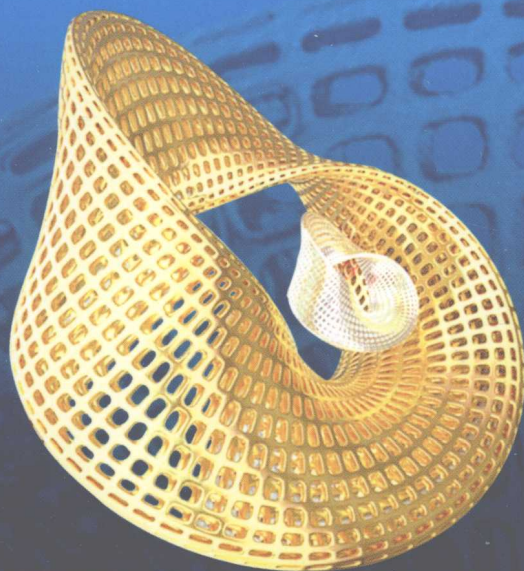


Encyclopedia of Mathematical Physics  
Functional Analysis and Operator Algebras; Quantization Methods  
and Path Integration; Variational Techniques

数学物理学百科全书 12

# 泛函分析和算子代数；量子化方法 和路径积分；变分技术

Jean-Pierre Francoise, Gregory L. Naber, Tsou Sheung Tsun



# Encyclopedia of Mathematical Physics

数学物理学百科全书⑫

## Functional Analysis and Operator Algebras; Quantization Methods and Path Integration; Variational Techniques

泛函分析和算子代数；量子化方法  
和路径积分；变分技术

Jean-Pierre Francoise

Gregory L. Naber

Tsou Sheung Tsun

科学出版社

北 京

图字: 01-2008-1084 号

This is an annotated version of

**Encyclopedia of Mathematical Physics**

Jean-Pierre Francoise, Gregory L Naber, Tsou Sheung Tsun

Copyright © 2007 Elsevier Inc.

ISBN-13: 978-0-1251-2660-1

ISBN-10: 0-12-512660-3

All rights reserved.

No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopy, recording, or any information storage and retrieval system, without permission in writing from the publisher.

AUTHORIZED EDITION FOR SALE IN P. R. CHINA ONLY

本版本只限于在中华人民共和国境内销售

**图书在版编目(CIP)数据**

数学物理学百科全书. 12, 泛函分析和算子代数; 量子化方法和路径积分; 变分技术 = Encyclopedia of Mathematical Physics. 12, Functional Analysis and Operator Algebras; Quantization Methods and Path Integration; Variational Techniques; 英文/ (法) 费朗克斯 (Francoise, J. P.) 等编著. —影印本. —北京: 科学出版社, 2008

ISBN 978-7-03-021649-6

I. 数… II. 费… III. ①数学-百科全书-英文②物理学-百科全书-英文③数学分析-英文 IV. 0-61

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 050925 号

责任编辑: 孙红梅 霍志国/责任印制: 钱玉芬/封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2008 年 6 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2008 年 6 月第一次印刷 印张: 26 1/4

印数: 1—2 000 字数: 623 000

定价: 98.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈双青〉)



## 《数学物理学百科全书》导读版编委会

### 主编

吴岳良 院士 中国科学院理论物理研究所

刘克峰 教授 浙江大学数学系 美国加州大学洛杉矶分校数学系

### 编委（按姓氏笔画）

庄鹏飞 教授 清华大学物理系

朱重远 研究员 中国科学院理论物理研究所

张元仲 研究员 中国科学院理论物理研究所

沈一兵 教授 浙江大学数学系

陈晓松 研究员 中国科学院理论物理研究所

陈熙谋 教授 北京大学物理学院

周向宇 研究员 中国科学院数学与系统科学研究院

姚景齐 研究员 中国科学院数学与系统科学研究院

段海豹 研究员 中国科学院数学与系统科学研究院

曹则贤 研究员 中国科学院物理研究所

## 导 读

“数学物理”是基于数学和物理学这两大基础学科，经过长期相互交叉融合而逐渐形成的一个重要研究领域。物理学与数学是人类探索大自然现象和变化规律发展起来的 two 门最基本的学科，起源于人类早期的生产实践活动。古时欧洲学者把物理学当作“自然哲学”，“物理”一词最先出自的希腊文原意是指“自然”。随着人们对自然界认识的深入，物理学从哲学中逐渐分离出来成为一门独立的学科，并在近代得到前所未有的迅猛发展，为人类文明和社会进步提供了最基本和最丰富的科学思想和研究手段，成为自然科学的基础。物理学研究的对象是宇宙的基本组成要素：物质、能量、空间、时间，以及它们的相互作用和基本结构及其运动规律。数学被古希腊学者视为哲学之起点，“数学”一词的希腊语意思是“学问的基础”，数学亦被中国古代当作六艺之一，在由计数、计算、量度，以及对物体形状和运动的观察中产生和形成。数学研究的概念是透过抽象化和逻辑推理反映自然界的基本特征：数量、结构、变化及它们的相互关系和空间形式。

物理学作为构成自然科学的基础，而它的理论通常又以数学的形式表达出来。随着各学科向着综合和交叉方向的发展，“数学物理”的研究在近几十年取得了巨大的进展，正发展成具有特色的一门交叉学科。尽管对它的刻画还不很清晰，但总体来说，“数学物理”研究的是以物理基本问题为对象的数学理论和数学方法，寻求物理现象的数学描述和物理理论的数学结构，探究理论模型中物理问题的数学解法和解析结果，探讨理论上自洽的数学物理模型，力求解释和预言自然界的物理现象。

开展对“数学物理”的深入研究，有助于揭示出物理学与数学之间的内在联系。事实上，从自然哲学发展到物理学，除了使用实验手段和新的思维方法，数学起了不可替代的作用。当人们通过分析大量实验数据和吸取各种唯象理论的精髓，以严格的数学语言和简洁的数学公式描述支配物质基本结构和宇宙演化的物理规律时，物理学的简洁美、统一美、对称与不对称美则通过深刻的数学美反映出来。可以说，自从物理学成为自然科学的一门独立学科后，物理学与数学之间的关系变得密不可分。古代的许多科学家既是数学家也是物理学家，尤其到了近代和现代，许多理论物理学家对数学的运用和发展起到了更为积极的推进作用，数学家和理论物理学家之间的合作也变得越来越平凡、越来越深入，他们成为了“数学物理”的践行者。大家最为熟知的古希腊的阿基米德，他既是著名的数学家也是著名的物理学家，他很早就利用数学这个工具证明了杠杆定理和浮力定理，并做了大量的实验。牛顿在研究物体和天体的运动规律时发展出新的数学方法——微积分。爱因斯坦则运用对当时的物理学家来说全新的数学方法——微分几何和黎曼几何，创立了广义相对论。狄拉克推导得到的关于自旋为  $1/2$  的电子波函数方程预言了反粒子的存在。Yang-Mills 规范场的大范围整体性质和手征量子反常与纤维丛的拓扑不变量和 Chern-Simons 示性类及指标定理之间建立起直接的联系。超弦理

论中的额外维空间与 Calabi-Yau 空间之间的对应关系。理论物理学家 Witten 在发展超弦理论的同时由于对数学的杰出贡献而获得菲尔兹奖。这些都是物理学与数学相结合所呈现在“数学物理”方面的经典例子。

随着物理学和数学的深入发展,“数学物理”的研究内容变得越来越丰富,新的研究结果和方法及新的观点以越来越快的速度不断呈现。同时,数学物理的新进展使得解决物理问题的能力增强,并对数学的发展起到积极的促进作用。数学物理中的许多方法和结果及数学模型已越来越多地渗透和应用到其他各门科学,如化学、天文学、地学、生物学、经济学等。数学物理对技术的进步也发挥着越来越重要的作用,为精确地求解工程技术中遇到的物理问题和数值计算提供新的方法。

20 世纪,物理学被公认为科学技术发展中最重要带头学科,以物理学和数学为基础的“数学物理”得到了快速发展。21 世纪科学技术的发展趋势更是日新月异,人类文明和社会进步面临着各种新的挑战,如全球变暖和能源环境等问题。为此,进一步提高认识自然和改造自然的能力仍将是人类探索和研究自然界的共同目标,物理学和数学在本世纪将继续起着重要的基础作用,“数学物理”作为基础学科将进一步显示其独特优势,并取得新的更大进展。面对这样的机遇和挑战,拥有一本搜集整理数学物理全面知识的百科全书,以便更好地了解近代和现代物理学与数学方面的重大进展,掌握数学物理的基本方法,是所有在这个领域开展研究和对这个领域感兴趣的科技工作者和青年学生的迫切愿望。

由衷感谢 Elsevier 公司于 2006 年 6 月出版的“Encyclopedia of Mathematical Physics”(《数学物理学百科全书》),这是一部全面介绍数学物理知识的百科全书。

本书的三位主编(法国巴黎居里大学 Jean-Pierre Francoise 教授、美国费城 Drexel 大学 Gregory L. Naber 教授和英国牛津大学 Tsou Sheung Tsun 博士)都是长期从事数学物理方面研究的知名学者。他们邀请了包括诺贝尔物理学奖获得者杨振宁教授和英国牛津大学 Roger Penrose 教授在内的 34 位著名物理学家和数学家作为本书的编辑顾问委员会成员,组织来自 30 个国家的 439 位在物理学和数学相关研究领域做出杰出贡献的理论物理学家和数学家,撰写了 400 多篇图文并茂的综述性文章。

《数学物理学百科全书》是经长达 4 年完成的一部内容全面系统、领域涵盖广泛的百科全书。全书特色鲜明,既体现了学科的基础性、独立性、完整性,又注重学科的前沿性、交叉性、应用性,是当今数学物理研究领域最新和最全的百科全书。

本书内容涉及物理学和数学的几乎各个重要研究领域,遍及从经典力学到量子力学、经典场论到量子场论、共形场论到拓扑场论、流体动力学到动力系统、可积系统到无序系统、粒子物理到天体宇宙学、相对论到量子引力、规范理论到统一理论、平衡态统计到非平衡态统计、凝聚态物质到量子信息、变分技术到代数方法、泛函分析到算子代数、路径积分到随机方法、李群到量子群、微分几何到代数拓扑、低维几何到非交换几何、复几何到辛几何等核心领域和方向。本书内容还特别注重数学物理的最新研究成果和在各领域的最新应用,并提供了大量必要的和重要的参考文献。这为有兴趣利用严密的数学框架求解物理问题和描述自然界基本规律的广大科研人员、教师和学生,提供了一部难得的数学物理资料书和实用的工具参考书,也有助于广大读者在了解和掌握物理学和数学前沿发展的基础上,进一步拓展其在交叉学科领域的应用和激发出新的研究

方向和领域。

我们真诚感谢科学出版社引进了《数学物理学百科全书》这部优秀的工具书。目前,我国的物理学和数学正进入一个快速发展的时期,为适应和满足广大科技工作者的需求,由科学出版社即将发行的《数学物理学百科全书》导读版,采取选编的形式,把以英文字母为目录编排出版的5卷一套的原版《数学物理学百科全书》重新编辑成按照学科分类的12卷一套《数学物理学百科全书》导读版小型丛书,其中基础理论导论1卷(含中文翻译),物理学方面共7卷(保持英文原版),数学方面共4卷(保持英文原版)。

《数学物理学百科全书》导读版的12卷系列丛书,根据学科分类编辑如下:

《数学物理学百科全书》第一卷:数学物理学导言

《数学物理学百科全书》第二卷:经典力学;流体动力学

《数学物理学百科全书》第三卷:可积系统;经典,共形与拓扑场论

《数学物理学百科全书》第四卷:规范理论;量子场论

《数学物理学百科全书》第五卷:广义相对论;量子引力;弦论与M-理论

《数学物理学百科全书》第六卷:凝聚态物质与光学;量子信息与量子计算;量子力学

《数学物理学百科全书》第七卷:无序系统;动力系统

《数学物理学百科全书》第八卷:平衡态统计力学和非平衡态统计力学

《数学物理学百科全书》第九卷:代数技巧;李群和李代数;离散数学;量子群;随机方法

《数学物理学百科全书》第十卷:复几何;微分几何;低维几何;非交换几何

《数学物理学百科全书》第十一卷:代数拓扑;辛几何与拓扑;常微分和偏微分方程

《数学物理学百科全书》第十二卷:泛函分析和算子代数;量子化方法和路径积分;变分技术

第一卷为中英双语版,包含经典力学、微分几何、电磁学、平衡态统计力学、泛函分析、闵可夫斯基时空和狭义相对论、量子力学和拓扑学8篇导论性文章。这些介绍性文章主要是针对初学者和研究生,可作为他们在阅读各专业学科文章前的预备知识,如数学方面的文章针对物理研究生,物理学方面的文章针对数学研究生。这些文章也可作为高年级研究生课程的基础。

原版《数学物理学百科全书》的编辑以英文字母为目录,其结构具有整体性和交叉性,但所有不同学科领域的读者必须拥有全套5卷才能保证每一学科领域内容的相对完整性。导读版《数学物理学百科全书》则考虑各学科本身的相对独立性和完整性,同时注意相关学科之间交叉融合的特点,尽量把关联性强的学科内容编排在同一卷,并对那些基础理论性和交叉融合性强的综述文章,采用重复编排的方式收录进不同分卷,以保证每卷的相对完整性和独立性及有效的交叉性。

本书物理学部分与数学部分的关系很难分开。实际上,经典力学、电磁学、统计力学、量子力学、流体力学、可积系统和动力系统在许多物理问题可归结为求解数学上的常微分方程、偏微分方程、积分方程、微分积分方程等数学物理方程,物理学问题的

解会涉及复变函数和特殊函数等多种函数，在求解时又会用到变分技术、调和分析、泛函分析等各种数学分析方法。同时，对爱因斯坦狭义相对论和广义相对论，它不仅改变了人们的时空观，还使得闵可夫斯基时空的几何学和黎曼空间的几何学成为物理理论的数学基础，同时也使得向量分析、张量分析和微分几何等成为必要的数学分析工具。在量子力学中，物理量成为算子，物理状态用波函数来描述，算子的谱才是测量到的物理量。在量子场论中，波函数又被二次量子化成为算子用来描述基本粒子在相互作用过程中的产生和湮灭。这使得算子代数、量子化方法和路径积分等数学理论和方法成为量子物理的数学基础。粒子物理学家发现自然界的 3 种基本作用力：电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用可用规范理论来描述，并完全由规范对称性来支配，这些对称性在数学上用李群和李代数来描写。事实上，晶体的结构也是由欧几里得空间中的转动群来描述。这使得群论在物理学中的应用，尤其在粒子物理中的应用变得越来越重要。在规范理论中，规范势当作基本的量子场，而它被发现就是数学家在现代微分几何学中所研究的纤维丛上的联络，这使得有关纤维丛的拓扑不变量在粒子物理和量子场论研究中变得重要起来，如规范场的磁单极子和瞬子解及手征量子反常等。在量子引力和超弦理论的研究中，不仅运用到已有的数学理论和方法尤其是现代数学，还促进了数学理论本身的发展。同样，在凝聚态物质和光学方面，物质的拓扑相和拓扑缺陷、拓扑量子计算等也应用到了许多现代数学方法，这使得代数拓扑、代数方法、量子群、复几何、辛几何与拓扑、低维几何、非交换几何等数学理论和数学方法越来越多地渗透到理论物理的研究中。另外，在研究微观物理对象的随机性和各种随机过程的统计规律、无序系统和动力系统时，随机方法和离散数学等也得到越来越广泛的应用。

正如《数学物理学百科全书》三位主编在序言中写道：“数学物理把数学和物理学这两大学科的优势集中到一起，它们的关系是共同发展。一方面，它运用数学这一工具把不断增长的精确性和复杂性这些物理概念组织了起来；另一方面，物理学家为数学家提供了灵感的源泉。”同时，也正如诺贝尔物理学奖获得者荷兰 Utrecht 大学 Gerard t'Hooft 教授在前言中指出：“物理世界与数学世界之间存在明显的重要区别。物理世界强调事实的‘真相’，无论‘真相’是什么，而数学是纯逻辑和纯推理的世界。在物理学中，一个理论是否能被接受是由实验来最后决定的。物理学中的方法论也与数学不同。”

物理学中的许多规律还有待于在更小或更大的尺度上进行检验。尤其在接近普朗克尺度的情况下，我们对量子场和时空的性质还不很清楚，包括量子场论中的无穷发散困难与正规化和重整化方法、非微扰相互作用效应等基本问题。诺贝尔物理学奖获得者美国加州大学圣巴巴拉分校卡弗里理论物理研究所 David Gross 教授在中国科学院理论物理研究所“前沿科学论坛”上所做的题为“物理学的未来”的报告中探讨了物理学面临的 25 个问题：

**宇宙的起源：**这一过去的哲学问题，产生了现在理论物理学家称为的宇宙学。宇宙的观测表明，宇宙是不断膨胀的。这样，随着时间的倒推，宇宙将不断的收缩，利用爱因斯坦的广义相对论和粒子物理学知识，宇宙必然存在一个具有极高能量和密度的起点，即大爆炸。在这一点，我们现在的许多科学规律将失效。那么，我们希望知道宇宙是如何起源的？大爆炸是如何开始的？在大爆炸点到底发生了什么？

**暗物质的本质：**宇宙学的观测表明，构成宇宙的物质绝大部分并不是今天我们看到物质，而是一些并不发生辐射的东西，即暗物质。构成宇宙的物质中大约有 25% 是暗物质，而普通的物质（例如，构成我们身体的重子）只占到大约 3%。因此，什么是暗物质？我们能否在实验室中观测到它？它与普通的物质是如何发生作用的？暗物质在宇宙中是如何分布的？尽管现在人们构造了许多超出标准模型的模型来描述这种相互作用，其中有暗物质的候选者如轴子和超对称中的中性粒子，但是以上许多问题仍然不能很好的回答。

**暗能量问题：**宇宙中绝大部分能量是以另一种形式，即暗能量的形式存在。暗能量的本质是什么？它是个常量还是随时间变化的？如何利用实验来观测暗能量随时间的变化？对暗能量最简单的假设是爱因斯坦的宇宙学常数，这一常数是爱因斯坦在广义相对论引力方程中为了得到静止的宇宙而不是膨胀的宇宙而引入的。现在看来这一常数和暗能量有许多相似之处，但是暗能量到底与这一宇宙学常数是否是一回事有待回答。

**天体的形成：**星体是如何形成的？如何来理解星体的质量谱、双子星和星团的频率？如果一个星体形成理论足够好，那么它应该可以告诉我们第一个星体形成的景象，但是这样的理论并不存在。对这一问题的研究出于我们希望知道在太阳系以外的星系中是否存在生命。

**广义相对论：**是否现在对于广义相对论的理解在所有尺度上都是正确的？广义相对论已经被许多实验证明，确实是值得信服的。但是，目前我们还有两个地方没有检验，其一是在极小尺度上（事实上，在极小尺度上我们也没有检验牛顿引力理论），其二是在引力作用及其强的区域如黑洞的附近。由此，我们要问两个问题，一个问题是：是否强引力能够经受得住天文学引力波的检验？另一个问题是：能否用宇宙学观测量来判断 Kerr 度规是否正确地描写了黑洞周围的几何？

**量子力学：**量子力学是否是描述自然界的最终理论？在极大尺度、复杂体系、意识体系它是否还正确？它是否可以作为一个描述宇宙的理论？

**粒子物理标准模型：**标准模型是一个极其成功的理论，它包含不多的参数，与实验符合得相当好。但是它也有一些我们难以回答的神秘之处，例如，夸克和轻子的质量谱中质量的差别和质量的起源、夸克之间和轻子之间的混合、重子的起源和质子的寿命等。

**超对称：**超对称是对标准模型的最自然的扩充，并且考虑了超对称和超对称破缺后，各种作用可以做到很好的统一。但是，超对称是如何破缺的？是否存在低能超对称？超对称中粒子的质量谱是什么等一系列问题还有待解决。

**量子色动力学：**我们是否能够求解量子色动力学？如果我们设想夸克的颜色数是无穷大而不等于 3，是否能够构造一个强子的弦论对偶描述？

**弦论：**弦论是一个有希望统一所有相互作用的理论。但是，什么是弦论？弦论中存在大量的对偶性会给我们什么启示？

**时空概念：**什么是时空？时空的概念是否是必然存在的？不同的理论物理学家有不同的观点，例如，美国普林斯顿高等研究院的 E. Witten 教授认为时空是注定存在的，而美国哈佛大学 A. Strominger 教授则认为时空或许是一个我们将要放弃的概念。我们能不能认为时间是诱导的？如果时间是诱导的，那么空间也将同样是诱导的。要回答这

个问题就需要回答前面的问题，什么是弦论？这需要基本概念上的革命。

**物理学与环境科学：**物理学是否是一个环境科学？描述物理世界的所有参数和法则是否是可以计算的？或者说是否有些是由历史或量子力学事件决定的？

**运动学、动力学和初始条件：**在传统的物理学中，运动学和动力学是区分开来的。但是在理解弦论和探求时空本质时，运动学和动力学的差别将难以区分，同时量子力学也将变得必不可少和不再神秘。

**新物态：**是否存在常规实验可以得到非费米流行为的凝聚态物质？

**复杂性：**描述巨大复杂动力学体系的理论是什么？由于计算机的功能越来越强大，我们希望利用它来预言地球的气候变化、细胞中的化学过程及人类大脑行为。这些体系的混沌特点决定了预言中存在固有极限，但是难以将这些特点从不感兴趣的现象中分离出来。因此，对于理论物理学家来说能否发展一套计算手段来分析这些系统，鉴别它们的特性是一个不小的问题。

**量子计算：**量子计算机应该是什么样的？在构造量子计算机过程中，主要的障碍是退相干问题，因为外界的扰动会使得量子计算机成为经典计算机。有两个不同的方法可以克服这一问题，一种是通过与外界隔离的办法来尽量减少噪音的扰动，即安静的计算机；另一种是构造不与外界的干扰发生耦合的计算机，即聋哑的计算机。我们是否能真正造出可以实用的量子计算机？

**物理学的应用：**我们是否知道如何制造出在室温或高于室温的情况下可以应用的超导材料？是否能够利用电子材料（如半导体）制造出室温铁磁体？

**理论生物学：**什么是生物学的理论？理论物理有助于生物学的研究吗？是否需要新的数学？如何描述生物体呈现出的多时间大尺度动力学体系？

**基因学：**进化论能否被定量化并且变成可预言的？我们是否可以通过对基因的研究来给出有机体的形状？

**意识学：**隐藏在记忆和意识后边的潜在的原理是什么？是否可以测量一个婴儿的意识的开始？能否制造具有自由意识、并且具有目的行为能力的机器？

**计算物理：**物理学中定量计算显得越来越重要，那么计算机是否能代替解析技术？如果是这样，我们该如何调整对物理学家的训练？进而，计算机何时能成为具有创造力的理论物理学家？

**物理学的分化：**既然物理学有从弦论到生物学多样性，它是否会分化成许多独立的子学科？物理学的分化是否还会继续？我们应该如何面对这种状况？

**还原论：**我们想当然的认为既然大客体是由小的客体构成的，那么大客体的行为完全由小客体的行为决定，至少原则上是这样。那么比起自然界不能告诉我们她的左手与右手的差别来说，这一点是否是更明显正确？

**理论的作用：**在物理学和其他科学中理论的正确作用是什么？理论是否仅仅是实验的奴隶，只是通过它预言的实验结果来判断，还是只关注于数学结构的完美而不管是否反映客观世界的真实？在对复杂系统的描述中如何估价物理学家倡导的简洁性和数学结构的优美性等原则？

**物理学发展中潜在的危险性：**人们可以看到，在未来的 25 年中传统的大物理学工程是不现实的。我们现在应该考虑什么样的新途径，在这一过程中理论学家会起什么样

的作用？

《数学物理学百科全书》包含的内容是研究和回答以上提出的科学问题所必须具备的基础知识。《数学物理学百科全书》导读版的发行，为我国在物理学和数学领域的广大科技工作者和研究生提供了一部全面了解数学物理基础知识和发展前沿，以及核心课题的最具完整性和系统性及权威性的百科全书。《数学物理学百科全书》导读版适合高等院校的广大师生和研究院所的科技人员参考阅读。

在写百科全书导读时，恰逢我国“科学的春天”30周年纪念和迎来我国改革开放30周年。这是一个值得我国科技界庆贺和回顾的30年，在“科学技术是第一生产力”的正确论断鼓舞下，以物理学和数学为典型代表的基础研究在我国得到了极大的发展。当前，我国正在全面落实科学发展观，建设创新型国家，提倡自主创新和原始创新。尽管我国的物理学和数学已取得了一系列重要的进展，但作为世界大国和文明古国，还远远没有在这两个最基本的学科领域做出应有的更大的贡献。在21世纪的今天，随着我国经济的蓬勃发展和社会的不断进步，面对新的机遇和挑战，广大科技工作者不仅会在物理学和数学这两大基础领域做出原创性工作和历史性贡献，还必将会为整个世界的科技发展、人类文明、社会进步做出中国科学家应有的贡献。

最后，我们要感谢《数学物理学百科全书》导读版编辑委员会的所有成员，他们对导读版的编辑提出许多有用的建议，认真撰写第一卷8篇导论性文章的中文译文，对导读版进行仔细审校。特别要感谢科学出版社的编辑孙红梅和霍志国为发行《数学物理学百科全书》导读版所做的一切努力。

吴岳良

中国科学院理论物理研究所

中国科学院卡弗里理论物理研究所

## 前 言

在过去的几个世纪，我们的物理世界处处充满着神秘。神的力量能带给我们真正的奇迹；水和阳光能使不毛之地变成肥沃的牧场，但它们同样能带来痛苦和灾难。生命之力被认为是对所有生命体负责的特殊力量。凡是它们所在的地方，包括所有星体和其他天体的天堂，都是神的属有领域。

当然，数学是确实存在的。事实上，从某种角度而言，物理学是由精确的数学逻辑所操控的：古希腊人把空间几何结构变成了一种真实的艺术形式。就我所知，古希腊人是“数学物理”的第一个践行者。他们引入了坐标轴的概念，从而把空间几何的所有量都转化为一些简单的数字。今天，这些被称作“物理学的基本定律”。直到很久以后我们才认识到如下事实：时间流可以类似地被坐标化，它连同空间一起，同样可用几何方法来解决。于是，有一些疯狂的人对数字的魔力很感兴趣，但是，我们的现实世界似乎确实包含许多超出我们分析能力的地方。

渐渐地，所有这一切都变了。月亮和其他行星的运动好像都满足几何定律。伽利略和牛顿设法去发现这些运动的合乎逻辑的定律，并注意到质量的概念也适用于太空中的物体，就像地球上的苹果和大炮一样；这使得太空更容易被我们所理解。同时人们发现，电子、磁场、光和声音也完全按照数学方程在运转。

然而，所有这一切仅仅是个开始。真正的改变出现在 20 世纪。阿尔伯特·爱因斯坦首先引入了一种全新的思考问题的方式，即通过数学论证和逻辑推理，而非直觉经验。通过只有少数纯数学家才知道的高等的数学知识来研究现实的空间和时间，这对当时的物理学家而言是全新的方法。爱因斯坦本人也是花费了很大的努力来理解这些对今天的数学物理方向的研究生来说是再熟悉不过的联络和曲率的概念，但在当时，这些都是全新的概念。我们不得不佩服爱因斯坦当时有远见的洞察力，他所预见的远不止我们今天在大学教室里所教的那些东西。

狭义和广义相对论仅仅是我们今天用高等的数学方法研究的现代物理学王国的一小角。我们有众所周知的复杂课题，例如，凝聚态物理中的相位转变、超导学、Bose-Einstein 凝聚态、量子 Hall 效应，特别是量子分数 Hall 效应，以及其他很多来自初等粒子物理方面的题目，同时还有来自纤维丛和超重力的重正化群，代数拓扑、超弦理论、Clabi-Yau 空间和其他一些未知方面的问题，所有这些都迫切需要用我们的智慧去理解。

今天我们觉得最不可思议的是，我们的整个物理世界好像都被数学方程操控着，并且它们不是草率的和可争议的模型，而是大千世界中各种物质、系统和现象的确实被证明的性质。

数学是否真的适用于整个世界，或仅是世界的一个部分？特征、记号和实体是否是数学地独自存在？我们的直觉、梦想、意识和信仰又如何呢？或许此时大部分人会说，在这些方面我们不需要数学的分析；尽管在这些方面，一些勇敢的社会学家开始试

图用合理的数学方法研究问题。

不，物理世界和数学世界之间存在明显的重要区别。物理世界强调事实的“真相”，无论“真相”是什么，而数学是纯逻辑和纯推理的世界。在物理学中，一个理论是否会被接受是由实验来最后决定的。物理学中的方法论也与数学不同。

一个有趣的例子是超导电性的偶然发现。1911年，荷兰物理学家 Heike Kamerling Onnes 首先发现液化氮，这是在低于 4.25 K 时实现的。Heike 想要测量水银的传导性，水银是一种低温下会凝固成固体的金属。但测量中出现了一些问题，伏特表根本不显示任何电压。小组中所有富有经验的物理学家都认为出了故障。这种现象在短路电路实验中已经不是第一次出现了，但这一次，他们始终没能找出问题来。有个助手负责保持样品中液化氮的温度，这是一项枯燥乏味的工作，需要一直注视某些细节。然而，在一次测试中他打了个瞌睡，温度上升了，忽然仪器再次出现正常值，研究发现温度是完全可再现的。低于 4.19 K 时，水银的传导性趋于无穷。高于 4.19 K 时是有限的，而这个转变是非常突然的。超导电性由此被发现（D. van Delft, “Heike Kamerling Onnes”, Uitgeverij Bert Bakker, Amsterdam, 2005, 荷兰）。

这个发现不是用数学的方法。如果助手睡着了，定理也不会被发现，即使例子中确实存在一些神奇的事情。

数学物理这个交叉学科是非常难懂的。百科全书中的某些题目纯粹是物理的。高  $T_c$  超导电性、破坏水波和磁水动力是完全物理的题目，其中的实验数据比任何高深理论都具有决定性。然而，上同调理论、Donaldson-Witten 理论和 AdS/CFT 对应是纯数学的例子，尽管在这次编辑中这些题目和物理学有着密切的关系。

在编辑中，大量不同作者的短小文章不可避免地被做了适当地变动。在这本百科全书中，理论物理学家和数学家为高等数学物理中的许多重要条目做了简单明了的阐述。所有的文章都包含了供进一步阅读的参考文献。我们盼望这些努力会取得很好的效果。

Gerard't Hooft,  
Spinoza Institute,  
Utrecht University,  
The Netherlands.

（沈一兵 译）

## 序

数学物理是一门相对较新的独立学科。数学物理国际协会成立于 1976 年。当然，从古时候起数学与物理学就相互影响，但近几十年来，可能因为我们正身在其中，它们出现了巨大的进展，新的结果和观点以令人目眩的节奏诞生，以至于需要有一本百科全书来搜集整理这些知识。

数学物理把数学和物理学这两个大学科的优势集中到一起，它们的关系是共同发展。一方面，它运用数学这一工具把不断增长的精确性和复杂性这些物理概念组织了起来；另一方面，物理学家为数学家们提供了灵感的源泉。两者关系的经典例子是爱因斯坦的相对论，其中微分几何在物理理论的公式化方面起到了实质性的作用，而物理学相继提出的问题推动了微分几何的发展。巧合的是，当我们在为《数学物理学百科全书》写序言时，正值爱因斯坦创造奇迹 100 周年。

再三考虑到写这部《数学物理学百科全书》是一个艰巨的项目。如果不是坚信这是一项很有意义的、受益于社会的项目，而且我们会得到众多的支持，那么我们绝不会接受这个任务。我们确实获得了许多支持，包括建议、鼓励和有实用性的帮助，这些支持来自编辑顾问委员会成员和我们的作者，还有其他慷慨地抽时间帮我们完善这本百科全书的人。

数学物理是一门较新的学科，它还没有被清晰地刻画，不同的人对它有不同的理解。在我们选择的题目中，一部分遵循了近期数学物理国际大会的纲要，但主要参照编辑顾问委员会和作者的提议。由于时间和空间的限制，以及我们自身的水平所限，更改了某些冗长的题目，但我们尽量收录了我们认为是核心的课题，尽量覆盖更多的最活跃的领域。

由于我们的课题是跨学科的，这部百科全书应当有某些特殊的特色。比如，同一数学理论应用到不同的物理问题时，会有不同的侧重点和处理方法。同样，相同的物理问题可以运用不同数学领域的方法。这就是为什么我们把百科全书分成了两个广阔的部分：物理学课题和相关的数学课题。每一部分的文章允许与其他部分有相当的重复，许多文章会出现在多个标题下，不过它们都被精心制作的对照表联接起来。我们认为，这会给课题的整体性做出更好的描述，为来自广泛的相关领域的研究者提供更好的服务。

百科全书主要针对有经验的研究者，不过也会对初学的研究生有用。对于后者，我们收录了 8 篇初等的导论性文章，以便于参考，其中数学文章是针对物理研究生的，物理文章是针对数学研究生的，这些文章可以作为他们在阅读主体文章前的准备，而不需要查阅其他资料。事实上，这些文章可以作为高年级研究生课程的基础，因为据我们所知，某些作者已经这样做了。

除了印刷版外，百科全书的网络在线版正在计划中，以便目录和文章本身内容及时得到更新。对于飞速发展的这一领域而言，这可能是一个必要的准备。

这个项目进行了 4 年多。对于它的完成，我们首先要感谢编辑顾问委员会的所有成

员，他们为我们提建议，始终帮助和鼓励我们；也要感谢所有的作者，他们慷慨地献出宝贵的时间来写这些文章，并提出了许多有用的建议。在与他们的合作中我们学到了许多东西，并与其中一些作者有过美好的接触。特别要感谢 Arthur Greenspoon，他的专业技术是必不可少的。

这个项目开始于 Academic Press，后来由 Elsevier 接手。感谢他们的热情的工作人员，把过渡工作做得天衣无缝，在工作上也给了我们巨大的帮助：Carey Chapman 和 Anne Guillaume 掌管着整个项目，自始至终和我们一起工作；Edward Taylor 负责审稿；Martin Ruck 负责具体事务，特别要提到的是，从没听说过有某封电子邮件丢失。

最后，要对相当一部分作者慷慨地把他们的酬劳捐赠给欧洲数学会的发展中国家委员会表示由衷的感谢，感谢他们为发展中国家所做的一切。

Jean- Pierre Françoise

Gregory L. Naber

Tsou Sheung Tsun

(沈一兵 译)

## EDITORS AND EDITORIAL ADVISORY BOARD

---

### EDITORS

**Jean-Pierre François**  
Université P.-M. Curie, Paris VI  
Paris, France

**Gregory L. Naber**  
Drexel University  
Philadelphia, PA, USA

**Tsou Sheung Tsun**  
University of Oxford  
Oxford, UK

---

### EDITORIAL ADVISORY BOARD

**Sergio Albeverio**  
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn  
Bonn, Germany

**Huzihiro Araki**  
Kyoto University  
Kyoto, Japan

**Abhay Ashtekar**  
Pennsylvania State University  
University Park, PA, USA

**Andrea Braides**  
Università di Roma "Tor Vergata"  
Roma, Italy

**Francesco Calogero**  
Università di Roma "La Sapienza"  
Roma, Italy

**Cecile DeWitt-Morette**  
The University of Texas at Austin  
Austin, TX, USA

**Artur Ekert**  
University of Cambridge  
Cambridge, UK

**Giovanni Gallavotti**  
Università di Roma "La Sapienza"  
Roma, Italy

**Simon Gindikin**  
Rutgers University  
Piscataway, NJ, USA

**Gennadi Henkin**  
Université P.-M. Curie, Paris VI  
Paris, France

**Allen C. Hirshfeld**  
Universität Dortmund  
Dortmund, Germany

**Lisa Jeffrey**  
University of Toronto  
Toronto, Canada

**T.W.B. Kibble**  
Imperial College of Science, Technology and Medicine  
London, UK

**Antti Kupiainen**  
University of Helsinki  
Helsinki, Finland

**Shahn Majid**  
Queen Mary, University of London  
London, UK

**Barry M. McCoy**  
State University of New York Stony Brook  
Stony Brook, NY, USA

## **EDITORS AND EDITORIAL ADVISORY BOARD**

---

**Hiroshi Ooguri**

California Institute of Technology  
Pasadena, CA, USA

**Roger Penrose**

University of Oxford  
Oxford, UK

**Pierre Ramond**

University of Florida  
Gainesville, FL, USA

**Tudor Ratiu**

Ecole Polytechnique Federale de Lausanne  
Lausanne, Switzerland

**Rudolf Schmid**

Emory University  
Atlanta, GA, USA

**Albert Schwarz**

University of California  
Davis, CA, USA

**Yakov Sinai**

Princeton University  
Princeton, NJ, USA

**Herbert Spohn**

Technische Universität München  
München, Germany

**Stephen J. Summers**

University of Florida  
Gainesville, FL, USA

**Roger Temam**

Indiana University  
Bloomington, IN, USA

**Craig A. Tracy**

University of California  
Davis, CA, USA

**Andrzej Trautman**

Warsaw University  
Warsaw, Poland

**Vladimir Turaev**

Institut de Recherche Mathématique Avancée,  
Strasbourg, France

**Gabriele Veneziano**

CERN, Genève, Switzerland

**Reinhard F. Werner**

Technische Universität Braunschweig  
Braunschweig, Germany

**C.N. Yang**

Tsinghua University  
Beijing, China

**Eberhard Zeldler**

Max-Planck Institut für Mathematik in  
den Naturwissenschaften  
Leipzig, Germany

**Steve Zelditch**

Johns Hopkins University  
Baltimore, MD, USA