GRUNDZÜGE DER TENSORRECHNUNG IN ANALYTISCHER DARSTELLUNG

VON

DR. PHIL. ADALBERT DUSCHEK

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE WIEN

UND

DR. TECHN. AUGUST HOCHRÄINER

DIREKTOR IM HOCHSPANNUNGSINSTITUT DER AEG, KASSEL

IN DREI TEILEN

I. TEIL: TENSORALGEBRA

MIT 26 ~~TEXT~~ABBILDUNGEN

DREI ~~TE~~ AUFLAGE

UNVERÄNDERTER ~~ABDRUCK~~ DER ZWEITEN AUFLAGE

WIEN

SPRINGER-VERLAG

1954

Vorwort.

Das vorliegende Buch ist einer leider recht seltenen Arbeitsgemeinschaft entsprungen. Ein Mathematiker, der während der Kriegszeit zwar unfreiwillig, aber durchaus nicht ungerne vor die Notwendigkeit gestellt war, sich gewissermaßen Hals über Kopf in die Elektrotechnik zu stürzen, und ein wirklich mitten in der Praxis stehender Techniker und Leiter der Forschungsabteilung eines größeren Unternehmens der Starkstromtechnik, der wieder von seinen technischen Problemen aus gezwungen war, immer tiefer auch in die „reine“ Mathematik hineinzusteigen, legen hiermit ein Ergebnis ihrer Zusammenarbeit vor, deren Besonderheit das Abgehen von der gebräuchlichen Darstellung der Vektorrechnung und der konsequente Aufbau einer neuen Art der Darstellung ist, die zwar an und für sich nicht neu ist, aber doch bisher nicht in vollem Umfang durchgeführt wurde. Unsere Erfahrungen damit waren so positiv, daß wir glauben, daß ihre weitere Verbreitung sich allgemein dahingehend auswirken könnte, die Scheu besonders des Technikers vor der praktischen Anwendung der Vektor- und Tensorrechnung zu überwinden. Das endgültige Urteil wird auch hier, wie in allen Fragen der Darstellung und der Methode, von der Erfahrung gesprochen werden.

Die vorliegende Lieferung umfaßt lediglich den ersten, die Tensoralgebra enthaltenden Teil des Buches. Die beiden anderen Teile, die wir in einer einzigen abschließenden Lieferung herauszubringen hoffen, werden die Tensoranalysis, also die Theorie der von irgendwelchen Veränderlichen abhängigen Vektoren und Tensoren einschließlich der Differentialgeometrie und der Feldtheorie und die eigentlichen physikalischen und technischen Anwendungen behandeln. Die an das Inhaltsverzeichnis des ersten Teiles angeschlossene Inhaltsübersicht für den zweiten und dritten Teil gibt darüber näheren Aufschluß.

Der Kreis der Leser, an die sich das Buch wendet, ist dadurch schon vorgezeichnet: Es ist nicht nur der Mathematiker und Physiker, sondern vor allem der Techniker in den Forschungs- und Berechnungsabteilungen der Industrie. Dementsprechend beschränken sich die Vorkenntnisse, die das Buch verlangt, auf das Minimum dessen, was an den Hochschulen in den üblichen Vorlesungen über höhere Mathematik geboten wird.

Dem Verlag danken wir für die tatkräftige Initiative, mit der er unter schwierigsten Verhältnissen das Erscheinen des Buches nicht nur überhaupt, sondern in einer fast friedensmäßigen Form und Ausstattung ermöglicht hat.

Wien, Herbst 1946.

A. Duschek, A. Hochrainer.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die neue Auflage ist in recht kurzer Zeit nötig geworden und dementsprechend ein im wesentlichen unveränderter Abdruck der ersten Auflage. Der zweite, die Tensoranalysis (Feldtheorie und Differentialgeometrie) enthaltende Teil des Buches ist im Manuskript fertig und wird in einer eigenen Lieferung in Kürze erscheinen.

Wien, Herbst 1948.

A. Duschek, A. Hochrainer.

Vorwort zur dritten Auflage.

Wir können uns mit der Feststellung begnügen, daß die vorliegende dritte Auflage ein unveränderter Abdruck der zweiten ist, und wir wollen darüber hinaus nur erwähnen, daß der dritte Teil des Werkes, der die Anwendungen enthält, im Druck ist, so daß in Kürze das Werk vollständig vorliegen wird.

Wien, im Spätherbst 1954.

A. Duschek, A. Hochrainer.

Inhaltsübersicht des zweiten und dritten Teiles.

Tensoranalysis.

Veränderliche Vektoren und Raumkurven. — Das begleitende Dreibein und die Formeln von FRENET. — Krümmung und Windung. — Die natürlichen Gleichungen einer Kurve. — Raumkurven und Torsen. — Die erste Grundform der Flächentheorie. Messung von Längen, Winkeln und Flächeninhalten auf der Fläche. — Die zweite Grundform der Flächentheorie. Die Krümmung der Fläche. — Weiteres über die Krümmung der Fläche. — Tensorfelder. — Die Integration der Feldgrößen. Kurvenintegrale. — Flächenintegrale. Der Stokessche Satz. — Raumintegrale. Die Integralsätze von GAUSS und GREEN. — Das quellen- und wirbelfreie Feld (LAPLACE-Feld). — Das Poissonsche oder wirbelfreie Feld. — Das quellenfreie Feld. — Die geometrischen Eigenschaften der Vektorfelder. — Das ebene Feld. — Allgemeine (krummlinige) Koordinaten. — Vektoren und Tensoren in allgemeinen Räumen. — Absolute Differentiation und Parallelverschiebung im Riemannschen Raum. — Der Riemannsche Krümmungstensor. — Anwendungen auf die Flächentheorie. — Spezielle Koordinaten.

Anwendungen in Physik und Technik.

Mechanik des Massenpunktes. — Mechanik des Punktsystems. — Mechanik des starren Körpers. — Spezielle Bewegungen starrer Körper. — Elastizitätstheorie I. — Elastizitätstheorie II. — Mechanik der Flüssigkeiten I. — Mechanik der Flüssigkeiten II (Hydrodynamik). — Vektorielle Doppelfelder I. — Vektorielle Doppelfelder II. — Das Wärmefeld. — Das elektrostatische Feld. — Das magnetische Feld. — Das elektrische Feld. — Das elektromagnetische Feld. — Quasistationäre elektromagnetische Vorgänge. — Schnell veränderliche elektromagnetische Felder. — Spezielle Relativitätstheorie I. — Spezielle Relativitätstheorie II. — Allgemeine Relativitätstheorie. — Spezielle Lösungen der Gravitationsgleichungen.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	I

Erster Teil.

Tensoralgebra.

§ 1. Der Gegenstand der Tensorrechnung.....	13
§ 2. Punkte, Strecken und Vektoren	15
§ 3. Addition von Vektoren. Produkt eines Vektors mit einem Skalar	18
§ 4. Lineare Abhängigkeit von Vektoren	21
§ 5. Länge eines Vektors	26
§ 6. Das innere oder skalare Produkt	29
§ 7. Beispiele aus der Geometrie.....	33
§ 8. Lineare Vektorfunktionen. Tensoren	42
§ 9. Orthogonale Transformationen und Bewegungsgruppe	47
§ 10. Tensoren und einfachste Tensoroperationen.....	56
§ 11. Der ε -Tensor und das äußere Produkt von Vektoren.....	66
§ 12. Reziproke Dreibeine.....	82
§ 13. Tensoren zweiter Stufe.....	87
§ 14. Symmetrische Tensoren zweiter Stufe.....	106
§ 15. Flächen zweiten Grades	113

Inhaltsübersicht des zweiten und dritten Teiles umseitig.

Einleitung.

Die Tensorrechnung ist in der letzten Zeit sehr in Mode gekommen, nicht nur bei den Physikern, für die sie schon seit langem ein fast unentbehrliches Instrument geworden ist, sondern auch bei den Technikern, die ihre Vorzüge immer mehr zu schätzen wissen. Leider muß man aber bei der Durchsicht der Literatur nur zu oft eine mangelhafte, mitunter geradezu falsche Handhabung der Tensorrechnung feststellen. Es scheint vielfach die nötige Klarheit darüber zu fehlen, was eigentlich ein Tensor ist und wann die Begriffsbildungen der Tensorrechnung mit Vorteil Anwendung finden können. So werden, um nur einige Beispiele zu nennen, in einem recht bekannten Lehrbuch der technischen Mechanik sechs Ausdrücke als Komponenten des Spannungstensors bezeichnet, die niemals ein Tensor sein können, und in einem an anderer Stelle erschienenen Aufsatz über kritische Drehzahlen einer mit Schwungmassen belasteten Welle wird in einer geradezu grotesken Weise mit den Begriffen der Tensorrechnung herumgeworfen, ohne daß auch nur die geringste Berechtigung dazu besteht. Der Verfasser behandelt zuerst den „skalaren“ Fall mit nur einer Masse und geht dann zur „vektoriellen“ Darstellung über, indem er drei Massen auf der Welle annimmt und diese drei Massen als Komponenten eines Vektors bezeichnet. Ein besonders krasser Fall ist aber der eines amerikanischen Autors, der die Tensorrechnung geradezu mit Gewalt auf die Theorie der elektrischen Maschinen und Netze anwenden will, sich bis zu den Begriffen „absolutes Differential“ und „Krümmungstensor“ versteigt und darüber dicke Bücher und lange Serien von Abhandlungen veröffentlicht. Es hätte nicht viel Sinn über solche Dinge auch nur ein Wort zu verlieren, wenn sie nicht geradezu symptomatisch wären, und wenn nicht die Gefahr bestünde, daß hier ein wertvolles und

ungemein leistungsfähiges Instrument durch mißbräuchliche Anwendung in den Augen der Zuschauer verdorben und in Mißkredit gebracht wird. Daß wir hier keine Gespenster sehen, wird uns jeder bestätigen, der mit Technikern in den Forschungsabteilungen und Berechnungsbüros über die Sache gesprochen hat. „Die Vektoren“ — meist bleiben die Leute ja schon bei diesem Begriff stehen — „mögen ja etwas ganz Schönes sein, aber wirklich rechnen können wir doch nicht damit“, das ist fast die stereotype Antwort und deutlicher kann man wohl nicht zum Ausdruck bringen, daß die Vektoren und erst recht die Tensoren in Mißkredit geraten sind und das bei Leuten, die sie doch sehr gut brauchen und damit rechnen könnten, wenn sie nur wüßten wie.

Schuld an diesen bedauerlichen Zuständen ist eine recht merkwürdige Tatsache. Auf der einen Seite haben die Mathematiker in den letzten Jahrzehnten ein Rechenverfahren entwickelt, das in der Regel als „Tensoranalysis“ bezeichnet wird, ein Instrument von höchster Vollkommenheit ist und die großen Fortschritte auf dem Gebiete der allgemeinen Differentialgeometrie überhaupt erst ermöglicht hat. Diese Entwicklung ist von einem Impuls ausgegangen, den die Physik durch die Relativitätstheorie gegeben hat, und die Physiker haben auf diesem Gebiet auch reichlich Nutzen aus den Methoden der Tensoranalysis gezogen, aber die vierdimensionale Raum-Zeit-Welt der Relativitätstheorie mit ihrer allgemeinen Metrik ist nicht das, was vor allem die Techniker brauchen. Diese arbeiten nach wie vor im altherwürdigen dreidimensionalen euklidischen Raum, wo mit all den schönen Worten und Namen der allgemeinen Methoden nicht viel anzufangen ist, wenn man nicht auf solchen Unfug verfallen will, wie die oben genannten Autoren. Nun hat es aber durchaus den Anschein, als ob auch für den Techniker reichlich gesorgt wäre. Es gibt doch eine ganze Menge von Büchern, die sich recht bescheiden meist als „Lehrbuch der Vektorrechnung“ bezeichnen — was ungefähr ebenso treffend ist, als wollte man „Theorie der Polynome“ statt „Funktionentheorie“ oder „Apfelbaum“ statt „Obstgarten“ sagen — und in denen ein Rechenverfahren mehr oder weniger ausführlich dargelegt ist, dem der euklidische Raum zugrunde liegt. Die Methode, die hier ganz allgemein verwendet wird, ist aber im Prinzip völlig verschieden

von den Methoden der allgemeinen Tensorrechnung. Ihre Vertreter reiten auf einem ganz absonderlichen Steckenpferd, das verschiedene Namen trägt, wie „Unabhängigkeit vom Koordinatensystem“, „Invariante Methode“, „Direkte Analyse“ usw. Gemeint ist damit folgendes: Da die Vektorrechnung ein geometrisches Rechenverfahren ist — daran ändern die zahlreichen Anwendungsmöglichkeiten in der Physik nicht das geringste — und sich mit geometrischen Größen beschäftigt, will man mit diesen Größen selbst rechnen und alle fremden Elemente ausschalten. Diese fremden Elemente sind vor allem die Koordinaten, die hier auf einmal, ohne daß dafür irgendwo ein vernünftiger Grund angegeben wird, als etwas höchst Verabscheuungswürdiges hingestellt werden. Wir haben doch wohl alle genug analytische Geometrie getrieben, um zu wissen, wie zweckmäßig die Koordinaten sind und, vor allem, wie gut es sich mit ihnen rechnen läßt. Daß die Formeln der analytischen Geometrie und die Längen und Winkel, die wir nach ihren Methoden berechnen, vom Koordinatensystem unabhängig sind, das wissen wir doch ganz genau. Es mag vielleicht zweckmäßig sein, sich über den Begriff der Unabhängigkeit vom Koordinatensystem eine präzisere Vorstellung zu schaffen, vielleicht lassen sich die Methoden der analytischen Geometrie auch noch weiter verbessern und verfeinern, aber wir haben gar keinen Grund, sie in Bausch und Bogen zu verdammen und über Bord zu werfen, bloß weil es da Koordinaten gibt.

Diese sogenannte „Vektorrechnung“ erreicht ihre Unabhängigkeit vom Koordinatensystem dadurch, daß sie von Koordinaten einfach nicht redet. Für gewisse Größen und für gewisse zunächst am einfachsten erscheinende Verknüpfungen dieser Größen werden Symbole eingeführt und dann wird mit diesen Symbolen frisch darauf losgerechnet. Von Koordinaten ist nicht die Rede, allerdings nur scheinbar, denn irgendwie werden sie ja doch immer wieder eingeschmuggelt, nur hütet man sich, das Kind beim rechten Namen zu nennen. Man kann natürlich, darüber besteht kein Zweifel, die orientierte Strecke im Raum mit dem Symbol a bezeichnen und „Vektor“ nennen. Hat man zwei solche Vektoren a und b , so kann man sie in bekannter Weise addieren; das Resultat ist ein Vektor $c = a + b$. Man kann noch andere Verknüpfungen einführen, z. B. kann man $a \cdot b = c$ das „innere Produkt von a und b “ nennen und durch $c = a \cdot b \cdot \cos \varphi$ definieren, wobei a

und b die Längen von a und b und φ der von ihnen eingeschlossene Winkel ist. Das Resultat dieses doch recht merkwürdigen „Produktes“ ist also kein Vektor, sondern eine Zahl, die, weil sie vom Koordinatensystem unabhängig ist, Skalar oder Invariante genannt und daher auch nicht mit einem gotischen, sondern mit einem lateinischen Buchstaben bezeichnet wird. Warum wir dieses Produkt merkwürdig nennen? Weil es ganz andere Eigenschaften hat als das so ziemlich allen Menschen vertraute Produkt von gewöhnlichen (reellen oder komplexen) Zahlen. Die Multiplikation von Zahlen hat nämlich einige einfache und charakteristische Eigenschaften, sie genügt dem kommutativen Gesetz $a \cdot b = b \cdot a$ und dem assoziativen Gesetz $(a b) c = (b c) a = (c a) b$ und das Produkt $a b$ verschwindet dann und nur dann, wenn mindestens ein Faktor Null ist. Das innere Produkt von Vektoren ist zwar noch kommutativ, weil der Cosinus eine gerade Funktion ist, aber beim Versuch, das assoziative Gesetz nachzuweisen, erleidet man gründlich Schiffbruch, weil das innere Produkt eben kein Vektor, sondern eine Zahl ist: Das Bestehen einer Gleichung $(a b) c = a (b c)$ hat zur Folge, daß die Vektoren a und c dieselbe Richtung haben. Und die Eigenschaft, daß ein Produkt nur dann verschwindet, wenn mindestens ein Faktor Null ist, trifft auch nicht zu, denn $a b = 0$ ist wohl auch erfüllt, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ ist, aber auch dann, wenn a und b aufeinander senkrecht stehen und das ist sogar der allgemeine Fall. Wenn man es richtig betrachtet, erscheint es geradezu als Unfug — und vom didaktischen Standpunkt ist das sogar ganz bestimmt der Fall —, eine solche Verknüpfung als Produkt zu bezeichnen: Aber sehen wir ein wenig weiter! Neben diesem inneren Produkt gibt es in der Vektorrechnung auch ein äußeres Produkt zweier Vektoren, das $c = [a b]$ oder $c = a \times b$ geschrieben wird und eine Vektor c bedeutet, der auf a und b senkrecht steht, nach einer bestimmten Vorschrift orientiert wird und dessen Länge c durch $c = a b \sin \varphi$ gegeben ist. Es erscheint sehr schön, wenn man so viele Worte in einem einfachen Zeichen zusammenfaßt. Aber wir bezweifeln, ob das ein Vorteil ist, denn man sieht doch diese vielen Worte dem Symbol gar nicht an. Man muß sich diese ganze Definition auswendig merken und so fest ins Gedächtnis einprägen, daß sie immer ganz automatisch ins Bewußtsein tritt, wenn wir zwei gotische Buchstaben in einer eckigen

Klammer oder durch ein schräges Kreuz verbunden sehen. Und von den genannten Eigenschaften des Produktes zweier Zahlen ist hier gar keine mehr übrig geblieben, es ist $[a b] \neq [b a]$, wenn nicht $[a b] = 0$ ist, es ist $[[a b] c] \neq [a [b c]]$ und es ist $[a b] = 0$ nicht nur, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ ist, sondern auch, wenn a und b parallel sind! Leider sind diese Namen, so unzweckmäßig und irreführend sie sind, doch eingebürgert, und es wird schwer sein, sie wieder zu eliminieren.

Solange man von der Vektorrechnung nichts anderes braucht als Skalare, Vektoren und das innere und äußere Produkt von Vektoren, solange geht die Sache noch ganz gut und man kann von einer Art geometrischer Stenographie reden, weil man viele geometrische und auch physikalische Beziehungen in einfacher und recht anschaulicher Weise — wegen der anschaulichen Bedeutung der Vektoren — anschreiben kann. Aber man braucht doch mehr als nur diese. Vor allem braucht man doch auch die Punkte des Raumes! Aber Vektoren lassen sich nicht verwenden, um Punkte festzulegen. Denn die Vektoren schwimmen frei im Raum herum, sie behalten nur immer ihre Richtung und Orientierung bei. Wenn wir Punkte festlegen wollen, müssen wir einmal einen festen Punkt O im Raume wählen, dann können wir die übrigen Punkte des Raumes durch „Ortsvektoren“ mit dem Anfangspunkt O festlegen. Aber diese Ortsvektoren sind schon keine richtigen Vektoren mehr, eben wegen des festen Anfangspunktes; denn den Anfangspunkt eines ordentlichen Vektors können wir ganz beliebig im Raume wählen. Aber wir brauchen noch etwas, wenn wir mit diesen Dingen *rechnen* wollen. Wir müssen doch auch imstande sein, spezielle Vektoren im Raum anzugeben. Das können wir z. B. machen durch Angabe der Länge und der Winkel, die der Vektor mit zwei festen Richtungen einschließt, oder besser durch die Angabe der Längen der Projektionen des Vektors auf drei Richtungen im Raum, die nicht alle zu einer Ebene parallel sind. Wir brauchen also außer dem Punkt O noch drei feste Gerade (Richtungen), die wir zweckmäßigerweise so wählen, daß sie zu je zweien aufeinander senkrecht stehen und durch O gehen. Wir müssen, um die Längen der Projektionen unseres Vektors messen zu können, auf den Geraden auch noch Einheitsstrecken festlegen. Wir werden diese Einheitsstrecken der Einfachheit halber untereinander gleich wählen.

Da haben wir also einen Punkt O , durch diesen Punkt drei aufeinander senkrechte orientierte Gerade und auf ihnen gleiche Einheitsstrecken. Wir haben den Eindruck, daß man so etwas bisher immer als kartesisches Koordinatensystem bezeichnet hat. Jetzt können wir den Vektor numerisch durch die Längen seiner Projektionen auf die Achsen festlegen. Wir sehen: Ein Vektor a ist also völlig identisch mit einem geordneten¹ System von drei Zahlen (A_1, A_2, A_3) , seinen Koordinaten. Es ist klar, daß eine orientierte Strecke (Vektor) im Raum, wenn wir uns den Raum samt allen seinen Punkten festgehalten denken, vom Koordinatensystem unabhängig ist, womit doch nichts anderes gemeint ist, als daß der Vektor derselbe bleibt, auch wenn wir mit irgendeinem Koordinatensystem im Raum herumfahren. Das Symbol a können wir also als unabhängig vom Koordinatensystem ansehen. Aber die drei Koordinaten A_i des Vektors sind es natürlich nicht. Denn wenn wir einen anderen Punkt $\bar{O}$ statt O wählen und drei andere untereinander senkrechte Gerade durch $\bar{O}$, so werden die Längen der Projektionen von a auf die drei neuen Geraden andere Werte haben als früher. Aber wenn wir das neue Koordinatensystem mit dem Ursprung $\bar{O}$ in bezug auf das alte System mit dem Ursprung O irgendwie festlegen, z. B. durch Gleichungen, die uns angeben, wie sich die Koordinaten eines allgemein gewählten Punktes im neuen System aus den Koordinaten desselben Punktes im alten System berechnen, dann werden wir ohne weiteres auch angeben können, wie sich die Koordinaten eines Vektors bei dieser Änderung des Koordinatensystems verhalten. Auf diese Art kommt man doch in einem viel präziseren, fast möchten wir sagen, höheren Sinn zu dem Begriff der Unabhängigkeit vom Koordinatensystem, indem wir die Gesamtheit aller (rechtwinkliger kartesischer) Koordinatensysteme betrachten

¹ D. h., daß die Reihenfolge festgelegt ist, denn natürlich ist $(1, 1, 2)$ ein anderer Vektor als $(1, 2, 1)$. Wir nennen diese drei Zahlen nicht, wie es oft geschieht, Komponenten, sondern mit einem guten Grund Koordinaten des Vektors. Das Wort Komponenten hätte sonst einen doppelten Sinn, da man in der Mechanik gewohnt ist, unter Komponenten einer Kraft stets wieder Kräfte zu verstehen, deren Summe die ursprüngliche Kraft ist: Demnach sind die Komponenten eines Vektors selbst Vektoren und nicht Zahlen, und bei dieser Bedeutung des Wortes Komponente wollen wir auch bleiben.

und das Verhalten der Vektorkoordinaten beim Übergang von einem zum anderen System beherrschen und nicht, indem wir einen Vektor durch ein Symbol bezeichnen und dann so tun wie der bekannte Vogel Strauß, als gäbe es kein Koordinatensystem und käme man gänzlich ohne ein solches aus.

Aber auch die Vektorrechnung bleibt nicht bei den Vektoren stehen: Die geometrischen und physikalischen Probleme führen ganz zwangsläufig zur Betrachtung von Größen höherer Art, den Tensoren oder Affinoren. Die symbolische Methode hat bei ihrer Einführung große Schwierigkeiten zu überwinden, weil hier ein geometrisches Substrat von ähnlicher Anschaulichkeit wie es die orientierte Strecke bei den Vektoren ist, völlig fehlt. Den bequemsten Zugang zu den Tensoren zweiter Stufe, um mit dem einfachsten Falle zu beginnen (sie werden auch als Dyaden bezeichnet), bildet auf jeden Fall eine Zuordnung zwischen Vektoren, die besondere Eigenschaften besitzt, deren mathematischer Ausdruck eben der Tensor ist. Wir werden auf diese Eigenschaften weiter unten noch zurückkommen; hier stellen wir zunächst einmal fest, daß eine solche Zuordnung zwischen zwei Vektoren η und ξ symbolisch in der Form $\eta = \mathcal{A} \cdot \xi$ geschrieben wird, wobei durch den Punkt eine neue Art „inneres Produkt“ zwischen Tensor $\mathcal{A}$ und Vektor ξ angedeutet ist, dessen Resultat eben der Vektor η ist, der dem Vektor ξ auf diese Art eindeutig zugeordnet wird. Für dieses innere Produkt gilt auch das kommutative Gesetz nicht, da im allgemeinen $\mathcal{A} \cdot \xi \neq \xi \cdot \mathcal{A}$ ist, so daß es hier zwei verschiedene Arten von inneren Produkten von Tensoren zweiter Stufe und Vektoren gibt. Bei Tensoren dritter Stufe gibt es drei verschiedene Möglichkeiten, ein inneres Produkt mit einem Vektor zu bilden, wobei das Resultat jedesmal ein Tensor zweiter Stufe ist. Aber es gibt nur einen vernünftigen Weg — den die symbolische Schreibweise allerdings nicht gegangen ist — diese verschiedenen Möglichkeiten halbwegs prägnant zu charakterisieren und das ist der, die Stufe eines Tensors durch eine entsprechende Anzahl irgendwelcher Zeichen anzugeben, also etwa $\mathcal{A}_{\circ \times}$ für einen Tensor zweiter Stufe und $\mathcal{A}_{\circ \times \square}$ für einen Tensor dritter Stufe zu schreiben. Wenn man dann bei dem Vektor, der ja nichts anderes als ein Tensor erster Stufe ist, ebenfalls ein Zeichen anbringt, so lassen sich die drei Arten innerer Produkte bei einem Tensor dritter Stufe etwa in der Form $\mathcal{A}_{\circ \times \square} \mathcal{A}_{\circ}$

$\mathcal{U}_{\circ \times \square} \mathcal{C}_X$, $\mathcal{U}_{\circ \times \square} \mathcal{C}_{\square}$ schreiben und unterscheiden. Man kann dann, da die Phantasie kaum ausreicht, um in allen Fällen die nötige Zahl von Verknüpfungszeichen zu erfinden, statt dieser Zeichen $\circ$, $\times$, $\square$ Buchstaben verwenden, also normale und vernünftige Indizes schreiben: $\mathcal{U}_{ij}$ für den Tensor zweiter Stufe, $\mathcal{U}_{ijk}$ für den Tensor dritter Stufe usw.; und man wird die Vektoren dann auch immer mit einem Index versehen, wodurch man sich auch von der lästigen Notwendigkeit befreit, Vektoren mit kleinen und Tensoren mit großen Buchstaben zu bezeichnen. Aber wenn man soweit gelangt ist, dann ist formal nur mehr ein ganz kleiner Schritt zu der Schreibweise zu machen, die in der allgemeinen Tensorrechnung seit jeher üblich ist. Es hat keinen Sinn mehr, noch gotische Buchstaben zu verwenden. Die lateinischen erfüllen jetzt den Zweck genau so gut, da die Art der Größe durch die Zahl der Indizes gegeben ist.

Aber jetzt besteht die Möglichkeit, die Symbole

$$A_i, A_{ij}, A_{ijk} \quad (I)$$

usw. auch anders zu deuten, nicht mehr symbolisch, sondern konkret als Koordinaten der Tensoren in einem bestimmten Koordinatensystem, wobei die Indizes als allgemeine Ausdrücke oder Repräsentanten der Zahlen 1, 2, 3 anzusehen sind. Innere Produkte sind dann Summen der Form

$$\sum_i A_i X_i, \sum_j A_{ij} X_i \text{ oder } \sum_j A_{ij} X_j, \sum_i A_{ijk} X_i \text{ oder} \\ \sum_j A_{ijk} X_j \text{ oder } \sum_k A_{ijk} X_k \text{ usw.}$$

Man sieht: Der Summationsindex ist in allen Fällen zweimal vorhanden und wenn man übereinkommt, über solche in einem Glied doppelt vorkommende Indizes stets automatisch von 1 bis 3 zu summieren, ohne daß eigens ein Summenzeichen angeschrieben wird, so nehmen die obigen inneren Produkte das recht einfache Aussehen an:

$$A_i X_i, A_{ij} X_i, A_{ij} X_j, A_{ijk} X_i, A_{ijk} X_j, A_{ijk} X_k \quad (II)$$

Die Zweckmäßigkeit dieses Summationübereinkommens ist durch die Praxis des Rechnens in jeder Hinsicht erwiesen. Die besonderen Eigenschaften der durch Tensoren vermittelten Zuordnung von Vektoren (oder Tensoren), von denen wir oben gesprochen haben, drücken sich in dieser Schreibweise klar und

deutlich darin aus, daß alle Ausdrücke (II) in den Koordinaten des Vektors X_i linear und homogen sind. Wir haben aber noch etwas anderes erreicht: Die Koordinaten von Tensoren sind gewöhnliche Zahlen und die Rechenoperationen, die in den Ausdrücken (II) mit diesen Zahlen auszuführen sind, sind die gewöhnliche Addition und Multiplikation, wie sie in der elementaren Arithmetik gelehrt werden. Denn $A_i X_i$ ist nichts anderes als $A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3$. Wenn wir das Summationübereinkommen akzeptieren, so ist durch die Schreibweise $A_i X_i$ des inneren Produktes der beiden Vektoren A_i und X_i auch schon ganz genau und eindeutig gesagt, wie dieser Skalar aus den Koordinaten der beiden Vektoren zu berechnen ist. Darin liegt nicht mehr Symbolik, als wir es in anderen Gebieten der Mathematik gewohnt sind.

Wir haben schon erwähnt, daß die Schreibweise (I) für Tensoren — im wesentlichen — identisch ist mit der in der allgemeinen Tensorrechnung verwendeten; die Unterschiede sind nur dadurch bedingt, daß wir hier den euklidischen Raum zugrunde legen und daher einige Vereinfachungen vornehmen können. Die formale Methode, die sich aus dieser Spezialisierung ergibt und die wir hier für das innere Produkt kurz skizziert haben, ist eben nichts anderes als die Anpassung der allgemeinen Methoden auf den besonderen Fall des dreidimensionalen euklidischen Raumes.¹ Wohlgermerkt: Die formale Methode ist anders als die gebräuchliche Symbolik, aber der sachliche Inhalt ist genau derselbe. Es bleibt bei der anschaulichen Deutung des Vektors als orientierte Strecke im Raum, aber der Vektor wird nicht durch ein Symbol a dargestellt, sondern durch seine drei Koordinaten. Wir sagen: Ein Vektor A_i ist ein System von drei Zahlen (A_1, A_2, A_3) , die im einzelnen seine Koordinaten heißen und sich bei einer Änderung des Koordinatensystems in einer ganz bestimmten Weise transformieren. Dieses Transformationsgesetz, das sich aus der geometrischen Deutung des Vektors als orientierte Strecke ergibt, ist wesentlich. Man kann nicht ohne weiteres drei Zahlen als Koordinaten eines Vektors ansehen, sondern nur dann, wenn man

¹ Daß diese Anpassung ein durchaus brauchbares Rechenverfahren für den euklidischen Raum ergibt, darauf hat der eine von uns schon vor Jahren hingewiesen: A. DUSCHER, „Über symbolfreie Vektorrechnung“, Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung 39 (1930).

weiß, daß sie sich bei einer Änderung des Koordinatensystems dem Gesetz entsprechend transformieren. Entsprechendes gilt für Tensoren.

Häufig deutet man physikalische Zusammenhänge geometrisch, aber auch wenn man dann geometrische Begriffe verwendet, von Kurven, Geraden, Längen und Winkeln redet, so treibt man deshalb noch keine Geometrie. Man wird in solchen Fällen mitunter auch die Methoden der Tensorrechnung mit Vorteil verwenden können, ohne daß man es aber dann wirklich mit Tensoren zu tun hat. Wenn auf einer Welle drei Schwungmassen sitzen, so kann uns nichts hindern, diese Massen mit M_i zu bezeichnen. Aber es ist einfach falsch, zu sagen, daß diese drei Zahlen M_i die Koordinaten eines Vektors sind, und vor allem, man hat nichts davon. Wenn ein Strom I durch einen Widerstand R fließt, so ist die Leistung $N = RI^2$. Deutet man I und N als Koordinaten in einem rechtwinkligen ebenen Koordinatensystem, so ist der funktionale Zusammenhang zwischen I und N bei konstantem R durch eine Parabel dargestellt, aber es ist noch keinem Menschen eingefallen, deshalb zu sagen, daß diese Leistung eine Parabel sei. Daß man hier nicht Geometrie treibt, erkennt man am deutlichsten daran, daß die Koordinaten N und I selbst eine physikalische Bedeutung haben, also Skalare sind und daß daher eine Koordinatentransformation völlig sinnlos ist, weil sie die physikalische Bedeutung der Koordinaten, auf die es gerade ankommt, zerstören würde. Wenn es aber keine Koordinatentransformation gibt, dann sind wir auch nicht in der Lage festzustellen, ob irgendein Ding ein Vektor ist oder nicht, weil wir das Verhalten der Koordinaten dieses Dinges bei einer Koordinatentransformation nicht nachprüfen können.

Wir stellen uns also in diesem Buche die Aufgabe, eine Methode der Tensorrechnung für den dreidimensionalen euklidischen Raum in enger Anlehnung an die Methoden der analytischen Geometrie zu entwickeln. Wir sind überzeugt, daß diese „analytische Methode“ der Tensorrechnung, die sich in den allgemeinen Räumen so gut bewährt hat, der symbolischen Methode in jeder Hinsicht überlegen ist, vor allem, weil sie den sachlichen Schwierigkeiten der geometrischen und physikalischen Probleme keine überflüssigen formalen Schwierigkeiten hinzufügt: Die großen formalen Schwierigkeiten der symbolischen Methode sind unseres Erachtens die

alleinige Ursache, weshalb sich die Tensorrechnung bisher in den Anwendungen so wenig hat durchsetzen können. Zweifellos lassen sich die einfachsten Verknüpfungen, das innere und äußere Produkt von Vektoren, symbolisch viel einfacher anschreiben wie in Koordinaten. Zweifellos erfordert auch das Rechnen mit den Indizes eine gewisse Übung und Vertrautheit, aber wir glauben, daß man sich diese Übung und Vertrautheit leicht aneignet, viel leichter jedenfalls, als die Vertrautheit mit den verwickelten und nichtssagenden Symbolen der angeblich koordinatenfreien „direkten“ Methode. Der ganze Rechenapparat der analytischen Methode läßt sich auf die folgenden vier grundlegenden Punkte zurückführen, nämlich:

1. Das Summationsübereinkommen, wonach über jeden Index, der in einem Glied zweimal vorkommt, automatisch von 1 bis 3 zu summieren ist.

2. Der „ δ -Tensor“ δ_{ij} , ein Tensor zweiter Stufe, der mit dem in der Mathematik als das „Kroneckersche δ “ bezeichneten System von neun Zahlen identisch ist und dessen Koordinaten den Wert 1 oder 0 haben, je nachdem die Indizes gleich oder verschieden sind.

3. Der „ ε -Tensor“ ε_{ijk} , also ein Tensor dritter Stufe, dessen Koordinaten bei entsprechender Orientierung des Koordinatensystems die Werte +1 oder -1 haben, wenn ijk eine gerade oder ungerade Permutation der Zahlen 1, 2, 3 ist, während alle Koordinaten mit mindestens zwei gleichen Indizes verschwinden.

4. Die Tatsache, daß das Differentiationszeichen $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sich wie ein Vektor verhält, d. h. daß $\frac{\partial A_{ijk} \dots}{\partial x_p}$ ein Tensor $(m+1)$ -ter Stufe ist, wenn $A_{ijk} \dots$ ein Tensor m -ter Stufe ist. Es ist mit dem „symbolischen Vektor ∇ (Nabla)“ der symbolischen Methode identisch.

Während man das innere Produkt von zwei Vektoren A_i und B_i mit Hilfe des δ -Tensors in der Form $\delta_{ij} A_i B_j$ schreiben kann, ist das äußere Produkt mit Hilfe des ε -Tensors durch $\varepsilon_{ijk} A_i B_j$ gegeben. Das sieht auf den ersten Blick einigermaßen schwerfällig aus, besonders im Vergleich zu dem einfachen Symbol $[a b]$. Aber wenn man sich ein wenig mit den Indizes vertraut gemacht hat, so wird man die großen Vorteile der scheinbar so schwerfälligen Schreibweise bald erkennen. Dazu kommt, — und das ist das Entscheidende — daß man allgemein eine Zu-

ordnung, bei der zwei gegebenen Vektoren ein dritter entspricht, gar nicht anders schreiben kann als mit Hilfe eines Tensors dritter Stufe in der Form $Z_i = A_{ijk} X_j Y_k$. Wir möchten in diesem Zusammenhang auch noch darauf hinweisen, daß alle Formeln (nicht die Definitionen) der Tensorrechnung sich in einer viel allgemeineren Form wie unter Benützung der symbolischen Methode als Relationen zwischen dem Vektor $\frac{\partial}{\partial x_i}$ und den beiden Tensoren δ_{ij} und ε_{ijk} schreiben lassen. So tritt an Stelle des sogenannten Entwicklungssatzes der symbolischen Methode hier die Formel

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ihl} = \delta_{jl} \delta_{ki} - \delta_{kl} \delta_{ji}, \quad (\text{III})$$

die im übrigen so ziemlich die einzige Formel ist, die man auswendig lernen soll. Gegenüber der symbolischen Form

$$[[a \ b] \ c] = (a \ c) \ b - (b \ c) \ a$$

ist (III) nur mehr eine Art Gerippe, da keine speziellen Vektoren in (III) eingehen. Die Theorie der Felder, die sogenannte „Vektoranalysis“; wird durch den obigen Punkt 4 beherrscht, ja fast erschöpft. Was durch die Symbole grad, div und rot, die wieder gar nichts über ihre Bedeutung aussagen, bezeichnet wird, bekommt hier die Form

$$\frac{\partial A}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial A_j}{\partial x_i}, \quad \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_k}. \quad (\text{IV})$$

Der erste Ausdruck ist der Gradient des Skalars A , der zweite die Divergenz und der dritte der Rotor des Vektors A_i ; wie diese Größen aus A bzw. A_i zu berechnen sind, ist durch die Ausdrücke (IV) ganz eindeutig und in einer ohne weiteres verständlichen Weise angegeben.

Wir wollen uns hier mit diesen Andeutungen begnügen. Sie dürften die Absicht, die wir mit diesem Buche verfolgen, hinreichend klargelegt haben. Um dem Leser, der mit der symbolischen Methode schon etwas vertraut ist, den Übergang zu erleichtern und zum Zwecke des Vergleichs werden wir die wichtigeren Formeln stets auch in symbolischer Form anschreiben und daran gelegentlich wohl auch kritische Bemerkungen knüpfen. Die Entscheidung, welche Methode die bessere ist, wollen wir dann letzten Endes dem Leser überlassen. Wir sind jedenfalls der Meinung, daß eine formale Methode immer nur Mittel zum Zweck ist und nur solange eine Existenzberechtigung hat, als sie diesen Zweck auch auf die einfachste Art erreicht.