdruck der Form

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \tag{4.3}$$

wo die a_k Elemente eines Körpers sind, einen eindeutig erklärten Sinn hat.

[1] Man beachte: Läßt sich eine widerspruchsfreie Realisierung angeben, in welcher nur ein Teil des Axiomensystems erfüllt ist, dagegen ein zweiter aus *mehreren* Axiomen bestehender Teil nicht, so läßt sich nur behaupten, daß sich jedes Axiom des zweiten Teiles (und jeder zugehörige Folgesatz) nicht aus dem ersten Teil des Axiomensystems folgern läßt. Dagegen kann es durchaus sein, daß *ein* Axiom des zweiten Teiles sich aus *allen* übrigen Axiomen des gesamten Axiomensystems folgern läßt, d.h. daß dieses Axiom nicht unabhängig ist.

Betrachten wir nun die Axiome (II) der Multiplikation, so springt sofort ihre formale Verwandtschaft mit den Axiomen (I) der Addition in die Augen; man braucht nur in (II) überall die multiplikative Verknüpfung durch die additive zu ersetzen, um die Axiome (I) zu erhalten. Hier ergibt sich bereits die Gelegenheit einer einfachen axiomatischen Schlußweise: Bei Nachweis der Existenz eines eindeutigen Nullelementes und eines eindeutigen additiv Inversen zu jedem Körperelement haben wir nur von den Axiomen (I) Gebrauch gemacht. Daß dabei das Verknüpfungszeichen ein Additionssymbol war, spielt für die Schlüsse keine Rolle. Wir können also (ebenso wie in den Axiomen) auch in den Schlüssen generell das Additionszeichen durch das Multiplikationszeichen ersetzen. Die fraglichen Elemente, deren Existenz und Eindeutigkeit damit bereits bewiesen ist, werden natürlich anders benannt. Dem Nullelement in Gl. (4.1) entspricht ein Element e mit der Eigenschaft

$$a e = a \tag{4.1'}$$

für alle Elemente a des Körpers. e heißt das *Einselement* des Körpers. Das Analogon zu Gl. (4.2) lautet

$$a(a^{-1}) = (a^{-1})\, a = e, \tag{4.2'}$$

wenn wir mit a^{-1} das *multiplikative Inverse* des Elementes a bezeichnen. Zu jedem Körperelement $a \neq 0$ gibt es genau ein multiplikativ Inverses. Das Analogon von (4.3) lautet

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \ldots a_n. \tag{4.3'}$$

Wir wollen uns hier mit diesem Beweis begnügen, da weiter unten (für Schiefkörper) ein analoger Beweis noch einmal explizite durchgeführt wird. Als erstes Ergebnis haben wir damit

Satz 1. *In einem Körper gibt es stets ein Null- und ein Einselement sowie zu jedem Element genau ein additiv und (außer zum Nullelement) ein multiplikativ Inverses.*

Aus dem Distributivgesetz (III) folgt durch Induktion

$$a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = a b_1 + \cdots + a b_n.$$

Ist a selbst eine Summe, so folgt ebenso

$$(a_1 + \cdots + a_m)(b_1 + \cdots + b_n) = a_1 b_1 + \cdots + a_m b_n.$$

Die Subtraktion ist ebenfalls distributiv:

$$a(b - c) = a b - a c.$$

Dies folgt direkt aus

$$a b = a(b - c + c) = a(b - c) + a c.$$

In Körpern gilt weiter

Satz 2. *Ein Produkt zweier Elemente ist in einem Körper dann und nur dann Null, wenn eines der beiden Elemente gleich Null ist.*

Der Beweis ist evident, denn es gilt

$$a 0 = a(a - a) = a a - a a = 0. \tag{4.4}$$

Andererseits sei $ab = 0$. Falls a und b gleich Null sind, ist nichts zu beweisen, ist a ungleich Null, so existiert a^{-1}, und durch Multiplikation mit a^{-1} folgt mit (4.4)

$$b = (a^{-1} a)\, b = a^{-1}(a b) = a^{-1} 0 = 0.$$

Beispiele. Neben den schon genannten Zahlkörpern sei auf den Körper der rationalen Funktionen einer Variablen oder den der algebraischen Funktionen hingewiesen. Besonders einfach und bemerkenswert sind die endlichen Körper, d.h. Körper mit endlich vielen Elementen (auch GALOIS-Felder genannt). Der einfachste Fall dieser Art ist der aus zwei Elementen bestehende Körper. Nach Satz 1 müssen diese beiden Elemente das Null- und das Einselement sein, wir nennen sie wieder 0 und e. Da es nur zwei Elemente gibt, lassen sich die Lösungen der Gleichung unter (Ib) leicht angeben; die vier möglichen Fälle lauten

$$0 + x = 0, \quad e + x = e, \quad 0 + x = e, \quad e + x = 0,$$

wobei als Lösungen x nur wieder die Elemente 0 und e in Betracht kommen. Man sieht sofort, daß in den beiden ersten Fällen $x = 0$ und in den letzten $x = e$ die (eindeutige) Lösung ist. Als auffällige Regel gilt also hier $e + e = 0$. Allgemein sind Summen aus einer geraden Anzahl von Gliedern e gleich Null und von einer ungeraden Anzahl gleich e. Daraus ist bereits zu vermuten, daß hier ein Zahlbereich vorliegt, dessen innere Struktur vom Rechnen modulo 2 im Bereich der ganzen Zahlen nicht unbekannt sein dürfte. Hinsichtlich der Multiplikation verhalten sich 0 und e wie die Zahlen 0 und 1. Die Gleichung unter (IIb) liefert die Fälle

$$e x = 0, \quad e x = e,$$

welche die Lösungen $x = 0$ und $x = e$ besitzen. Das Distributivgesetz bestätigt man schließlich ebenfalls durch Aufweisung aller Möglichkeiten, von denen allerdings nur diejenige nicht-trivial ist, in der das Nullelement nicht vorkommt:

$$e(e + e) = ee + ee = e + e = 0.$$

Dies ist tatsächlich eine richtige Beziehung, da auch die linke Seite nach Gl. (4.4) gleich Null ist.

Mit der Diskussion dieses Beispiels haben wir gleichzeitig die letzten (wegen der Unendlichkeit der anderen Beispiele) noch möglichen Zweifel an der Widerspruchslosigkeit des Axiomensystems (I), (II), (III) beseitigt, da wir nun einen Körper angegeben haben, bei dem sich die widerspruchslose Erfüllung der Axiome in endlich vielen Schritten nachweisen läßt.

Eine Menge K' von Elementen aus einem Körper aus K, die ihrerseits bereits die Axiome (I), (II), (III) erfüllt, nennt man einen *Unterkörper* von K. Der Unterkörper heißt *echt*, wenn es in K Elemente gibt, die nicht in K' enthalten sind, in Zeichen: $\mathsf{K}' < \mathsf{K}$. Man überzeugt sich schließlich, daß der Durchschnitt zweier Unterkörper wieder Unterkörper von K ist.

5. Schiefkörper. Mit dem Nachweis der Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems (I), (II), (III) folgt auch die Widerspruchsfreiheit derjenigen Axiomensysteme, die daraus durch Weglassen von einzelnen Axiomen entstehen. Dabei könnte höchstens der Fall eintreten, daß das Weglassen eines Axioms gegenstandslos ist, nämlich dann, wenn dieses Axiom aus den übrigen gefolgert werden kann, also von diesen nicht unabhängig ist.

Im folgenden soll das Kommutativitätsgesetz der Multiplikation fallen gelassen werden. Dazu bedarf es noch einer Vorbemerkung. Die Kommutativität hatte bereits eine Folge in der Schreibweise der Axiome, nämlich in der Gleichung unter (IIb) sowie in dem Distributivgesetz (III). Man sieht sofort, daß durch das Axiom (III) bei Nichtberücksichtigung der Kommutativität von den zwei möglichen Distributivgesetzen

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca$$

eins willkürlich ausgezeichnet wird. Ebenso gibt es auch zwei Arten von Gleichungen

$$a x = b, \quad y a = b,$$

von denen durch (IIb) wiederum eine willkürlich ausgezeichnet wird. Abgesehen von der Möglichkeit, gerade derartigen Auszeichnungen das Interesse zuzuwenden, wird man jedoch in der Absicht, nur die Kommutativität der Multiplikation fallen zu lassen, die Regeln der Axiome (II) und (III) ersetzen durch:

(II′) a) Assoziativität der Multiplikation: $a(bc) = (ab)c$,
b) Lösbarkeit der Gleichungen: $ax = b$, $ya = b$ für jedes $a \neq 0$ und b.

(III′) Links- und rechtsseitige Distributivität:
a) $a(b + c) = ab + ac$,
b) $(b + c)a = ba + ca$.

Definition: Jeder Größenbereich, in dem zwei Verknüpfungen erklärt sind, welche den Axiomen (I), (II′) und (III′) genügen, heißt ein *Schiefkörper*.

Zunächst sieht man sofort, daß jeder (kommutative) Körper auch Schiefkörper ist, denn die genannten Axiome sind in ihm erfüllt. Damit erhebt sich die Frage, ob es echte (d.h. nicht-kommutative) Schiefkörper gibt; denn nur dann hat die obige Definition einen erwähnenswerten Inhalt. Überdies wäre mit der Existenz echter Schiefkörper die Unabhängigkeit des Kommutativitätsaxioms der Multiplikation von den übrigen Axiomen bewiesen. Die weiter unten erfolgende Angabe eines Beispiels erledigt diese Frage.

In Schiefkörpern gilt analog zu Satz 1.

Satz 1′. *In einem Schiefkörper gibt es stets ein Null und ein Einselement, sowie zu jedem Element ein eindeutiges additiv und (außer zum Nullelement) multiplikativ Inverses.*

Die behauptete Existenz eines Nullelementes und die des additiv Inversen wird ebenso bewiesen wie in Ziff. 4, dagegen sollen die Behauptungen aus den Multiplikationsgesetzen gesondert hergeleitet werden. Zunächst folgt aus $ax = b$ für $b = a$ die Existenz eines Rechts-Einselementes e mit der Eigenschaft

$$a e = a \quad \text{für jedes } a. \tag{5.1}$$

Entsprechend folgert man aus $ya = b$ mit $b = a$ die Existenz eines Links-Einselementes e':

$$e' a = a \quad \text{für jedes } a. \tag{5.2}$$

Setzt man in (5.1) $a = e'$ und in (5.2) $a = e$, so erhält man wegen der Gleichheit der linken Seiten $e = e'$. *Rechts- und Links-Einselement sind also identisch.* Man spricht deshalb einfach vom Einselement des Schiefkörpers. Ebenso folgt aus (II′b) mit $b = e$ die Existenz eines Rechts- und Links-Inversen (c und c') zu jedem Element $a \neq 0$

$$a c = e, \quad c' a = e.$$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit c' von links und der zweiten mit c von rechts ergibt sich $c = c'$. Rechts- und Links-Inverses sind also identisch, weshalb man einfach vom Inversen a^{-1} eines jeden Elementes $a \neq 0$ spricht. Schließlich zeigt man ebenso einfach die Eindeutigkeit des Einselementes und des Inversen sowie die Eindeutigkeit der Lösungen $x = a^{-1}b$, $y = ba^{-1}$ der Gln. (II′b). *Für Schiefkörper gilt ebenfalls Satz 2*, wie man aus dem Beweis in Ziff. 4 ersehen kann.

Es ist häufig üblich, in dem Axiomensystem für Schiefkörper das Axiom (II′b) durch zwei andere Forderungen zu ersetzen:

(II'b') 1. Die Existenz eines rechtsseitigen Einselementes e mit der Eigenschaft $ae = a$ für alle a des betreffenden Bereiches. 2. Die Existenz eines Rechts-Inversen a^{-1} zu jedem Element $a \neq 0$ mit der Eigenschaft $aa^{-1} = e$.

Zunächst ist klar, daß diese beiden Sätze Konsequenzen von (II'b) sind. Andererseits läßt sich leicht zeigen, daß umgekehrt auch (II'b) eine Folge von (II'b') ist. Daraus folgt die Gleichwertigkeit von (II'b) und (II'b') (im Rahmen des übrigen Axiomensystems natürlich). Zum Beweis zeigt man zunächst, daß a^{-1} und e auch Links-Inverses bzw. Links-Einselement sind; aus $aa^{-1} = e$ folgt durch linksseitige Multiplikation mit a^{-1}

$$a^{-1} a a^{-1} = a^{-1} e = a^{-1}.$$

Wird diese Gleichung von rechts mit dem [nach (II'b') existierenden] rechtsseitigen Inversen von a^{-1} multipliziert, so folgt

$$a^{-1} a = e,$$

d.h. a^{-1} ist auch linksseitiges Inverses von a. Aus der letzten Gleichung ergibt sich schließlich durch rechtsseitige Multiplikation mit a^{-1}

$$a^{-1} = e a^{-1}.$$

Diese zeigt, daß e auch linksseitiges Einselement ist. Die somit nachgewiesene Existenz von Einselement und Inversen (die übrigens wieder eindeutig sind) läßt andererseits die Lösbarkeit der Gleichungen $ax = b$, $ya = b$ für $a \neq 0$ erkennen; ihre eindeutigen Lösungen sind

$$x = a^{-1} b, \quad y = b a^{-1}.$$

Beispiel. Das bekannteste Beispiel eines echten Schiefkörpers ist der Bereich der Quaternionen, das ist die Gesamtheit der Elemente der Form

$$\alpha + \beta j + \gamma k + \delta l,$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige reelle Zahlen sind. Die Elemente j, k, l erfüllen die Multiplikationsregeln

$$j^2 = k^2 = l^2 = -1, \quad jk = -kj = l, \quad kl = -lk = j, \quad lj = -jl = k,$$

während die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit ihnen vertauchbar sind. Das Nullelement ist die Quaternion mit den Koeffizienten $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, das Einselement die mit $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \delta = 0$. Die Multiplikation erfolgt unter Anwendung der Distributivgesetze und Berücksichtigung obiger Relationen. Daß diese Multiplikation assoziativ ist, läßt sich durch einfache Rechnung bestätigen. Da weiter

$$(\alpha + \beta j + \gamma k + \delta l)(\alpha - \beta j - \gamma k - \delta l) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \tag{5.3}$$

für jede von Null verschiedene Quaterion ungleich Null ist, existiert zu jeder Quaternion $\alpha + \beta j + \gamma k + \delta l$ eine Rechts-Inverse

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)^{-1} (\alpha - \beta j - \gamma k - \delta l)$$

die übrigens auch Links-Inverse ist. Infolgedessen gilt auch Axiom (II'b') [bzw. (II'b), da alle übrigen Schiefkörper-Axiome erfüllt sind]. Die Quaternionen (mit reellen Zahlen als Koeffizienten) bilden also einen Schiefkörper, und zwar einen echten Schiefkörper, da die Multiplikation sicher nicht kommutativ ist.

Durch dieses Beispiel ist auch gezeigt, daß der Begriff des Schiefkörpers tatsächlich eine echte Erweiterung des (kommutativen) Körperbegriffes darstellt, oder anders ausgedrückt, daß das Kommutativitätsaxiom der Multiplikation von den übrigen Körperaxiomen unabhängig ist.

Wie man sieht, hängt die Schiefkörpereigenschaft des Bereiches der Quaternionen mit reellen Koeffizienten wesentlich daran, daß die rechte Seite von Gl. (5.3) stets von Null verschieden ist und überdies im Bereich der Koeffizienten (hier im Körper der reellen Zahlen) ein Inverses besitzt. Würde man z.B. die Koeffizienten aus dem Körper der komplexen Zahlen nehmen, so könnte die rechte Seite von Gl. (5.3) auch mit von Null verschiedenen Koeffizienten verschwinden, so z.B. für $\alpha=\beta=1$, $\gamma=\delta=i$. Dann ergibt sich

$$(1+j+ik+il)(1-j-ik-il)=0.$$

Das Produkt ist also gleich Null, ohne daß ein Faktor verschwindet. Im Bereich der Quaternionen mit komplexen Zahlen als Koeffizienten gilt also Satz 2 nicht. Da dieser Satz aber eine Folge der Schiefkörperaxiome ist und infolgedessen in jedem Schiefkörper gelten muß, kann der betrachtete Bereich kein Schiefkörper sein. Andererseits sind in ihm, wie man bestätigt, die Axiome (I), (II'a), (III') jedoch erfüllt.

Zu einem Bereich mit gleichen Eigenschaften [d.h. der Gültigkeit der Axiome (I), (II'a), (III'), während (II'b) nicht erfüllt ist] gelangt man bei dem Versuch, einen *endlichen* echten Schiefkörper zu konstruieren, indem man z.B. die Quaternionen mit Koeffizienten aus dem in Ziff. 4 angeführten Körper aus zwei Elementen betrachtet. Auch dann kann die rechte Seite von Gl. (5.3) verschwinden, ohne daß auf der linken Seite ein Faktor Null ist. Dieses Beispiel ist kein zufällig herausgegriffener Ausnahmefall, welcher die Konstruktion eines endlichen Schiefkörpers nicht zuläßt, vielmehr gilt, wie hier nicht bewiesen werden soll, der

Satz: *Jeder endliche Schiefkörper ist kommutativ.*

Liegen andererseits (wie im eben betrachteten Beispiel) endliche Bereiche mit nicht-kommutativer Multiplikation vor, so können diese keine Schiefkörper sein.

6. Ringe. *Definition:* Jeder Größenbereich, in dem zwei Verknüpfungen erklärt sind, welche den Axiomen (I), (II'a), (III') genügen, heißt ein *Ring*. Gilt überdies das Kommutativitätsaxiom der Multiplikation, so spricht man von einem *kommutativen Ring*.

Wir haben in Ziff. 5 bereits Beispiele von Ringen kennengelernt, nämlich den Ring der Quaternionen mit komplexen Koeffizienten und den der Quaternionen mit Koeffizienten aus dem Körper von zwei Elementen. Weitere Beispiele sind der Bereich der ganzen Zahlen, oder der der geraden Zahlen oder auch der der Quaternionen mit Koeffizienten aus einem Ring, z.B. dem Ring der ganzen Zahlen.

Gegenüber einem Schiefkörper braucht also in einem Ring das Axiom (II'b) nicht erfüllt zu sein. Der Ringbegriff ist damit wiederum eine Erweiterung des Begriffes des Schiefkörpers [denn jeder Schiefkörper ist selbstverständlich ein Ring, und zwar ein Ring, in dem überdies noch (II'b) gilt]. Daß andererseits die Ringdefinition eine *echte* Erweiterung der Schiefkörperdefinition ist, zeigen die angeführten Beispiele. Wir können das in gewohnter Weise auch so ausdrücken, daß die Beispiele die Unabhängigkeit des Axioms (II'b) beweisen.

Zunächst folgt aus den Axiomen (I) in bekannter Weise die Existenz eines Nullelementes sowie die eines additiv Inversen zu jedem Ringelement. Die Existenz eines Einselementes und eines multiplikativ Inversen zu jedem von Null verschiedenen Ringelement läßt sich dagegen nicht mehr folgern. Ein Ring braucht kein Einselement zu besitzen (Beispiel: Ring der geraden Zahlen). Aus der angenommenen Existenz eines rechtsseitigen Einselementes läßt sich nicht einmal die Existenz eines linksseitigen beweisen. Gibt es aber in einem Ring sowohl ein rechtsseitiges Einselement e als auch ein linksseitiges e', so muß

$e=e'$ sein. Nach Voraussetzung gilt nämlich:

$$a e=a, \quad e' a=a \quad \text{für alle } a,$$

woraus für $a=e'$ bzw. $a=e$ die Behauptung folgt. Ebenso zeigt man: Existiert in einem Ring mit Einselement zu einem Element a ein linksseitiges Inverses a' und ein rechtsseitiges Inverses a'', so ist $a'=a''$, es gibt also nur ein (rechts- und linksseitiges) Inverses a^{-1} (das auch einziges Inverses ist). Aus $a'a=e$ und $aa''=e$ folgt nämlich durch Multiplikation der ersten Gleichung mit a'' von rechts und der zweiten Gleichung mit a' von links

$$a' a a''=a'', \quad a' a a''=a',$$

was unmittelbar die Behauptung liefert.

In einem Ring gilt auch Satz 2 nicht mehr; wir haben ja an den Beispielen der Quaternionenringe bereits gesehen, daß ein Produkt Null sein kann, ohne daß ein Faktor Null ist. Wenn also a und b Ringelemente bezeichnen, kann es vorkommen, daß

$$a b=0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$$

In diesem Fall heißt a linker und b rechter *Nullteiler*. Allgemein nennt man ein Ringelement a einen rechten bzw. linken Nullteiler, wenn es ein Element b im Ring gibt, so daß $ba=0$ bzw. $ab=0$ ist. In kommutativen Ringen braucht man natürlich nicht zwischen rechten und linken Nullteilern zu unterscheiden. Man beachte: Die Existenz von Nullteilern in einem Ring, der nicht Schiefkörper ist, ist nicht notwendig, es gibt *Ringe ohne Nullteiler* (Beispiel: der Ring der ganzen Zahlen).

Eine Teilaussage des Satzes 2 bleibt auch in einem Ring gültig, nämlich: *ein Produkt ist stets Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.* Der Beweis ist trivial, denn mit Anwendung der (in Ringen gültigen) Distributivgesetze folgt

$$a0=a(a-a)=aa-aa=0, \quad 0a=(a-a)a=aa-aa=0.$$

Ein *kommutativer Ring ohne Nullteiler* wird auch *Integritätsbereich* genannt. Der Ring der ganzen Zahlen ist also Integritätsbereich.

Schließlich nennt man eine Gesamtheit $\mathfrak{r}$ von Elementen aus einem Ring $\mathfrak{R}$, die ihrerseits bereits die Ring-Axiome erfüllt, einen *Unterring* von $\mathfrak{R}$. Der Unterring $\mathfrak{r}$ ist echt, wenn es in $\mathfrak{R}$ Elemente gibt, die nicht in $\mathfrak{r}$ enthalten sind. In Zeichen: $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{R}$. Die Gesamtheit aller Elemente eines Ringes $\mathfrak{R}$, die mit allen Elementen von $\mathfrak{R}$ vertauschbar sind, bildet einen Unterring, das sog. *Zentrum* von $\mathfrak{R}$.

7. Homomorphismen. Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring und $\mathfrak{R}'$ ein Bereich, in dem ebenfalls zwei Verknüpfungen (Addition und Multiplikation) erklärt sind. Läßt sich nun $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{R}'$ so abbilden, daß jedem Element $a \in \mathfrak{R}$ ein Element $a' \in \mathfrak{R}'$ zugeordnet wird und umgekehrt jedem $a' \in \mathfrak{R}'$ *mindestens* ein Element $a \in \mathfrak{R}$ entspricht und daß bei dieser Abbildung stets

$$(a+b)'=a'+b', \quad (ab)'=a'b', \tag{7.1}$$

gilt, so nennt man diese Abbildung einen *Homomorphismus* von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{R}'$. Ist die Abbildung umkehrbar eindeutig, so nennt man sie einen *Isomorphismus*. Es gilt

Satz 3: *Das homomorphe Bild eines Ringes ist wieder ein Ring.*

Die Beweisidee dieses Satzes beruht einfach darauf, daß jede (additive oder multiplikative) Relation im Ring $\mathfrak{R}$ gemäß (7.1) in eine Relation der gleichen Form in $\mathfrak{R}'$ übergeht, also auch die Ring-Axiome. Die genauere Durchführung bleibe dem Leser überlassen.

Ein bekanntes einfaches Beispiel eines Ring-Homomorphismus ist das Rechnen mit Kongruenzen modulo einer ganzen Zahl n; sind r, s ganze Zahlen und $r \equiv r'$, $s \equiv s' \pmod{n}$, so ist

$$r + s \equiv (r+s)' \equiv r' + s' \quad \text{und} \quad rs \equiv (rs)' \equiv r's' \pmod{n}.$$

Ist n keine Primzahl, so gibt es Nullteiler, wie das Beispiel

$$2 \cdot 2 \equiv 0 \pmod{4}$$

zeigt, da $2 \not\equiv 0 \pmod{4}$ ist. Eine derartige Abbildung ist offenbar ein Homomorphismus des Ringes der ganzen Zahlen auf die Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$.

Es ist unschwer zu erkennen, daß das Wesen des Homomorphiebegriffes durch eine Verallgemeinerung besser beleuchtet wird; denn es handelt sich bei ihm offenbar nicht nur um Abbildungen von Ringen aufeinander, sondern allgemein um Abbildungen von irgendwelchen Bereichen, bei denen gewisse Eigenschaften der Bereiche erhalten bleiben (während andere zerstört werden können). Man müßte somit eigentlich von Homomorphismen bezüglich bestimmter Eigenschaften der Bereiche sprechen. So ist das oben genannte Beispiel des Homomorphismus des Ringes der ganzen Zahlen eine homomorphe Abbildung bezüglich der beiden Verknüpfungen Addition und Multiplikation, während die Anordnungseigenschaft der ganzen Zahlen bei diesem Homomorphismus verloren geht. Indessen ist beim Gebrauch des Homomorphiebegriffes im allgemeinen keine Unklarheit zu befürchten, da durch die Angabe der Art der Bereiche gewöhnlich die fraglichen Eigenschaften, auf die sich der Homomorphismus bezieht, bereits festgelegt sind. Nach diesen Vorbemerkungen treffen wir die

Definition: $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ seien zwei Bereiche, zwischen deren Elementen bestimmte Relationen bestehen. Wird jedes Element $a \in \mathfrak{B}$ auf ein Bildelement $a' \in \mathfrak{B}'$ abgebildet derart, daß alle Elemente von $\mathfrak{B}'$ mindestens einmal als Bildelement vorkommen und daß eine definierte Menge von Relationen zwischen den Elementen von $\mathfrak{B}$ auch zwischen ihren Bildelementen aus $\mathfrak{B}'$ besteht, so heißt diese Abbildung ein *Homomorphismus* von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}'$ bezüglich der definierten Menge von Relationen. Ist der Homomorphismus umkehrbar eindeutig, so heißt er ein *Isomorphismus* zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$.

Ein Homomorphismus von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}'$ erzeugt in $\mathfrak{B}$ eine *Klasseneinteilung* der Elemente, indem alle Elemente, welche in dasselbe Element von $\mathfrak{B}'$ abgebildet werden, zu einer Klasse zusammengefaßt werden[1]. Diese Klassen in $\mathfrak{B}$ sind den Elementen von $\mathfrak{B}'$ eineindeutig zugeordnet.

[1] Eine Einteilung einer Menge $\mathfrak{M}$ in *Klassen* ist eine Zerlegung von $\mathfrak{M}$ in elementfremde Teilmengen derart, daß *jedes* Element von $\mathfrak{M}$ genau einer Teilmenge angehört. In diesem Zusammenhang ist der Begriff der „Äquivalenzrelation" wichtig. Als *Äquivalenzrelation* bezeichnet man jede Beziehung zwischen den Elementen einer Menge $\mathfrak{M}$, von der erklärt ist, ob sie für ein beliebig herausgegriffenes geordnetes Elementpaar (a, b) gilt oder nicht gilt (der erste Fall wird mit $a \sim b$ bezeichnet) mit den Eigenschaften

1. wenn $a \sim b$, so $b \sim a$;
2. wenn $a \sim b$ und $b \sim c$, so $a \sim c$.

In Worten: „Wenn a äquivalent zu b ist, so ist auch b äquivalent zu a" usw. Aus 1. und 2. folgt unmittelbar $a \sim a$. Einfache Beispiele von Äquivalenzrelationen sind der Gleichheitsbegriff, Kongruenz oder Ähnlichkeit von geometrischen Figuren, Äquivalenz oder Ähnlichkeit von Matrizen (Ziff. 29). Es gilt: *Jede Äquivalenzrelation erzeugt eine Klasseneinteilung* (wobei in jeder Klasse die untereinander äquivalenten Elemente liegen).

Die Äquivalenzrelation im obigen Fall der homomorphen Abbildung ist ersichtlich die folgende: „Wenn a in dasselbe Element wie b abgebildet wird, so auch b in dasselbe wie a" und „wenn a in dasselbe Element wie b und b in dasselbe wie c abgebildet wird, so auch a in dasselbe wie c". Die Trivialität des Beispiels ist allerdings nicht dazu angetan, die Bedeutung des Zusammenhanges von Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilungen wirkungsvoll zu beleuchten.