J'intègre

EXERCICES INCONTOURNABLES

PCSI | PTSI

J. Freslon, M. Hézard, J. Poineau

Mathématiques

exercices incontournables

CONFORME AU NOUVEAU PROGRAMME

- Les exercices incontournables du programme
- Les méthodes de résolution étape par étape
- Les erreurs à éviter
- Les corrigés détaillés

DUNOD

j'intègre

EXERCICES INCONTOURNABLES

PCSI | PTSI

Julien Freslon
Marie Hézard
Jérôme Poineau

Mathématiques

DUNOD

Conception et création de couverture : Atelier 3+

ISBN 978-2-10-059835-9

Mathématiques

Table des matières

Premier semestre — Algèbre

Premier semestre — Analyse

Second semestre — Algèbre

Second semestre — Analyse

Probabilités

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de première année de classes préparatoires scientifiques. Il leur propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques par le biais d'exercices. Chacun est assorti d'une correction détaillée, dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution.
Le livre est divisé en dix-huit chapitres, consacrés chacun à une partie du programme. La répartition officielle des chapitres en deux semestres est respectée ; nous avons de plus regroupé, au sein de chaque semestre, les chapitres selon les thèmes classiques : Algèbre, Analyse et Probabilités. Au sein d'un même chapitre, les exercices, classés par ordre croissant de difficulté, ont été choisis de façon à passer en revue les notions à connaître, mais aussi à présenter les techniques susceptibles d'être utilisées.
En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements, de la rédaction finale, rigoureuse et précise. Cette dernière étape est signalée, dans le texte, par la présence d'un liseré gris sur la gauche et du pictogramme . Insistons que le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Dans les deux cas, bien des possibilités existent.
Par ailleurs, lorsque nous avons souhaité mettre en lumière un point important, nous l'avons rédigé sur un fond grisé et indiqué par . De même, la présence d'un piège dont il faut se méfier est signalée par .
Pour finir, signalons que cet ouvrage est conçu pour les étudiants des deux filières PCSI et PTSI. Cependant :

- le chapitre *Géométrie* est réservé aux étudiants de la filière PTSI ;
- le chapitre *Espaces euclidiens* est réservé aux étudiants de la filière PCSI ;
- le chapitre *Analyse asymptotique* est au programme du premier semestre en PCSI, mais du second en PTSI ;
- le chapitre *Dimension finie et matrices* contient quelques exercices réservés aux étudiants de la filière PCSI ou de la filière PTSI suivant le module PSI. La liste de ces exercices est donnée au début du chapitre.

Nous remercions David Hézard, qui a collaboré à la réalisation de ce livre en le relisant en détail et en nous faisant bénéficier de ses nombreuses remarques pertinentes.

Partie 1

Premier semestre — Algèbre

Premier semestre — Algèbre

CHAPITRE

1

Calculs algébriques

Exercice 1.1 : Raisonnement par analyse-synthèse

1. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.
2. Déterminer les réels strictement positifs x tels que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

Il s'agit de questions ouvertes : on demande de trouver les solutions d'un problème sans les donner. Une stratégie consiste à raisonner par analyse-synthèse. C'est un raisonnement en deux étapes :

- Première étape (analyse du problème) : on considère une solution x de l'équation et on essaie, à partir des relations données dans l'énoncé, d'en déduire la forme de x.
- Deuxième étape (synthèse) : l'étape précédente a montré que les solutions sont d'une certaine forme ; il ne reste plus qu'à vérifier, parmi ces solutions potentielles, lesquelles sont bien les solutions du problème.

La nécessité de cette deuxième étape apparaîtra clairement dans la résolution de la première question.

1. ▶ Analyse du problème : nous allons élever au carré pour nous ramener à une équation du second degré.

Soit x un réel tel que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$. Alors, en élevant au carré : $x(x-3) = 3x-5$, soit $x^2 - 6x + 5 = 0$. Les réels x vérifiant cette relation sont 1 et 5. Nous avons donc démontré :

si x est solution de l'équation **alors** $x = 1$ ou $x = 5$.

Nous n'avons pas démontré que les solutions sont 1 et 5, mais uniquement qu'elles ne peuvent valoir autre chose. Il faut désormais tester chacune d'elles pour voir si elles conviennent effectivement : c'est l'objet de l'étape de synthèse.

▶ Synthèse : on remplace successivement x par 5 puis 1 dans l'équation initiale, les calculs étant sans difficulté.

Il est facile de vérifier que 5 est bien solution. En revanche, pour $x = 1$, l'équation n'a pas de sens : elle fait intervenir des racines carrées de nombres négatifs. Ainsi, 1 n'est pas solution.
Conclusion : 5 est l'unique réel x tel que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.

Pourquoi l'étape d'analyse a-t-elle produit une « fausse solution » (dite également *solution parasite*) ? Nous avons élevé deux expressions au carré, or cette opération n'est pas réversible : s'il est vrai que $a = b$ entraîne $a^2 = b^2$, la réciproque est fausse en général. En élevant au carré, nous avons en fait résolu l'équation $x(x-3) = 3x - 5$, qui se trouve avoir plus de solutions que l'équation de l'énoncé.

2. ▶ **Analyse du problème :** nous allons prendre les logarithmes afin de simplifier les puissances.

Soit x un réel strictement positif tel que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$. Alors, en prenant le logarithme : $x^x \ln(x) = x \ln(x^x) = x^2 \ln(x)$.

On ne peut en déduire $x^x = x^2$ en simplifiant par $\ln(x)$: en effet, $\ln(x)$ pourrait être nul. Il faut donc ajouter une hypothèse pour poursuivre les calculs : $x \neq 1$.

Supposons $x \neq 1$. On a alors $\ln(x) \neq 0$, donc $x^x = x^2$.
En considérant à nouveau les logarithmes, il vient $x \ln(x) = 2 \ln(x)$. Comme on a supposé ici $x \neq 1$, on peut encore simplifier par $\ln(x)$, d'où $x = 2$.
Autrement dit, nous venons de démontrer : si x est un réel strictement positif distinct de 1 vérifiant $x^{(x^x)} = (x^x)^x$, alors $x = 2$.
Ainsi, il y a deux solutions éventuelles au problème : 1 et 2.

▶ **Synthèse :** calculs sans astuce, attention cependant à la place des parenthèses.

Il est clair que 1 convient bien. De même, nous avons $2^{(2^2)} = 2^4 = 16$ et $(2^2)^2 = 4^2 = 16$, donc 2 convient également.
Conclusion : il existe deux réels strictement positifs x vérifiant l'équation $x^{(x^x)} = (x^x)^x$: ce sont 1 et 2.

Si l'on oublie l'étape de synthèse dans la première question, on aboutit à un résultat faux : il y a une solution parasite.
Par ailleurs, si l'on ne fait pas attention lors de la simplification par $\ln(x)$ dans la deuxième question, on n'obtient que la solution $x = 2$.
Autrement dit, le manque de rigueur dans le raisonnement mathématique peut aboutir à trouver de « fausses solutions », ou au contraire à en oublier de vraies !

Pour éviter cela, il faut :

- prendre garde, dans le type de raisonnement présenté ici, à ne pas oublier l'étape de synthèse ;
- s'assurer que tous les calculs sont licites (ne pas diviser par zéro, ne pas prendre la racine carrée ou le logarithme d'un nombre négatif, etc.) et, au besoin, distinguer des cas comme dans la deuxième question.

Exercice 1.2 : Sommes doubles

Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j$.

2. $S_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} (1-2^i)2^{ij}$.

3. $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$. Indication : il ne faut pas chercher à calculer directement la somme interne.

Le principe général de calcul des sommes doubles est de commencer par calculer la somme « interne », en considérant lors de ce calcul que l'indice de la somme « externe » est constant. On effectue ensuite le calcul de la somme externe, ce qui revient donc à calculer les sommes successivement, en partant de la plus intérieure.

1. Nous allons calculer S_1 en deux temps. À i fixé, nous allons calculer $\sum_{j=1}^{n} i2^j$ en faisant apparaître une somme géométrique, puis nous sommerons ensuite sur i.

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ fixé. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} i2^j &= i\sum_{j=1}^{n} 2^j \quad \text{car } i \text{ ne dépend pas de l'indice } j \text{ de la somme}\\
&= i\left(\sum_{j=0}^{n} 2^j - 1\right)\\
&= i\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1\right) \quad \text{(somme géométrique de raison 2)}\\
&= i(2^{n+1}-2)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=1}^{n} i(2^{n+1} - 2) \\
&= (2^{n+1} - 2)\sum_{i=1}^{n} i \\
&= (2^{n+1} - 2)\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{d'après une formule usuelle} \\
&= (2^n - 1)n(n+1)
\end{aligned}$$

Le fait que le terme général de la somme soit le produit d'un facteur dépendant uniquement de i et d'un autre dépendant uniquement de j permet d'effectuer plus rapidement le calcul, de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{n} 2^j\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 2^j\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1\right) \\
&= (2^n - 1)n(n+1).
\end{aligned}$$

En effet, i ne dépendant pas de j, on peut le « sortir » de la somme interne. On obtient alors une somme de la forme $\sum_{i=1}^{n}(i \times A)$, où $A = \sum_{j=1}^{n} 2^j$ ne dépend pas de i, et ainsi

$$S_1 = A\sum_{i=1}^{n} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 2^j\right).$$

Cette manipulation est cependant impossible lorsque l'on ne peut pas factoriser séparément les indices, comme c'est le cas dans la question suivante.

2. On procède comme dans la question précédente : on commence par fixer i pour calculer $\sum_{j=0}^{n} 2^{ij}$, puis on somme l'expression obtenue (qui dépend de i, mais plus de j) pour i allant de 1 à n. Les calculs font intervenir deux fois la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique.

Effectuons le calcul en commençant par la somme interne :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i=1}^{n} \left((1-2^i) \sum_{j=0}^{n} 2^{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left((1-2^i) \sum_{j=0}^{n} \left(2^i\right)^j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[(1-2^i) \frac{1-\left(2^i\right)^{n+1}}{1-2^i} \right] \quad \text{(somme géométrique de raison } 2^i \neq 1\text{)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(1-2^{i(n+1)}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} \left(2^{n+1}\right)^i \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= n - 2^{n+1} \frac{1-\left(2^{n+1}\right)^n}{1-2^{n+1}} \quad \text{(somme géométrique de raison } 2^{n+1} \neq 1\text{)} \end{aligned}$$

3. Cette somme double est plus difficile que les précédentes : elle est « triangulaire », c'est-à-dire que l'une des bornes de la somme interne dépend de l'indice de la somme externe.

Cela n'a pas de sens de permuter les deux sommes et d'écrire :

$$\sum_{i=k}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

En effet, dans la première somme, i varie de k à n, alors que k n'est pas encore défini (il ne l'est que pour la somme interne).

Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$ fixé. Aucune formule ne permet de simplifier la somme $\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$, et nous allons donc la réécrire différemment pour pouvoir la calculer. Pour cela, nous allons commencer par écrire la somme double sous forme d'une seule somme avec un double indice. Pour ce faire, il suffit de remarquer que si $(k, i) \in \mathbb{N}^2$, alors

$$1 \leqslant k \leqslant n \text{ et } k \leqslant i \leqslant n \Longleftrightarrow 1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n.$$

Nous pouvons écrire :

$$S_3 = \sum_{1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{i}.$$

Cette chaîne d'inégalités traduit bien le fait que k peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n, et i les valeurs entre k et n.

Ensuite, de la même façon, on remarque que si $(k,i) \in \mathbb{N}^2$, alors

$$1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n \Longleftrightarrow 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant i.$$

Autrement dit, on interprète désormais cette chaîne d'inégalités de la façon suivante : d'abord i varie entre 1 et n, ensuite k varie entre 1 et i. Ceci nous donne la nouvelle écriture sous forme de somme double.

On en déduit :

$$S_3 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{i}.$$

Or, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixé, $\displaystyle\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{i} = i \times \frac{1}{i} = 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= n \end{aligned}$$

Dans la somme $\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{i}$, le terme général (qui est $\frac{1}{i}$) ne dépend pas de k. Ainsi, comme la somme a i termes, sa valeur est $i \times 1/i$, soit 1.

Exercice 1.3 : Simplification d'une somme binomiale

1. Un entier naturel p étant fixé, démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant p$,

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2. Proposer une démonstration alternative utilisant un télescopage.

3. À l'aide de cette formule, retrouver les sommes classiques : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

1. L'énoncé indique clairement le raisonnement à utiliser : une récurrence. Pour cela, rappelons qu'il ne faut pas oublier de définir correctement la propriété qui va être démontrée par récurrence, de l'initialiser et de prouver l'hérédité.