Progress in Mathematics
311

Vincent Franjou
Antoine Touzé
Editors

# Lectures on Functor Homology

Birkhäuser

Vincent Franjou • Antoine Touzé
Editors

# Lectures on Functor Homology

Birkhäuser

*Editors*
Vincent Franjou
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
Université de Nantes
Nantes, France

Antoine Touzé
Laboratoire Paul Painlevé
Université Lille 1
Villeneuve d'Ascq, France

ISSN 0743-1643 ISSN 2296-505X (electronic)
Progress in Mathematics
ISBN 978-3-319-21304-0 ISBN 978-3-319-21305-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-319-21305-7

Library of Congress Control Number: 2015956619

Mathematics Subject Classification (2010): 14L, 18E, 18G, 19D55, 20G10, 20J, 55U99, 55Q

Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London


Printed on acid-free paper

Springer International Publishing AG Switzerland is part of Springer Science+Business Media (www.birkhauser-science.com)

**Progress in Mathematics**
Volume 311



More information about this series at http://www.springer.com/series/4848

# Contents

**Prerequisites of Homological Algebra**

*A. Touzé*

Progress in Mathematics, Vol. 311, 1–6


# Introduction

Vincent Franjou and Antoine Touzé

This book is an account of series of lectures held at the conference on functor homology, which took place in Nantes in April, 2012. Functor homology is shorthand for homological algebra in functor categories, a topic that potentially covers a large field of interests. The series presented three different fields where functor homology has recently played a significant role. For each of these applications, the functorial viewpoint provides both insights and new methods for tackling difficult mathematical problems.

The central role is played by the notion of polynomial functor and variants of this notion. The notion of polynomial functors has two quite independent origines. The first one from the work of Schur [Sch01] in representation theory. The second one from the work of Eilenberg and Mac Lane [EML54] in algebraic topology. For precise definitions, the reader can wait and read the presentation in each lecture. For this introduction, let us insist on the idea that polynomial functors are tame functors, good companions like the symmetric powers $S^d$ or the exterior powers $\Lambda^d$, considered as endofunctors of the category of modules over a commutative ring $R$.

In the first series of lectures by Aurélien Djament, polynomial functors appear in connection with the (co)homology of classical groups and their stabilization. To be specific, let us take the family of symplectic groups $Sp_n(R)$. A group $Sp_n(R)$ acts naturally on $R^{2n}$, defining its standard representation. The $d$th symmetric power of this representation, $S^d(R^{2n})$, inherits an action of $Sp_n(R)$ – mind it, this is a consequence of the fact that the symmetric power is a functor. Consider the (co)homology of the discrete group $Sp_n(R)$ with coefficients in this representation; this is denoted by: $\mathrm{H}(Sp_n(R), S^d(R^{2n}))$. Djament's theorem tells us that this homological invariant, if $n$ is large enough, can be computed using only the homology with trivial coefficients $\mathrm{H}(Sp_n(R))$, and homological computations in the category of functors $\mathcal{F}_R$. The fact that the symmetric power functor $S^d$ is polynomial is crucial in the proof of this result, and the result is indeed valid when $S^d$ is replaced by any other polynomial functor. This provides much more than a conceptual expression of generic homology: such a bridge between stable homology of classical groups and functor homology is effective to perform computations. Indeed, several surprisingly powerful tools are available to do homological algebra in $\mathcal{F}_R$, as was explained in the collected lectures [FFPS03]. Djament's results extends our understanding of group cohomology by functor cohomology, as initiated by Suslin [FFSS99, Appendix] and Scorichenko [Sco00].

Wilberd van der Kallen's series of lectures study the cohomology of algebraic groups. This cohomology is sometimes called rational cohomology, or algebraic cohomology. The cohomology of an algebraic group $G$ is quite different [Tou, Ex. 2.57] from the cohomology of $G$ considered as a discrete group, that we have encountered in the previous paragraph. In particular its coefficients are rational (or algebraic) representations of the group $G$. However, the two cohomologies, the cohomology of the discrete group and the algebraic cohomology, are related. This is the topic of the celebrated result of Cline, Parshall, Scott, and van der Kallen [CPSvdK77] when $R$ is a finite field. Friedlander and Suslin [FS97] designed a category of functors to study the cohomology of algebraic groups, and of $GL_n(R)$ in particular. It is the category of strict polynomial functors $\mathcal{P}_R$. The category $\mathcal{P}_R$ is an algebraic analogue of the category of ordinary functors $\mathcal{F}_R$, and the relation between the cohomology of classical algebraic groups on one hand, and the cohomology of their discrete counterpart on the other hand, can be seen and measured at the level of the corresponding functor categories [FFSS99]. The relevance of functor cohomology calculations to algebraic cohomology has been a major step. It allowed Friedlander and Suslin to prove finite generation of the cohomology of finite group schemes [FS97] and thus initiate a theory of support varieties [SFB97]. It eventually lead to the solution [TvdK10] of the general cohomological finite generation problem, the generalization of Hilbert's fourteenth problem presented in van der Kallen's series.

Roman Mikhailov's series of lectures also show polynomial functors and homological algebra in action, although the topic and its treatment might seem quite different from the two previous ones. The aim here is to compute topological invariants: homotopy, homology of topological spaces, through derived functors of non-additive functors [DP61]. Of course, the non-additive functors we have in mind here are polynomial functors like $S^d$ and $\Lambda^d$.

An emblematic example of functorial techniques is Simson and Tyc's use [ST70] of the (exact) Koszul complex:

$$0 \to \Lambda^d \to \cdots \Lambda^{d-i} \otimes S^i \to \Lambda^{d-i-1} \otimes S^{i+1} \to \cdots S^d \to 0$$

together with the fact that the stable derived functors $L_*^{st}(F \otimes G)$ of a tensor product of reduced functors vanish [DP61, Korollar 5.20]. They prove an isomorphism, of degree $d-1$ (or décalage)

$$L_*^{st}\Lambda^d(-) \simeq L_*^{st}S^d(-)\ .$$

Indeed, to prove the décalage, slice the Koszul complex into successive short exact sequences. Then, on each short exact sequence, use the long exact sequence for the stable derived functors $L_*^{st}$. Simson's argument was successfully imported (or rediscovered) in the world of functors. Indeed, by the fundamental result of Pirashvili [Pir88] the cohomology groups, in $\mathcal{F}_R$, of a tensor product $\mathrm{Ext}^*(S^1, F \otimes G)$

similarly vanish. The argument was extended to compute [FLS94] the algebra $Ext^*_{\mathcal{F}_R}(S^1, S^1)$ (and many other cohomology groups in $\mathcal{F}_R$ as well). Scorichenko's vanishing theorem, as presented in A. Djament's third lecture, is an advanced form of this sort of vanishing result.

Derived functors of non-additive functors are also directly related to functor cohomology in the category $\mathcal{P}_R$ of *strict* polynomial functors. For example, a correspondence recently found [Tou13b] yields natural isomorphisms

$$L_iF(R,1) \simeq \mathrm{Ext}^{d-i}_{\mathcal{P}_R}(\Lambda^d, F) , \qquad L_iF(R,2) \simeq \mathrm{Ext}^{2d-i}_{\mathcal{P}_R}(S^d, F) ,$$

for all homogeneous strict polynomial functors $F$ of degree $d$.

Roman Mikhailov's series of lectures appeals to modern theory and makes better use of naturality, to reach calculations, that classical theory could not reach. For example, natural transformations and extension groups between functors are made explicit through a new combinatorial description of polynomial functors [BDFP01]. Such combinatorial descriptions of polynomial functors are now available in a much broader context [HPV]. They rely on Pirashvili's Dold–Kan type theorem [Pir00], that was unavailable to Eilenberg and Mac Lane in their original definition of polynomial functors [EML54]. Modern theory thus feeds back the classical theory.

The links between functor homology and the three fields mentioned above reveal common structure. However, each of these fields requires specific adaptations, and therefore they enrich the functorial viewpoint. These applications of functor homology do not constitute an exhaustive list. Other applications already exists, for example to the Steenrod algebra [FFPS03], and hopefully new applications will be found in the future. By gathering these lectures together, we hope to give the reader a feeling of the functorial viewpoint, and new insight to apply on his favourite problems.

We now focus on the specific content of the different parts of this book.

Aurélien Djament's lectures explains correspondences between functor homology, and stable homology (with coefficients) of families of discrete groups. Djament's first lecture presents a general setup [DV10, Dja12] designed to simply lead to explicit and highly nontrivial results. The lectures thus give a smooth introduction to the field, albeit providing all the technical details, and they encompass various fundamental results of Betley, Suslin, and of Scorichenko. This is already illustrated by Lecture 2. Scorichenko's cancellation theorem [Sco00] is generalized and strengthened in Lecture 3. It is presented in a way that makes this unpublished result available for general use. Lecture 4 contains the main result. The text also presents motivations, and it includes in the final lecture sample applications and calculations. On the way, the text surveys other related topics, such as stable homology of groups with trivial coefficients. The density of the lectures and the clarity of exposition meet the ambition of a reference paper on the subject.

Wilberd van der Kallen's lectures deal with the proof [TvdK10] of the cohomological finite generation conjecture for reductive algebraic groups. The lectures start with a historical introduction. They proceed by introducing and explaining many mathematical objects which play a role in the conjecture's proof: representations of group schemes and cohomology, with an emphasis on the General Linear Group; and Friedlander's and Suslin's strict polynomial functors. The last lecture presents a key ingredient in the proof of finite generation, that is the construction of certain "universal cohomology classes" using functor category tools. The lectures thus provide the non-expert reader with the background she needs when reading the original proof.

The core of the lectures, however, deals with a related but slightly different topic, namely a formality conjecture of Chałupnik. The formality conjecture is a strong form of a conjecture by Touzé on the effect of Frobenius twists on extension groups, in Friedlander's and Suslin's category of strict polynomial functors. This is strongly connected to cohomological finite generation, since this description leads [Tou13a] to a second generation, more conceptual, proof of the existence of the universal classes, which come as a key ingredient to prove the cohomological finite generation. The penultimate lecture by van der Kallen presents a proof of the formality conjecture, and it clarifies several of its more subtle points.

Roman Mikhailov's lectures start with a presentation of polynomial functors between abelian groups. Mikhailov takes seriously the combinatorics of polynomial functors in [BDFP01]. One of the innovative points of his lectures is the use of this point of view to perform computations. He applies this technique to problems coming from algebraic topology: the functorial description of low degree homology of abelian groups in Section 3, or of low stable homotopy of Eilenberg–Mac Lane spaces in Section 4, and related algebraic problems about derived functors of non-additive functors in Section 5. The last section gives examples of the use of naturality to compute spectral sequences (differentials and extension problems).

The book ends with a short course in homological algebra, by Antoine Touzé. The first part of the course is a presentation of derived functors. This concept allows a unified presentation of the many different objects of study of the book. Emphasis is then put on the analogies, similarities, and also differences between the various (co)homological notions that appear in the three main series of lectures. The second part of the course is a short introduction to spectral sequences, from the user's viewpoint. Spectral sequences are especially useful when coming to explicit computations, and they prove so in every series of the book. Little originality is claimed here. The purpose is to ease access to the book for everyone, and to allow this book to be used as a first course in homological algebra for the absolute beginner. We believe that meeting such objectives largely contributed to the success of the meeting in Nantes.

## References


[BDFP01] H.-J. Baues, W. Dreckmann, V. Franjou, and T. Pirashvili. Foncteurs polynomiaux et foncteurs de Mackey non linéaires. *Bull. Soc. Math. France*, 129(2):237–257, 2001.

[CPSvdK77] E. Cline, B. Parshall, L. Scott, and W. van der Kallen. Rational and generic cohomology. *Invent. Math.*, 39(2):143–163, 1977.

[Dja12] A. Djament. Sur l'homologie des groupes unitaires à coefficients polynomiaux. *J. K-Theory*, 10(1):87–139, 2012.

[DP61] A. Dold and D. Puppe. Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 11:201–312, 1961.

[DV10] A. Djament and C. Vespa. Sur l'homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4), 43(3):395–459, 2010.

[EML54] S. Eilenberg and S. Mac Lane. On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation. *Ann. of Math.* (2), 60:49–139, 1954.

[FFPS03] V. Franjou, E.M. Friedlander, T. Pirashvili, and L. Schwartz. *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, volume 16 of *Panoramas et Synthèses* [*Panoramas and Syntheses*]. Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[FFSS99] V. Franjou, E.M. Friedlander, A. Scorichenko, and A. Suslin. General linear and functor cohomology over finite fields. *Ann. of Math.* (2), 150(2):663–728, 1999.

[FLS94] V. Franjou, J. Lannes, and L. Schwartz. Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis. *Invent. Math.*, 115(3):513–538, 1994.

[FS97] E.M. Friedlander and A. Suslin. Cohomology of finite group schemes over a field. *Invent. Math.*, 127(2):209–270, 1997.

[HPV] M. Hartl, T. Pirashvili, and C. Vespa. Polynomial functors from algebras over a set-operad and non-linear mackey functors. *Int. Math. Res. Not.*, (to appear).

[Pir88] T. Pirashvili. Higher additivizations. *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR*, 91:44–54, 1988.

[Pir00] T. Pirashvili. Dold–Kan type theorem for Γ-groups. *Math. Ann.*, 318(2):277–298, 2000.

[Sch01] I. Schur. *Thesis* (1901), volume Gesammelte Abhandlungen. Band I. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973. Herausgegeben von Alfred Brauer und Hans Rohrbach.

[Sco00] A. Scorichenko. *Stable K-theory and functor homology over a ring.* PhD thesis, Evanston, 2000.

[SFB97] A. Suslin, E.M. Friedlander, and C.P. Bendel. Infinitesimal 1-parameter subgroups and cohomology. *J. Amer. Math. Soc.*, 10(3):693–728, 1997.

[ST70] D. Simson and A. Tyc. On stable derived functors. II. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 18:635–639, 1970.

[Tou] A. Touzé. Prerequisites of homological algebra. This volume.

[Tou13a] A. Touzé. A construction of the universal classes for algebraic groups with the twisting spectral sequence. *Transform. Groups*, 18(2):539–556, 2013.

[Tou13b] A. Touzé. Ringel duality and derivatives of non-additive functors. *J. Pure Appl. Algebra*, 217(9):1642–1673, 2013.

[TvdK10] A. Touzé and W. van der Kallen. Bifunctor cohomology and cohomological finite generation for reductive groups. *Duke Math. J.*, 151(2):251–278, 2010.

Vincent Franjou
Université de Nantes
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (UMR 6629)
Faculté des Sciences
2, rue de la Houssinière
BP 92208
F-44322 Nantes cedex 3, France
e-mail: `Vincent.Franjou@univ-nantes.fr`

Antoine Touzé
LAGA, CNRS (UMR 7539) Université Paris 13
99, Av. J.-B. Clément
F-93430 Villetaneuse, France
e-mail: `Touze@math.univ-paris13.fr`

Progress in Mathematics, Vol. 311, 7–39


# Homologie stable des groupes à coefficients polynomiaux

Aurélien Djament

**Abstract.** This series of lectures deals with stable homology of (discrete) groups with coefficients twisted by a suitable functor. By *stable* homology we mean the colimit of the homology of a nice sequence of groups, such as the symmetric groups or as the general linear groups over a fixed ring. The lectures' aim is to express stable homology with twisted coefficients using stable homology with untwisted coefficients and functor homology.

**Mathematics Subject Classification (2010).** 18A25, 20J06, 18G15, 18A40.

**Keywords.** Group homology, functor categories, polynomial functors, cross effects, hermitian spaces, derived Kan extension.

*Remarque.* Les parties écrites en caractères linéaux peuvent être omises en première lecture.

Les cinq sections (correspondant aux cinq cours) sont conçues pour pouvoir être abordées de manière assez largement indépendante.

## 1. Introduction

**Abstract.** *The introductory lecture sets the stage (the groups are the automorphism groups of sums of copies of a given object in a suitable symmetric monoidal category), and it gives theoretic results and computational or qualitative consequences of the good features of functor homology. It also gives a quick overview of a few related topics (homological stability, algebraic $K$-theory...).*

Ce mini-cours traite d'homologie des groupes *discrets*, essentiellement à coefficients tordus (i.e., avec une action non triviale du groupe sur les coefficients). On s'intéresse surtout à des phénomènes *stables*, ou *génériques*, c'est-à-dire qui ne

L'auteur sait gré à Christine Vespa, Antoine Touzé et Vincent Franjou d'échanges utiles à l'amélioration des premières versions de ce texte.

concernent pas un groupe en particulier (dont on saura souvent dire très peu du point de vue homologique), mais une famille de groupes.

Précisons un peu. Certaines tours de groupes, i.e., suites $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ munies de morphismes de groupes $G_n \to G_{n+1}$, sont particulièrement intéressantes du point de vue de l'homologie. Pour nous, il s'agira essentiellement des suites suivantes :

1. la suite des groupes symétriques $\Sigma_n$ (permutations de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$), où $\Sigma_n$ est plongé dans $\Sigma_{n+1}$ comme le sous-groupe des permutations laissant $n+1$ invariant ;
2. la suite des groupes linéaires $GL_n(A)$ sur un anneau $A$, où $GL_n(A)$ est plongé dans $GL_{n+1}(A)$ par $M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. la suite des groupes orthogonaux $O_{n,n}(A)$ ou des groupes symplectiques $Sp_{2n}(A)$, où $A$ est un anneau commutatif, où les plongements sont donnés comme précédemment – on considère ici par convention les formes quadratique et symplectique dont les matrices sont constituées de $n$ blocs diagonaux égaux à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ respectivement (cet exemple est susceptible de variations évidentes).

La suite de groupes d'homologie

$$H_*(G_0) \to H_*(G_1) \to \cdots \to H_*(G_n) \to H_*(G_{n+1}) \to \cdots$$

(volontairement, on ne précise pas les coefficients à ce stade) donne lieu à plusieurs questions fondamentales :

1. sait-on la calculer complètement ? (La réponse n'est qu'exceptionnellement positive, même lorsque les coefficients sont constants, néanmoins cela peut arriver dans quelques cas particulièrement favorables.)
2. Sait-on calculer sa colimite, appelée *homologie stable* de la suite de groupes ? (C'est encore, souvent, une question très difficile, mais on sait dire beaucoup plus de choses que pour la question précédente.)
3. La suite se stabilise-t-elle (c'est-à-dire que, pour tout $d \in \mathbb{N}$, il existe $N$ tel que $H_d(G_n) \to H_d(G_{n+1})$ soit un isomorphisme pour $n \geq N$), et si oui avec quelles bornes ? (L'un des principaux objectifs est, en l'absence de réponse positive à la première question, de tirer des renseignements sur $H_*(G_n)$, à $n$ fixé, de l'homologie stable.)

Hormis dans cette première séance introductive, nous n'aborderons que la deuxième question, *dans le cas de coefficients tordus favorables*, en supposant connue l'homologie stable à coefficients constants : c'est ce pour quoi l'homologie des foncteurs a montré son efficacité. Pour l'instant, rien de convaincant n'a été réalisé à l'aide de l'homologie des foncteurs pour aborder l'homologie à coefficients constants de groupes discrets ; toutefois, les raisons conceptuelles de la dichotomie observée entre coefficients constants et tordus (polynomiaux en un sens adéquat, en général) demeurent obscures.

*Remarque* 1.1. Nous ne parlerons le plus souvent que d'homologie, qui possède la propriété commode de commuter aux colimites filtrantes (ainsi, on peut voir l'homologie stable de notre tour de groupes comme l'homologie de sa colimite) ; néanmoins, des résultats tout à fait analogues valent en cohomologie.

L'un des intérêts de l'homologie stable est de *structurer* en général davantage la situation que l'homologie individuelle d'un des groupes. Ainsi, dans tous les cas susmentionnés, au moins lorsque les coefficients sont pris sur un corps commutatif (avec action triviale), on dispose d'une structure d'algèbre de Hopf graduée connexe commutative et cocommutative. Ce type d'observation peut s'avérer crucial pour aborder les problèmes posés (par exemple, le calcul de l'homologie des groupes symétriques présenté dans [AM04] utilise les résultats de structure des algèbres de Hopf sur $\mathbb{F}_p$).

*Remarque* 1.2. Cette situation rappelle d'une certaine manière celle de l'homotopie stable par rapport à l'homotopie instable : on dispose de résultats de stabilisation de la colimite qui définit les groupes d'homotopie stable à partir des groupes d'homotopie ordinaires pour des espaces possédant de bonnes propriétés de finitude (théorème de Freudenthal) ; la catégorie homotopique des spectres possède une structure plus riche et maniable (c'est une catégorie triangulée) que la catégorie homotopique des espaces topologiques pointés, qui n'est même pas additive.

## 1.1. Un cadre raisonnable : homologie de groupes d'automorphismes dans une catégorie monoïdale symétrique

(On renvoie à [ML98] pour les définitions et propriétés fondamentales des catégories monoïdales. Le cadre présenté ici, comme une partie significative des résultats donnés dans les exposés suivants, provient de [DV10].)

Soit $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie monoïdale symétrique (bien qu'on note $\oplus$ le foncteur donnant la structure monoïdale, on ne suppose pas qu'il s'agit d'une somme catégorique). On suppose que l'unité 0 est objet initial (mais pas nécessairement nul) de $\mathcal{C}$[1]. On se donne par ailleurs un objet $X$ de $\mathcal{C}$. Les groupes auxquels on s'intéresse sont les groupes d'automorphismes de la « somme » (au sens de $\oplus$) de copies de $X$ :

$$G_n := \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X^{\oplus n}).$$

On rappelle que l'on peut sans restriction supposer que $\oplus$ est strictement associatif ; en revanche, malgré la symétrie, il faut toujours prendre garde à l'ordre des facteurs. De fait, la symétrie procure un morphisme de groupes $\Sigma_n \to G_n$ (action par permutation des facteurs de la somme).

On fait des $G_n$ une tour de la façon suivante : à un automorphisme $u$ de $X^{\oplus n}$ on associe l'automorphisme $u \oplus Id_X$ de $X^{\oplus n+1}$, ce qui définit un morphisme de groupes $G_n \to G_{n+1}$. Noter que l'on aurait pu choisir d'associer $Id_X \oplus u$, par

1. Rappelons la signification du fait que 0 est objet initial : pour tout objet $c$ de $\mathcal{C}$, il existe un et un seul morphisme de source 0 et de but $c$. Exiger que 0 soit objet final reviendrait à demander qu'il existe un et un seul morphisme de source $c$ et de but 0, pour tout objet $c$ de $\mathcal{C}$. Un objet nul est un objet à la fois initial et final.

exemple, à $u$ plutôt que $u \oplus Id_X$, ce qui fournit un morphisme de groupes *différent*. Néanmoins, ces deux choix sont *conjugués* sous l'action de la transposition $(1 \quad n+1)$ sur $X^{\oplus n+1}$, de sorte qu'ils induisent le *même* morphisme $H_*(G_n) \to H_*(G_{n+1})$ en homologie. Cette observation sera utilisée abondamment.

*Exemple* 1.3.

1. La catégorie des ensembles finis munie de la somme catégorique (réunion disjointe), avec $A$ ensemble à un élément, donne les groupes symétriques. Plusieurs variantes fournissent la même tour de groupes : on peut considérer la sous-catégorie monoïdale avec les mêmes objets et les injections comme morphismes, ou des catégories d'ensembles finis pointés (avec la somme pointée comme structure monoïdale et en prenant pour $X$ un ensemble pointé à deux éléments).
2. Si $A$ est un anneau, la catégorie $\mathbf{P}(A)$ des $A$-modules à gauche projectifs de type fini munie de la somme directe donne, avec $X = A$, la tour des $GL_n(A)$. Nous reviendrons plus tard sur d'autres variantes de catégories de $A$-modules projectifs éventuellement plus adaptées.
3. Soient $A$ est un anneau muni d'une anti-involution, $\epsilon \in \{-1, 1\}$, et $\mathbf{H}_\epsilon(A)$ la catégorie des $A$-modules à gauche projectifs de type fini munis d'une forme $\epsilon$-hermitienne. Explicitement, si l'on note $D$ l'endofoncteur contravariant $\mathrm{Hom}_A(-, A)$ des $A$-modules à gauche projectifs de type fini (on utilise l'anti-involution de $A$ pour convertir l'action naturelle de $A$ à droite sur $\mathrm{Hom}_A(M, A)$, où $M$ est un $A$-module à gauche, en une action à gauche), $D$ possède une propriété d'auto-adjonction : $\mathrm{Hom}_A(M, DN) \simeq \mathrm{Hom}_A(N, DM)$, isomorphisme noté par une barre, qui est une involution pour $M = N$, une forme $\epsilon$-hermitienne sur $M$ est un élément du groupe abélien $\mathrm{S}^2_\epsilon(M)$ quotient de $\mathrm{Hom}_A(M, DM)$ par l'image de l'endomorphisme $x \mapsto \bar{x} - \epsilon x$. (Pour $A$ commutatif avec involution triviale, c'est la notion usuelle d'espace quadratique si $\epsilon = 1$ et symplectique si $\epsilon = -1$.) La structure monoïdale est la somme directe orthogonale ; on prend pour $X$ le $A$-module $A^2$ (auquel il faut penser comme $A \oplus DA$) muni de la forme donnée par la classe de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient ainsi, selon que $\epsilon$ vaut 1 ou $-1$, la tour des groupes unitaires (hyperboliques) ou des groupes symplectiques. Noter qu'on pourrait se restreindre à la sous-catégorie des espaces hermitiens non dégénérés (nous reviendrons également en détail sur tout cela ultérieurement).
4. La catégorie des groupes libres de type fini, avec la somme catégorique (produit libre), s'insère également dans ce formalisme.

*Remarque* 1.4. Dans ces situations, il est naturel de se demander ce qui se passe lorsqu'on remplace les groupes en question par des sous-groupes remarquables comme les groupes alternés dans les groupes symétriques ou les groupes linéaires spéciaux dans les groupes linéaires (sur un anneau commutatif). Ils s'avèrent moins commodes à manier puisqu'ils ne contiennent pas les groupes symétriques, mais peuvent se traiter de façon analogue « à la main » , en utilisant par exemple l'inclusion $GL_n(A) \hookrightarrow SL_{n+1}(A)$ donnée par $M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & (\det M)^{-1} \end{pmatrix}$.

Montrons comment tordre les coefficients à l'aide d'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$. Utilisant que 0 est objet initial de $\mathcal{C}$, on dispose dans $\mathcal{C}$ de morphismes

$$X^{\oplus n} = X^{\oplus n} \oplus 0 \xrightarrow{Id \oplus (0 \to X)} X^{\oplus n} \oplus X = X^{\oplus n+1}$$

(là encore on pourrait choisir d'inclure d'autres facteurs que les $n$ premiers, mais il faut que le choix soit compatible avec celui effectué pour les morphismes $G_n \to G_{n+1}$), d'où des morphismes $F(X^{\oplus n}) \to F(X^{\oplus n+1})$ compatibles aux actions tautologiques de $G_n$ et $G_{n+1}$ et au morphisme $G_n \to G_{n+1}$. On dispose donc de morphismes de groupes abéliens gradués $H_*(G_n; F(X^{\oplus n})) \to H_*(G_{n+1}; F(X^{\oplus n+1}))$ naturels en $F$ ; la colimite de cette suite de morphismes est appelée *homologie stable de la tour* $(G_n)$ *(ou de* $\mathcal{C}$*) à coefficients dans* $F$. Comme homologie et colimites filtrantes commutent, cette homologie stable s'identifie canoniquement à $H_*(G_\infty; F_\infty)$, où $F_\infty$ est la colimite des $F(X^{\oplus n})$ et $G_\infty$ celle des $G_n$.

Le but de ce cours est de montrer comment calculer, dans les exemples fondamentaux précédents, l'homologie stable à partir de $H_*(G_\infty)$ (homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de $G_\infty$), pour $F$ suffisamment raisonnable (en particulier *polynomial* – notion sur laquelle nous reviendrons), en utilisant l'homologie $H_*(\mathcal{C}; F)$ de la catégorie $\mathcal{C}$ à coefficients dans $F$.

**Homologie (de Hochschild) d'un (bi)foncteur.** Si $\mathcal{C}$ est une petite catégorie (ou une catégorie essentiellement petite) et $\Bbbk$ un anneau commutatif fixé, la catégorie $\mathcal{C}$-**Mod** des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers les $\Bbbk$-modules est une catégorie abélienne qui se comporte comme une catégorie de modules (elle a assez d'objets injectifs et projectifs, possèdent des limites et colimites, les colimites filtrantes sont exactes...) : on peut y faire de l'algèbre homologique de façon analogue. On dispose notamment de l'homologie d'un foncteur $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\text{-}\mathbf{Mod}$, notée $H_*(\mathcal{C}; F)$ : $H_0(\mathcal{C}; F)$ est simplement la colimite de $F$, et l'homologie de degré supérieur s'obtient en dérivant à gauche (la colimite est un foncteur exact à droite $\mathcal{C}\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Mod}_\Bbbk$). On dispose également, pour $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\text{-}\mathbf{Mod}$ et $G \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{C} := \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\text{-}\mathbf{Mod}$ de groupes de torsion $\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{C}}(G, F)$, qui dérivent le produit tensoriel au-dessus de $\mathcal{C}$. On dispose enfin, si $B$ est un bifoncteur sur $\mathcal{C}$, c'est-à-dire un objet de $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C})$-**Mod** (on prendra garde que, selon les sources, c'est parfois la première variable, parfois la seconde qui est contravariante !), de l'homologie de Hochschild de $\mathcal{C}$ à coefficients dans $B$, notée $HH_0(\mathcal{C}; B)$. En degré 0, c'est la *cofin* de $B$ (cf. [ML98]), en degré supérieur on dérive à gauche. Si $F$ est un foncteur covariant sur $\mathcal{C}$ et $G$ un foncteur contravariant, sur le bifoncteur produit tensoriel extérieur $G \boxtimes F : (A, B) \mapsto G(A) \otimes F(B)$ (les produits tensoriels de base non spécifiée sont pris sur $\Bbbk$), on dispose d'un isomorphisme canonique $HH_0(\mathcal{C}; G \boxtimes F) \simeq G \otimes_{\mathcal{C}} F$ qui s'étend, lorsque $F$ ou $G$ prennent des valeurs plates sur $\Bbbk$, en un isomorphisme naturel gradué $HH_*(\mathcal{C}; G \boxtimes F) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{C}}(G, F)$. En particulier, $HH_*(\mathcal{C}; F) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{C}}(\Bbbk, F) \simeq H_*(\mathcal{C}; F)$, où $\Bbbk$ désigne le foncteur constant en $\Bbbk$ et $F$ est vu, dans le membre de gauche, comme bifoncteur