SAMMLUNG MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHER LEHRBÜCHER
HERAUSGEGEBEN VON E. TREFFTZ

6,1

DIE VEKTORANALYSIS
UND IHRE ANWENDUNG IN DER THEORETISCHEN PHYSIK

VON

DR. W. v. IGNATOWSKY
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT IN LENINGRAD

TEIL I
DIE VEKTORANALYSIS

MIT 27 TEXTFIGUREN

DRITTE, UMGEÄNDERTE AUFLAGE

Vorwort zur ersten Auflage.

Obwohl es schon eine größere Anzahl von Schriften über Vektor analysis gibt, bin ich doch gern der Aufforderung des Herausgebers dieser Sammlung nachgekommen, ein Buch über denselben Gegenstand zu schreiben. Denn wegen der fundamentalen Bedeutung der Vektoranalysis für die Behandlung der theoretischen Physik kann es nur von Vorteil sein, wenn diese Methode von möglichst vielen Seiten beleuchtet wird. Anderseits glaube ich auch in diesem Buche einiges Neue zu bieten, wie dies der kundige Leser sofort bemerken wird.

Die Vektoranalysis fordert, wie jede neue Methode, eine gewisse Mühe, um sich mit ihr vertraut zu machen. Man darf aber diese verhältnismäßig leichte Mühe nicht scheuen. Denn hat man sich einmal mit den Regeln der Vektoranalysis vertraut gemacht, so wird man ihre Vorteile bald schätzen lernen. Ein Vorteil besteht darin, daß man sich schnell über die räumliche Verteilung verschiedener Größen Klarheit schaffen und mit ihnen rechnen kann, ohne an ein bestimmtes Koordinatensystem gebunden zu sein.

Der nächste Schritt, nachdem man sich gewisse räumliche Vorstellungen einer physikalischen Erscheinung zurechtgelegt hat, besteht darin, diese Vorstellungen durch analytische Formeln auszudrücken. Hierbei wird man zur Vektoranalysis greifen, um mit ihrer Hilfe diese Vorstellungen zu fixieren und zu ordnen. Die weiteren Rechnungen übernimmt die gewöhnliche Analysis, deren Sache es auch ist, die vektoranalytischen Transformationen in ihrer Sprache auszudrücken.

Dieser Anschauung entsprechend, zerfällt das vorliegende Buch in zwei Teile. Der erste Teil behandelt die Vektoranalysis als selbständige Disziplin, ohne auf ein bestimmtes Gebiet der Physik zugeschnitten zu sein. Dabei wird aber immer im Auge behalten, daß das Buch für Physiker bestimmt ist Jeglicher Gebrauch von Koordinatensystemen zum Beweise irgendwelcher vektoranalytischen Transformationen ist gänzlich vermieden. Der Schwerpunkt der Vektoranalysis liegt in der Untersuchung der räumlichen Verteilung eines Vektors und seiner Abhängigkeit von der Zeit. Deshalb ist hierauf besonderes Gewicht gelegt. Anderseits glaubte ich auch die sogenannten Tensoren ausführlicher behandeln zu müssen, da sie in der theoretischen Physik vorkommen und ihre Kenntnis den zweiten Teil dieses Buches von vielen Transformationen entlastet.

Der zweite Teil behandelt einige Gebiete der theoretischen Physik zu dem Zweck, die Anwendbarkeit der Vektoranalysis zu zeigen. Deshalb ist selbstverständlich von jedem Beweis der Grundlagen der einzelnen Gebiete abgesehen, um so mehr, als diese in den verschiedenen Bändchen dieser Sammlung behandelt werden sollen. Es ist nur gezeigt worden, wie man mit Hilfe der Vektoranalysis leicht von den Grundlagen bis zu gewissen Endformeln, resp. Resultaten gelangen kann. Das erfordert mit Hilfe der gewöhnlichen Analysis oft umständliche Rechnungen, welche die Übersicht erschweren. Die Vektoranalysis hingegen läßt uns nie den Faden beim Gedankengange verlieren, da sie ständig unsere Raumvorstellungen fixiert.

Die Darstellung selbst ist, dem Ziel dieser Sammlung entsprechend, so gehalten, daß ein Leser, welcher mit der Differential- und Integralrechnung vertraut ist, die verschiedenen Rechnungen verfolgen kann. Um das Aufsuchen der verschiedenen Formeln zu erleichtern, ist am Schluß des ersten Teiles eine Tafel hinzugefügt, welche die wichtigsten Formeln enthält.

Zum Schluß möchte ich die Gelegenheit benutzen, um dem Herausgeber dieser Sammlung, sowie Herrn Ingenieur Fritz Emde (Berlin) und Herrn Prof. Dr. H. W. Schmidt (Gießen) für manchen wertvollen Hinweis und Ratschlag, welche zur Klärung des Textes beigetragen haben, und auch für die Mühe, der sich die genannten Herren bei Lesung der Korrekturen unterzogen haben, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Gießen, Juli 1909.

W. v. Ignatowsky.

Vorwort zur dritten Auflage.

Bevor ich auf die Änderungen eingehe, die die vorliegende Auflage gegenüber den früheren aufweist, möchte ich das Vorwort zur ersten Auflage durch folgendes ergänzen.

Da sich die physikalischen Erscheinungen im Raume abspielen, so ist es klar, daß sie gewissen Raumgesetzen folgen müssen, die, weil unabhängig von einer speziellen Erscheinung, verschiedene Gebiete der Physik vereinigen. Es schien mir deshalb angebracht, den Stoff in zwei Teile zu spalten: im ersten werden die Raumgesetze unabhängig von jeglicher physikalischen Erscheinung abgeleitet; im zweiten die physikalischen Grundlagen so weit entwickelt, bis ein Anschluß an die Raumgesetze erreicht ist. Daß ein und dasselbe Raumgesetz in verschiedenen Gebieten der Physik auftritt, wird wohl sofort in die Augen springen. Man nehme z. B. das Tensorellipsoid, das für das Trägheitsmoment, für die Spannungen und für die Kristalloptik maßgebend ist. Außerdem schien mir diese Teilung von dem Gesichtspunkt aus wichtig, die rein physikalischen Betrachtungen von den mathematischen zu trennen, damit die mathematischen nicht etwa als eine Eigentümlichkeit des betreffenden physikalischen Gebietes erscheinen (z. B. das Fresnelsche Ellipsoid in der Kristalloptik).

Es lag nun auf der Hand, daß zur Untersuchung der Raumgesetze am geeignetsten die Vektoranalysis ist. In dieser schien es aber angebracht, sich von irgendwelchen speziellen Koordinaten zu befreien, was ich daher auch durchzuführen bestrebt war. Durch Einsetzen des gerichteten Flächenelementes an Stelle von ∇ in Nr. 8 und durch die Definitionen in Nr. 9 konnte ich tatsächlich die verschiedenen vektoranalytischen Differentialoperationen behandeln, ohne ein bestimmtes Koordinatensystem zu benutzen. Ferner wurde es möglich durch Betrachtungen, wie die am Schluß von Nr. 9 und ähnliche, die mit dem Symbol ∇ verbundenen Operationen als räumliche (dreidimensionale) Differentiationen aufzufassen, in vollkommener Analogie zu den eindimensionalen Differentiationen der gewöhnlichen Differentialrechnung. Die hierzu inversen Operationen, die unmittelbar aus den Definitionen 44—46 in Nr. 9 folgen, führen nun von selbst zu räumlichen Integrationen und zu den Sätzen von Gauß, Stokes usw. Wegen jenes wichtigen Gebrauchs des gerichteten Flächenelementes schien es mir ferner vorteilhaft, dieses schon in Nr. 4 als Vektor einzuführen. Dann ergibt sich die Definition des Vektorproduktes ganz von selbst.

Als ich nun im Jahre 1902 mein russisches Buch: „Lösung einiger Aufgaben aus der Elektrostatik und Elektrodynamik mit Hilfe der Vektoranalysis“ von den am Anfang dieses Vorwortes angeführten Gesichtspunkten aus schrieb[1]), gebrauchte ich schon die Definitionen (45) S. 16 für die Divergenz und (86) S. 31 für die Rotorkomponente von beliebiger Richtung, wie auch manche anderen Autoren.[2])

Als ich dann im Jahre 1908 den ersten Teil meines Buches verfaßte (erschienen 1909), waren deshalb die in den Nr. 8 und 9 usw. enthaltenen Betrachtungen als logische Weiterentwicklung für mich

---

1) v. Ignatowsky, W., „Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Draht“, Ann. d. Phys. Bd. 18, 1905 S. 505, Anmerkung, wo mein Buch zitiert ist.

2) Z. B. Lorentz, H. A., Enzyklopädieartikel Bd. V, Heft I S. 71 (1904) und Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität Bd. I, 2. Aufl (1904) usw.

naheliegend. Doch sei hervorgehoben, daß F. Jung[1]) schon 1908 die Definitionen (44)—(46) Bd. I, S. 16, für Gradient, Divergenz und Rotor in viel allgemeinerer Weise eingeführt hat, indem er z. B. dabei auch die Affinoren (welche Benennung auch von ihm stammt) berücksichtigte. Auf diese Arbeit von F. Jung bin ich aber leider erst nach Erscheinen beider Teile der ersten Auflage des vorliegenden Buches aufmerksam geworden.

Ich komme nun auf die wichtigsten Änderungen und Zusätze in dieser dritten Auflage.

In Nr. 5a wurden die zu den drei ebenenfremden Vektoren reziproken Vektoren eingeführt, um den allgemeinen Ausdruck für den Einheitstensor in Nr. 40 geben zu können, und außerdem aus einem sofort zu ersehendem Grunde.

Damit man tatsächlich von einer Raumdifferentiation sprechen darf, muß nachgewiesen werden, daß die Grenzwerte in Nr. 9 von der Form des Volumens unabhängig sind. Auf Anregung von Herrn G. Hamel (Berlin), habe ich in Nr. 9a diesen Beweis erbracht. Dazu waren auch die reziproken Vektoren notwendig.

Die Nr. 17—19 (Zerlegung eines Vektorfeldes in Rotor und Gradient, Greensche Sätze) habe ich geändert, um die Ergebnisse von einem einheitlichen Standpunkte aus ableiten zu können. Dabei tritt wieder die Unabhängigkeit des Grenzwertes von der Form des Volumens hervor. Diese Betrachtungen werden auch bei der Ableitung des Ausdruckes (140) in Nr. 22a, S. 55 (Nr. 22 in der ersten Auflage) auf einen Vektor angewandt, der auch von der Zeit abhängt, wodurch diese Ableitung sehr kurz und anschaulich geworden ist. Hierzu möchte ich bemerken, daß ich diesen Ausdruck (140) schon im Jahre 1902 in meinem russischen Buch abgeleitet habe.[2]) Hinzugefügt wurde weiter in Nr. 22 ein dem Ausdruck (140) ähnlicher für einen Skalar, der auch von der Zeit abhängt.

In Übereinstimmung mit den Ausführungen von F. Emde[3]) habe ich die Nr. 37—39 über polare und axiale Vektoren usw. gestrichen, um ein wenig eingehender die linearen Vektorfunktionen, die Affinoren und die Tensoren behandeln zu können. Zum weiteren Studium der Affinorenalgebra und -Analysis möchte ich dem Leser das ausführ-

---

1) Jung, F., „Ableitungsbildung im räumlichen Größenfeld". Ztschft. f. Math. u. Phys. Bd. 56, 1908, S. 337. (Das Heft ist erst am 4. Febr. 1909 erschienen, während sich das Manuskript zu meinem Buch schon Anfang Dezember 1908 in der Druckerei befand.)

2) Siehe die Anmerkung in meiner zitierten Annalenarbeit.

3) Emde, F., „Polare und axiale Vektoren in der Physik". Ztschft. f. Physik, Bd. 12, 1922 S. 258 und Bd. 16, 1923 S. 209.

liche Buch von J. Spielrein empfehlen, wo auch die Literatur vollständig berücksichtigt worden ist.[1])

In der ersten Auflage habe ich die symmetrische lineare Vektorfunktion eines Einheitsvektors als „Tensor“ bezeichnet, wofür ich jetzt aus Gründen, die in den Nr. 40 und 41 klargelegt sind, den Namen „ellipsoidaler Vektor“ eingeführt habe.

Wegen des Flächenrotors, der Flächendivergenz, usw., die ich in Nr. 25 nur kurz erwähne, möchte ich auch auf das Buch von Spielrein hinweisen.

Im zweiten Teil sind nur unwesentliche Änderungen vorgenommen worden und zwar hauptsächlich, um einen engeren Anschluß an die Affinorenrechnung zu erreichen, wie z. B. in Nr. 12. Ferner sind noch die Nr. 38a und 38b hinzugefügt worden als Beispiel für die Ausführungen der Nr. 22 und 22a I und insbesondere von (140) I.

Auf die Änderungen, die sich auf Druckfehler und Berichtigungen beziehen, und auf einige Abänderungen in der Bezeichnungsweise brauche ich hier nicht einzugehen.

Um den Umfang in entsprechenden Grenzen zu halten, mußte ich davon absehen, auf die Arbeit von A. Sommerfeld und J. Runge[2]) einzugehen, in der die Vektoranalysis in sehr eleganter Weise auf einige Fragen der geometrischen Optik angewandt wird. Es sei wenigstens hier auf sie hingewiesen.

Zum Schluß möchte ich meinen aufrichtigsten Dank den Herren Prof. F. Emde (Stuttgart) und Prof. G. Hamel (Berlin) aussprechen für manchen Hinweis und manche Anregung, ersterem insbesondere auch dafür, daß er sich in so liebenswürdiger Weise zur Durchsicht des gesamten Materials bereit gefunden hat. Manchen wertvollen Hinweis verdanke ich auch Herrn Lehramtskandidaten und Assistenten Frank Löbell in Stuttgart. Er und Herr Assistent Dr.-Ing. Walter Braunbeck in Stuttgart haben die Probeabzüge gelesen. Herr Ing. Z. Klamborowski in Warschau hat mir ein Druckfehlerverzeichnis zur ersten Auflage gesandt. Allen diesen Herren spreche ich meinen herzlichsten Dank aus. Auch der Verlagsbuchhandlung bin ich zu Dank verpflichtet für das bereitwillige Entgegenkommen bei allen meinen Wünschen.

Leningrad, Januar 1925. **W. v. Ignatowsky.**

---

1) Spielrein, J., „Lehrbuch der Vektorrechnung“, Stuttgart 1916, K. Wittwer. Demnächst erscheint hiervon eine russische und eine zweite deutsche Auflage.

2) Sommerfeld, A. und Runge, J., „Anwendung der Vektorrechnung auf die Grundlagen der geometrischen Optik“. Ann. d. Phys. Bd. 35, 1911 S. 277.

Inhaltsverzeichnis.

V. Allgemeine Bemerkungen.

VI. Geometrische Darstellung.

VII. Analytische Darstellung.

VIII. Lineare Vektorfunktionen. Affinoren. Tensoren.

Einleitung.

Man unterscheidet in der Physik Größen verschiedner Art. Wir betrachten zunächst nur die Skalare und Vektoren. Ein Skalar stellt einen Zahlenwert dar, der das Verhältnis zu derjenigen Einheit angibt, die zur Messung der betreffenden Größe dient. Zu dieser Art von Größen gehört die Temperatur, Dichte, Energie u. a. Ein Vektor besitzt außer dem erwähnten Zahlenwert noch eine bestimmte Richtung. Deshalb unterscheiden sich die Vektoren untereinander nicht nur durch ihre Zahlenwerte, sondern auch durch ihre Richtungen. Den Zahlenwert eines Vektors nennt man den Betrag des Vektors. Vektoren sind z. B. Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung usw. Gewöhnlich wird ein Vektor geometrisch durch eine Strecke dargestellt, deren Länge in einem gewissen Maßstabe dem Betrag des Vektors gleich ist und deren Richtung die Richtung (und den Richtungssinn) des Vektors angibt. Da die Projektion einer Strecke auf eine feste Richtung bei einer Parallelverschiebung der Strecke sich nicht ändert, so kommt es auf die Lage des Anfangspunktes der einen Vektor darstellenden Strecke nicht an.

Wir werden uns, wie es allgemein üblich ist, zur Kennzeichnung von Vektoren der deutschen Buchstaben bedienen, während bei skalaren Größen lateinische oder griechische Schrift benutzt werden soll. Der Betrag eines Vektors $\mathfrak{A}$ wird durch $|\mathfrak{A}|$ ausgedrückt oder durch den entsprechenden lateinischen Buchstaben, also A, je nachdem es bequemer ist. Einen Vektor, dessen Betrag gleich eins ist, nennt man Einheitsvektor. Wir werden einen solchen Vektor durch den Index 0 hervorheben. Demnach ist der Einheitsvektor von $\mathfrak{A}$ gleich $\mathfrak{A}_0$. Hieraus ergibt sich sofort, daß

$$\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}|\,\mathfrak{A}_0 = A\mathfrak{A}_0$$

ist, was also bedeutet, daß der Pfeil $\mathfrak{A}$ A-mal so lang ist, wie der gleichgerichtete Pfeil $\mathfrak{A}_0$. (Vgl. Nr. 3.)

Da jeder Vektor eine bestimmte Richtung und einen bestimmten Betrag hat, so können zwei Vektoren dann und nur dann gleich sein, wenn ihre Beträge gleich sind und ihre Richtungen nebst Richtungssinn zusammenfallen.

Die Dimensionen eines Vektors schreibt man gewöhnlich dem Betrage zu, während der entsprechende Einheitsvektor als dimensionslos aufgefaßt wird.

Der Einheitsvektor längs der Normale einer Fläche soll durch $\mathfrak{n}$ ausgedrückt werden und bei einer geschlossenen Fläche stets nach außen hin gerichtet sein.

Man bezeichnet oft z. B. durch $\mathfrak{A}_x$ die Komponente des Vektors $\mathfrak{A}$ längs der X-Achse eines rechtwinkligen Achsenkreuzes. Wir wollen dieser Bezeichnungsweise nicht folgen und zwar aus dem Grunde, weil wir die Bezeichnung $\mathfrak{A}_x$ für denjenigen Wert einer linearen Vektorfunktion aufgehoben haben, den diese annimmt, wenn der sie bestimmende Vektor $\mathfrak{r}_0$ mit der X-Achse zusammenfällt.

Die weiteren Bezeichnungen ergeben sich aus dem Text und entsprechen im übrigen den allgemein verbreiteten.

I. Elementare Vektoroperationen.

1. Addition und Subtraktion von Vektoren. Gegeben seien zwei Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. An den Endpunkt von $\mathfrak{A}$ legen wir eine Strecke, die dem Betrag und der Richtung nach gleich $\mathfrak{B}$ ist (Fig. 1).

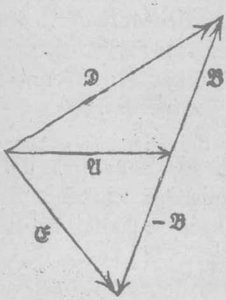

Fig. 1.

Man bezeichnet als Summe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ den Vektor $\mathfrak{D}$, der den Anfangspunkt von $\mathfrak{A}$ mit dem Endpunkt von $\mathfrak{B}$ verbindet und nach diesem Endpunkt hin gerichtet ist. Dadurch ist der Betrag und die Richtung der Summe $\mathfrak{D}$ vollständig bestimmt. Als Zeichen der Vektoraddition benutzt man das gewöhnliche Pluszeichen:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{D}. \tag{1}$$

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleichgerichtet, so wird auch die Richtung von $\mathfrak{D}$ mit dieser gemeinsamen Richtung zusammenfallen, und (1) geht über in eine Addition der Beträge, d. h. in eine gewöhnliche Addition skalarer Größen.

Nehmen wir statt $\mathfrak{B}$ den negativen Vektor $-\mathfrak{B}$, d. h. einen Vektor von demselben Betrag, aber entgegengesetzter Richtung wie $\mathfrak{B}$, so sei die Differenz zweier Vektoren erklärt durch die Gleichung (Fig. 1)

$$\mathfrak{A} + (-\mathfrak{B}) = \mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \mathfrak{C}. \tag{2}$$

Für $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ergibt sich der Vektor Null, geschrieben: 0.

Die Gleichungen (1) und (2) bilden mit Fig. 1 die Definition der Addition und Subtraktion von Vektoren. Es sind hierbei $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{C}$ nichts anderes als die Diagonalen der beiden Parallelogramme, gebildet aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und aus $\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{B}$.

Daß es in (1) und (2) auf die Reihenfolge der Glieder nicht ankommt, ersieht man sofort aus Fig. 2. Wir können deshalb allgemein schreiben

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}, \tag{3}$$

d. h. bei der Addition und Subtraktion von Vektoren gilt das kommutative Gesetz.

Die Beziehungen (1) bis (3) sind leicht auf eine beliebige Anzahl von Vektoren zu erweitern. Denn je zwei Vektoren können zu einem vereinigt werden und demzufolge nacheinander die Summe aller Vektoren durch einen einzigen dargestellt werden. Da es hierbei, wie leicht aus der geometrischen Konstruktion zu ersehen ist, auf die Gruppierung der Vektoren nicht ankommt, so können wir z. B. für drei Vektoren die Identität schreiben

$$\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}. \tag{4}$$

Diese Gleichung drückt das assoziative Gesetz aus.

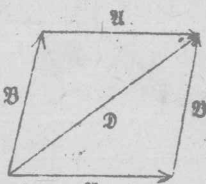

Fig. 2.

Fügt man eine beliebige Anzahl von Vektoren so zusammen, daß der Anfang des einen mit dem Ende des andern zusammenfällt, so folgt aus (1) bis (4), daß die Strecke, die den Anfangspunkt des ersten Vektors mit dem Endpunkt des letzten verbindet, nach Größe und Richtung gleich der Summe der gegebenen Vektoren sein wird. Da man jeden der zu addierenden Vektoren beliebig klein nehmen kann, so geht hieraus ohne weiteres die Bedeutung des Integrals

$$\mathfrak{A} = \int_a^b d\mathfrak{l} \tag{5}$$

hervor, wo $d\mathfrak{l}$ eines der gerichteten Linienelemente einer beliebigen Raumkurve bedeutet. Dieser Vektor $\mathfrak{A}$ ist nichts anderes als der Vektor vom Anfangspunkt a zum Endpunkt b der gegebenen Kurve.

Ist die Kurve geschlossen, so folgt unmittelbar

$$\mathfrak{A} = \int_a^a d\mathfrak{l} = \int_L d\mathfrak{l} = 0 \tag{6}$$

Hierbei bedeutet L, wie später stets in diesem Buche, eine geschlossene Kurve.

2. **Einführung eines rechtwinkligen Achsenkreuzes.** Aus den Erörterungen in Nr. 1 ist ersichtlich, das wir einen Vektor $\mathfrak{A}$ als die Summe einer beliebigen Anzahl von Vektoren auffassen können. Im

besonderen können wir $\mathfrak{A}$ als Summe von drei nicht komplanaren („ebenenfremden") Vektoren darstellen, d. h. von Vektoren, die nicht einer Ebene parallel sind. Dieser Fall ist deshalb wichtig, weil die Kenntnis dreier solcher Vektoren genügt, um einen Vektor $\mathfrak{A}$ im Raume vollständig zu bestimmen. Die Beträge dieser drei Vektoren nennt man die Komponenten des Vektors $\mathfrak{A}$ längs der drei nicht komplanaren Richtungen.

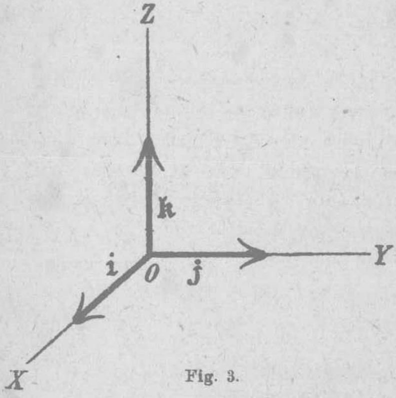

Fig. 3.

Wir nehmen jetzt diese drei Richtungen senkrecht zueinander an, d. h. führen ein rechtwinkliges Achsenkreuz X, Y, Z ein. Bezeichnen wir die positiven oder negativen Zahlenwerte der Komponenten von $\mathfrak{A}$ längs der Achsen X, Y, Z mit A_1, A_2, A_3 und die Einheitsvektoren längs derselben Achsen mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, so erhalten wir nach der Erklärung der Addition von Vektoren und aus dem Begriffe des Einheitsvektors (siehe Einleitung)

$$\mathfrak{A} = A_1\mathfrak{i} + A_2\mathfrak{j} + A_3\mathfrak{k}, \tag{7}$$

wobei die Komponenten sich berechnen aus:

$$A_1 = |\mathfrak{A}| \cos(\mathfrak{A}x); \quad A_2 = |\mathfrak{A}| \cos(\mathfrak{A}y); \quad A_3 = |\mathfrak{A}| \cos(\mathfrak{A}z) \tag{8}$$

und wobei $A_1\mathfrak{i}$ mit $\mathfrak{i}$ gleichgerichtet und A_1-mal so lang ist. (Vgl. Nr. 3 Die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ nennt man Grundvektoren.

Jedes Achsenkreuz, das wir später benützen werden, soll ein so genanntes Rechtssystem sein. Hierbei erscheint die kürzeste Drehung, die man der X-Achse um die Z-Achse herum erteilen muß, um sie zum Zusammenfallen mit der Y-Achse zu bringen, rechtsläufig, also im Drehsinn des Uhrzeigers, wenn man in Richtung der positiven Z-Achse blickt. (Siehe Fig. 3, wo die Grundvektoren in der richtigen Lage eingezeichnet sind.)

Dieses Kreuz kann auch durch Daumen (X-Achse), Mittelfinger (Y-Achse) und Zeigefinger (Z-Achse) der linken Hand dargestellt werden. Auf diese „Fingerregel" worden wir uns weiterhin öfters berufen.

3. Multiplikation von Vektoren. Skalares Produkt. Die Begriffe Einheitsvektor und Betrag eines Vektors legen folgende Erklärung der Multiplikation eines Vektors mit einem skalaren Faktor nahe: Es ist

$$\mathfrak{A} = m\mathfrak{a} \tag{9}$$

ein Vektor, dessen Richtung mit der von $\mathfrak{a}$ zusammenfällt und der den Betrag

$$(10) \qquad |\mathfrak{A}| = m\,|\mathfrak{a}|$$

hat. Durch (9) und (10) ist diese Art der Multiplikation vollständig bestimmt. Sie folgt denselben Regeln wie die Multiplikation von Zahlen, es gelten hier also das assoziative und das kommutative Gesetz, d. h. es ist

$$(a) \qquad m(n\mathfrak{a}) = (mn)\mathfrak{a}, \qquad n\mathfrak{a} = \mathfrak{a}n,$$

und die distributiven Gesetze:

$$(b) \qquad n(\mathfrak{a} + \mathfrak{r}) = n\mathfrak{a} + n\mathfrak{r}, \qquad (m + n)\mathfrak{a} = m\mathfrak{a} + n\mathfrak{a}.$$

Der Leser möge diese Sätze an Figuren selbst beweisen.

Wir gehen jetzt zu dem skalaren oder inneren Produkt zweier Vektoren über. Unter einem solchen Produkt verstehen wir einen Skalar, dessen Wert gleich ist dem Produkt der Beträge der gegebenen Vektoren, multipliziert mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels. Ein solches Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Nach Definition haben wir also

$$(11) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Hieraus ist leicht zu ersehen, daß

$$(c) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$$

ist, d. h. bei der skalaren Multiplikation zweier Vektoren wird das kommutative Gesetz befolgt. Auch das distributive Gesetz bleibt erfüllt. Aus einer einfachen geometrischen Konstruktion (Projektion von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{C}$) schließt man:

$$(d) \qquad (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ senkrecht zueinander, dann folgt aus (11), daß das skalare Produkt dieser beiden Vektoren gleich Null ist. Also ist für $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$:

$$(12) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0.$$

Es folgt hieraus im Hinblick auf Nr. 2

$$(e) \qquad \mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{j}\mathfrak{k} = \mathfrak{k}\mathfrak{i} = 0.$$

Bezeichnen wir den Betrag von $\mathfrak{A}$ durch A und den Einheitsvektor längs $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}_0$, d. h. setzen

$$\mathfrak{A} = A\mathfrak{A}_0,$$

dann ergibt (11)

$$(13) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{A} = A^2 \equiv \mathfrak{A}^2, \qquad (14) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{A}_0 = A.$$

(f) Deshalb ist $$\mathfrak{i}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\mathfrak{k} = 1.$$

4. Das Vektorprodukt. Gegeben sei ein ebenes Flächenelement. Dieses Element kann man von zwei Seiten aus betrachten. Die eine der Seiten soll als die positive, die andere als die negative bezeichnet werden. Auf der positiven Seite errichten wir als Normale den Einheitsvektor $\mathfrak{n}$, dessen positive Richtung vom Flächenelement nach außen festgesetzt wird. Das Flächenelement wird von einer Kurve begrenzt, deren positive Umlaufsrichtung einer rechtsläufigen Drehung um $\mathfrak{n}$ als Achse nach Nr. 2 entsprechen soll. Wir bezeichnen das Flächenelement durch einen Vektor $d\mathfrak{f}$, dessen Betrag df gleich dem Flächeninhalt des Elementes ist und der dieselbe Richtung wie $\mathfrak{n}$ hat (Fig. 4). Demnach ist

(15) $$|d\mathfrak{f}| = df, \qquad d\mathfrak{f} = df\mathfrak{n}.$$

Fig. 4.

Da eine Summe von Vektoren wieder ein Vektor ist, so wird das Integral

(a) $$\int_f d\mathfrak{f} = \mathfrak{C}$$

über eine nicht geschlossene Fläche f durch einen Vektor $\mathfrak{C}$ dargestellt werden können.

Wir wollen den Fall untersuchen, daß f eben ist und zwar ein Parallelogramm, dessen Seiten die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind. Diese folgen aufeinander in der in Fig. 5 angegebenen Weise und bestimmen hierdurch die Umlaufsrichtung um das Parallelogramm.

Setzen wir jetzt den Wert von $d\mathfrak{f}$ aus (15) in (a) ein und beachten, daß für alle Elemente $\mathfrak{n}$ konstant ist, so erhalten wir für unsere spezielle Annahme

(16) $$\mathfrak{C} = \mathfrak{n} \cdot |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \sin(\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Durch die Umlaufsrichtung, die durch den Pfeil in Fig. 5 angezeigt ist, bestimmt sich auch die positive Richtung von $\mathfrak{n}$. Sie weist von der Zeichenebene hin zum Beschauer.

Die rechte Seite von (16) bezeichnet man gewöhnlich mit

(17) $$\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$$

und nennt diesen Ausdruck das Vektorprodukt oder das vektorische Produkt der beiden Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{C}$ seiner Definition nach ein Vektor ist, so können wir sagen daß das vektorische Produkt zweier Vektoren, im Gegensatz zu dem skalaren Produkt, wieder ein

Vektor ist. Die Reihenfolge der Vektoren in (17), die der der Fig. 5 entspricht, ergibt uns mit Hilfe der Fingerregel (für die linke Hand, Daumen — erster Vektor in der Klammer, Mittelfinger — zweiter Vektor) sofort die Richtung von $\mathfrak{C}$ (Zeigefinger) in Übereinstimmung mit (16).

Aus dieser Fingerregel folgt, daß

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{A}] = -[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \tag{18}$$

ist. Die linke Seite entspricht der Fig. 6.

Der Ausdruck (18) zeigt, daß das kommutative Gesetz bei einem Vektorprodukt nicht erfüllt wird.

Wir wenden uns jetzt wieder zu dem Integral (a), setzen aber jetzt voraus, daß f eine geschlossene Fläche bedeutet, und bezeich-

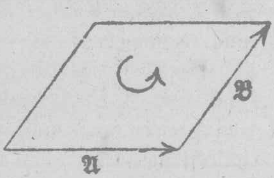

Fig. 5.

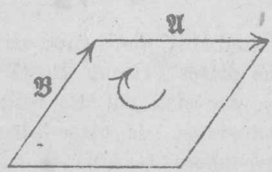

Fig. 6.

nen diese, wie auch späterhin jede geschlossene Fläche, mit F. Die Richtung von $d\mathfrak{f}$ soll der äußeren Normale der Oberfläche entsprechen. Dies wollen wir im folgenden bei ähnlichen Integrationen stets voraussetzen.

Wir bestimmen das skalare Produkt des Integrals $\mathfrak{S}$ in (a) mit einem konstanten Einheitsvektor $\mathfrak{a}_0$, d. h.

$$A = \mathfrak{a}_0\mathfrak{C} = \int_F \mathfrak{a}_0 d\mathfrak{f}. \tag{b}$$

Dabei haben wir den konstanten Vektor $\mathfrak{a}_0$ unter das Integralzeichen setzen können. A bedeutet nichts anderes als die Summe der skalaren Produkte der einzelnen $d\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{a}_0$, oder nach (11) die Summe der Projektionen der einzelnen Flächenelemente der geschlossenen Fläche F auf eine zu $\mathfrak{a}_0$ senkrechte Ebene.

Konstruieren wir einen Zylinder, dessen Erzeugende senkrecht zu dieser Ebene ist und die Oberfläche F berührt, so schneidet der Zylinder aus dieser Ebene dasjenige Stück heraus, das gerade mit den Projektionen der $d\mathfrak{f}$ belegt wird. Es wird aber doppelt belegt sein und zwar mit Projektionen von entgegengesetztem Vorzeichen, da wir als positive Normale die äußere angenommen haben und infolgedessen als positive Seite der Flächenelemente $d\mathfrak{f}$ die äußere Seite. Deshalb wird das Integral (b) gleich Null sein für eine beliebige geschlossene Fläche F. Da aber die Richtung von $\mathfrak{a}_0$ und demnach auch die Lage der entsprechenden Ebene vollkommen willkürlich ist, so müssen wir hieraus schließen, daß auch

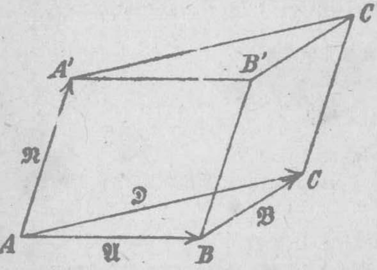
Fig. 7.

$$(19) \qquad \int\limits_F d\mathfrak{f} = 0$$

sein wird für jede geschlossene Fläche F.

Um jetzt zu beweisen, daß das vektorische Produkt distributiv ist, konstruieren wir aus drei ebenenfremden Vektoren $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ein Prisma Fig. 7, dessen Kanten BB', CC' und AA' gleich und parallel $\mathfrak{R}$ sind, und wenden auf die Oberfläche dieses Prismas die Gleichung (19) an. Der Teil des Integrals (19), der sich auf die beiden Flächen ABC und $A\,B'C'$ bezieht, verschwindet, da diese Flächen parallel und gleich groß sind und entgegengesetzte Normalen haben. Wir erhalten deshalb

$$(\text{c}) \qquad \int\limits_{ABB'A'} d\mathfrak{f} + \int\limits_{BCC'B'} d\mathfrak{f} + \int\limits_{CAA'C'} d\mathfrak{f} = 0.$$

Nach den Ausführungen bei der Ableitung von (16) ist aber

$$\int\limits_{ABB'A'} d\mathfrak{f} = [\mathfrak{A}\mathfrak{R}]$$

und, da BB' gleich $\mathfrak{R}$ ist,

$$\int\limits_{BCC'B'} d\mathfrak{f} = [\mathfrak{B}\mathfrak{R}].$$

Für das letzte Integral in (c) folgt, da AC gleich $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ist:

$$\int\limits_{CAA'C'} d\mathfrak{f} = -[\mathfrak{D}\mathfrak{R}].$$

Das Vorzeichen ist negativ, weil die Normale zur Fläche $CAA'C'$ entgegengesetzt dem Vektorprodukt $[\mathfrak{D}\mathfrak{R}]$ gerichtet ist.

Demnach ist

$$(20) \qquad [\mathfrak{D}\mathfrak{R}] = [(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{R}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{R}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{R}],$$

woraus folgt, daß das distributive Gesetz bei der vektorischen Multiplikation erfüllt wird.

Aus (16) ergibt sich weiter, daß das Vektorprodukt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

verschwindet, wenn die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleich- oder entgegengerichtet sind. Also ist für $\mathfrak{A} \parallel \mathfrak{B}$:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = 0. \tag{21}$$

Endlich ist ohne weiteres klar, daß man einen skalaren Faktor m sowohl vor, als auch in die eckigen Klammern eines Vektorproduktes setzen kann, d. h. es ist

$$m[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = [m\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = [\mathfrak{A}m\mathfrak{B}]. \tag{22}$$

Als Beispiele von Vektorprodukten können wir solche aus den Grundvektoren in Nr. 2 bilden und erhalten

$$[\mathfrak{i}\mathfrak{i}] = 0;\ [\mathfrak{j}\mathfrak{j}] = 0;\ [\mathfrak{k}\mathfrak{k}] = 0;\ \mathfrak{k} = [\mathfrak{i}\mathfrak{j}];\ \mathfrak{j} = [\mathfrak{k}\mathfrak{i}];\ \mathfrak{i} = [\mathfrak{j}\mathfrak{k}], \tag{d}$$

wovon man sich mit Hilfe der Fingerregel überzeugen kann.

5. Produkte von drei und vier Vektoren. Aus (9) S. 4 folgt unmittelbar, wenn wir statt m das skalare Produkt $m = \mathfrak{C}\mathfrak{E}$ einsetzen

$$\mathfrak{A}m = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}\mathfrak{E} = \mathfrak{B}. \tag{23}$$

Hierbei ist

$$|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{C}| \cdot |\mathfrak{E}| \cos(\mathfrak{C}\mathfrak{E}), \tag{24}$$

während die Richtung von $\mathfrak{B}$ die von $\mathfrak{A}$ oder die entgegengesetzte ist.

Ersetzen wir bei einem Vektor $p\mathfrak{E}$ die skalare Größe p durch $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, so erhalten wir ebenso

$$p\mathfrak{E} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{E} = \mathfrak{D} \tag{25}$$

und

$$|\mathfrak{D}| = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{C}| \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{C}). \tag{26}$$

Die Richtung von $\mathfrak{D}$ bestimmt sich durch die von $\mathfrak{E}$. Es ist demnach ersichtlich, daß die Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ völlig verschieden sind, obwohl sie aus denselben drei Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{C}$ gebildet sind. Diese Verschiedenheit wird durch die Stellung des Punktes in (23) und (25) gekennzeichnet.

Wir wollen jetzt das skalare Produkt m eines Vektors $\mathfrak{A}$ mit einem Vektorprodukt

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{B}\mathfrak{E}]$$

untersuchen, d. h.

$$m = \mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{E}]. \tag{a}$$

Vergegenwärtigen wir uns die Bedeutung von $\mathfrak{C}$ nach Nr. 4, so sehen wir, daß m das Volumen eines Quaders vorstellt, dessen Kanten durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{E}$ gebildet werden. Dasselbe Volumen wird aber auch durch $\mathfrak{B}[\mathfrak{E}\mathfrak{A}]$ und $\mathfrak{E}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ dargestellt; wir können deshalb schreiben

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{E}] = \mathfrak{E}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{E}\mathfrak{A}], \tag{27}$$