j'intègre

EXERCICES INCONTOURNABLES

PC | PSI | PT

J. Freslon, S. Gugger, D. Fredon,
J. Poineau, C. Morin

Mathématiques
exercices incontournables

CONFORME AU NOUVEAU PROGRAMME

- Les exercices incontournables du programme
- Les méthodes de résolution étape par étape
- Les erreurs à éviter
- Les corrigés détaillés

DUNOD

PC | PSI | PT

JULIEN **FRESLON**
SYLVAIN **GUGGER**
DANIEL **FREDON**
JÉRÔME **POINEAU**
CLAUDE **MORIN**

Mathématiques
exercices incontournables

常州大学山书馆
藏书章

DUNOD

Avec la collaboration scientifique de Sabrina Bergez

Conception et création de couverture : Atelier 3+

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, 2014

5 rue Laromiguière, 75005 Paris

ISBN 978-2-10-071270-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de deuxième année de classes préparatoires scientifiques des filières PC et PSI. Il leur propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques par le biais d'exercices. Chacun est assorti d'une correction détaillée, dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution.
Le livre est divisé en quinze chapitres, consacrés chacun à une partie du programme. Nous avons regroupé les chapitres selon les thèmes classiques : Algèbre, Topologie, Analyse et Probabilités. Au sein d'un même chapitre, les exercices, classés par ordre croissant de difficulté, ont été choisis de façon à passer en revue les notions à connaître, mais aussi à présenter les techniques susceptibles d'être utilisées.
En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements, de la rédaction finale, rigoureuse et précise. Cette dernière étape est signalée, dans le texte, par la présence d'un liseré gris sur la gauche et du pictogramme . Insistons que le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Dans les deux cas, bien des possibilités existent.
Par ailleurs, lorsque nous avons souhaité mettre en lumière un point important, nous l'avons rédigé sur un fond grisé et indiqué par . De même, la présence d'un piège dont il faut se méfier est signalée par . Quelques exercices sont seulement au programme de PSI, cela est clairement signalés dans leur titre.
Nous remercions Sabrina Bergez, qui a collaboré à la réalisation de ce livre en le relisant en détail et en nous faisant bénéficier de ses nombreuses remarques pertinentes.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

Table des matières

Algèbre

1 Algèbre linéaire 7
2 Réduction des endomorphismes 29
3 Espaces euclidiens 63

Topologie

4 Topologie des espaces vectoriels normés 87
5 Fonctions vectorielles et arcs paramétrés 110

Analyse

6 Séries numériques 128
7 Suites et séries de fonctions 144
8 Séries entières 168
9 Intégration 194
10 Calcul différentiel 234
11 Équations différentielles 252

Probabilités

12 Espaces probabilisés 273
13 Variables aléatoires discrètes 282

Index 301

Partie 1

Algèbre

Algèbre

1 Algèbre linéaire **7**

1.1 : Utilisation des polynômes de Lagrange 7
1.2 : Polynôme et racines n-ièmes 10
1.3 : Somme de sous-espaces de polynômes 11
1.4 : Somme de projecteurs 12
1.5 : Utilisation d'un polynôme annulateur (PSI) 13
1.6 : Calcul par blocs 15
1.7 : Propriétés de la trace 16
1.8 : Réduction des matrices de trace nulle 19
1.9 : Réduction d'une matrice antisymétrique 21
1.10 : Un calcul de déterminant 23
1.11 : Intersection de p hyperplans (PSI) 27

2 Réduction des endomorphismes **29**

2.1 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de polynômes 29
2.2 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de fonctions 31
2.3 : Diagonalisation 35
2.4 : Réduction d'une matrice d'ordre 3 38
2.5 : Trigonalisation 41
2.6 : Réduction d'une matrice à paramètres 45
2.7 : Diagonalisation simultanée (PSI) 47
2.8 : Étude d'un endomorphisme d'un espace d'endomorphismes (PSI) 49
2.9 : Réduction (PSI) 52
2.10 : Diagonalisabilité et sous-espaces stables 55
2.11 : Théorème de Cayley-Hamilton (PSI) 56

3 Espaces euclidiens **63**

3.1 : Famille de polynômes orthogonaux 63
3.2 : Un problème de minimisation 65
3.3 : Une caractérisation des isométries antisymétriques 67
3.4 : Centre de O(E) 68
3.5 : Partie génératrice du groupe orthogonal 70
3.6 : Applications conservant le produit vectoriel (PSI) 72
3.7 : Étude d'une rotation en dimension 3 (PSI) 74
3.8 : Formes quadratiques 75
3.9 : Quotients de Rayleigh 78
3.10 : Matrices définies positives 79
3.11 : Décomposition polaire 81

原书缺页

原书缺页

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

原书缺页

原书缺页

CHAPITRE 1

Algèbre linéaire

Exercice 1.1 : Utilisation des polynômes de Lagrange

On se fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts.
1. Montrer que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, il existe un unique $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout j entre 0 et n, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ (le symbole de Kronecker, qui vaut 0 si $i \neq j$, 1 si $i = j$).
2. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, quelles sont ses coordonnées dans cette base ?
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in [0, n]$, $|P(x)| \leqslant 1$. Montrer que :

$$|P(-1)| \leqslant 2^{n+1} - 1 \text{ et } |P(n+1)| \leqslant 2^{n+1} - 1.$$

1. Pour montrer l'existence et l'unicité, il y a deux possibilités : on peut montrer à part l'unicité et l'existence, mais il faudra avoir une idée de quoi poser dans l'existence. On peut également raisonner par analyse/synthèse. L'intérêt de ce mode de raisonnement est qu'il n'y aura pas à réfléchir dans la phase de synthèse, pour savoir quoi poser.

► **Analyse :**
Dans la phase d'analyse, on suppose avoir un objet vérifiant la propriété voulue et on trouve son expression exacte. Ceci montrera l'unicité.

Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Supposons avoir $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout j entre 0 et n, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$. L_i admet alors tous les a_j (pour $j \neq i$) comme racines. Ce sont n réels deux à deux distincts, et $\deg(L_i) \leqslant n$, donc on a toutes les racines de L_i. La forme factorisée de L_i est alors de la forme :

$$L_i = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_j).$$

On trouve enfin la valeur de λ grâce à $L_i(a_i) = 1$:

$$1 = L_i(a_i) = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j) \text{ donc } \lambda = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{a_i - a_j},$$

où l'on peut diviser car $a_i \neq a_j$ pour $j \neq i$. Ainsi

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

et on a l'uncité.

► **Synthèse :**
Dans la phase de synthèse, on pose l'objet trouvé dans la phase d'analyse, et on démontre qu'il convient effectivement.

Soit $i \in \{0, \ldots, n\}$. Posons

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Alors $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ (il est de degré n), $L_i(a_j) = 0$ si $j \neq i$ et $L_i(a_i) = 1$. On a donc l'existence.

La phase d'analyse montre toujours l'unicité, la phase de synthèse l'existence. Cette dernière est indispensable, puisque la phase d'analyse montre simplement que si l'objet cherché existe, il est d'une certaine forme, mais pas que cette forme convient effectivement.

2. La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ comporte autant d'éléments que la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

La dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est $n+1$ et non n, puisque sa base canonique $(X^0, \ldots, X^n)$ comporte $n+1$ éléments.

Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n = 0$. Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on a, en évaluant en a_i,

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j(a_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \delta_{j,i} = \lambda_i.$$

Ainsi la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est libre. Elle a $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a alors $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n$. Comme plus haut, pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on a, en évaluant en a_i,

$$P(a_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j(a_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \delta_{j,i} = \lambda_i.$$

Les coordonnées de P dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ sont donc $(P(a_0), \dots, P(a_n))$.

3. Pour démontrer les inégalités proposées, on cherche à appliquer les questions précédentes. L'hypothèse étant vérifiée sur $[0, n]$, on pense à poser $a_i = i$ pour tout i entre 0 et n. On a alors P qui s'exprime en fonction des $P(i)$ (de valeur absolue plus petite que 1) et des L_i. Il faut donc majorer les $|L_i(-1)|$ et $|L_i(n+1)|$.

On applique les questions précédentes à $(a_0, \dots, a_n) = (0, \dots, n)$. Notons $L_0, \dots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés, on a

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i = \sum_{i=0}^{n} P(i) L_i.$$

Pour i entre 0 et n, on a alors :

$$\begin{aligned}
|L_i(-1)| &= \left| \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{-1-j}{i-j} \right| = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{j+1}{i-j} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{j+1}{j-i} \\
&= \prod_{j=0}^{i-1} (j+1) \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{i-j} \prod_{j=i+1}^{n} (j+1) \prod_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j-i} \\
&= (i!) \times \frac{1}{i!} \times \frac{(n+1)!}{(i+1)!} \times \frac{1}{(n-i)!} = \frac{(n+1)!}{(i+1)!\,(n-i)!} \\
&= \binom{n+1}{i+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
|P(-1)| &= \left| \sum_{i=0}^{n} P(i) L_i(-1) \right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |P(i) L_i(-1)| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i+1} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - 1 = 2^{n+1} - 1.
\end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\begin{aligned}
|L_i(n+1)| &= \left| \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{n+1-j}{i-j} \right| = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{n+1-j}{i-j} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{n+1-j}{j-i} \\
&= \prod_{j=0}^{i-1} (n+1-j) \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{i-j} \prod_{j=i+1}^{n} (n+1-j) \prod_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j-i} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-i)!} \times \frac{1}{i!} \times ((n-i)!) \times \frac{1}{(n-i)!} = \frac{(n+1)!}{i!\,(n+1-i)!} \\
&= \binom{n+1}{i}.
\end{aligned}$$

Puis, par l'inégalité triangulaire,

$$|P(-1)| = \left|\sum_{i=0}^{n} P(i)L_i(-1)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |P(i)L_i(-1)| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} = 2^{n+1} - 1.$$

Exercice 1.2 : Polynôme et racines n-ièmes

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

1. Calculer $\sum_{x \in \mathbb{U}_n} x^p$.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré plus petit que $n-1$. On suppose avoir $M > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{U}_n \ , \ |P(x)| \leqslant M.$$

Montrer que les coefficients de P sont bornés par M.

1. Il s'agit d'un simple calcul d'une somme géométrique, il suffit de bien se souvenir de l'énumération classique de $\mathbb{U}_n$.

Lors du calcul d'une somme géométrique, il est indispensable de bien distinguer le cas où la raison vaut 1.

On sait que $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble de $e^{2ik\pi/n}$, k variant entre 0 et $n-1$. Ainsi, si p n'est pas un multiple de n, on a $e^{2ip\pi/n} \neq 1$ et donc :

$$\sum_{x \in \mathbb{U}_n} x^p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{2ik\pi/n}\right)^p = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ikp\pi/n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{2ip\pi/n}\right)^k$$
$$= \frac{1 - e^{2ip\pi}}{1 - e^{2ip\pi/n}} = 0$$

Si maintenant p est un multiple de n, on a

$$\sum_{x \in \mathbb{U}_n} x^p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{2ik\pi/n}\right)^p = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ikp\pi/n} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

2. Comme P est de degré plus petit que $n-1$, il s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$. Pour isoler le coefficient de degré k, on pense, avec la question précédente, à regarder la somme de $P(x)x^{-k}$ pour $x \in \mathbb{U}_n$: les puissances autre que k vont s'annuler, et il ne restera que $n\,a_k$.

Comme P est de degré plus petit que $n-1$, on a $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k.$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com