英文版

古今数学思想

[美] 莫里斯·克莱因 著

第一册

上海科学技术出版社

古今数学思想

(英文版)

第一册

[美]莫里斯·克莱因 著

上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

古今数学思想. 第一册＝Mathematical thought from ancient to modern times(volume 1):英文/(美)克莱因(Kline,M.)著. —上海:上海科学技术出版社,2014.1

ISBN 978－7－5478－2070－4

Ⅰ.①古… Ⅱ.①克… Ⅲ.①数学史－英文 Ⅳ.①O11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 266996 号

古今数学思想（英文版）第一册

[美]莫里斯·克莱因 著

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社 出版
(上海钦州南路 71 号 邮政编码 200235)
上海世纪出版股份有限公司发行中心发行
200001 上海福建中路 193 号 www.ewen.cc
苏州望电印刷有限公司印刷
开本:787×1092 1/16 印张 27.75
字数:410 千字
2014 年 1 月第 1 版 2014 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978－7－5478－2070－4/O·29
定价: 78.00 元

《古今数学思想》三卷本平装版序

本书初版受到欢迎，让我心满意足。对于出现了一种未经授权的中文翻译版*，我感到荣幸，尽管一分钱都没拿到。更让我感到满意的是经授权的西班牙文翻译版即将面世。

这本著作是我长期致力于将数学学科人性化而获得的部分成果。在我职业生涯刚开始的时候，我就与几位同事联手编写了一种大学一年级教材，它与枯燥乏味的传统数学课本相去甚远。之后，抱着同样的宗旨，我又写了一本微积分教材。当我在指导一个电磁理论研究小组并做着自己的研究时，我仍然抽出时间来写《西方文化中的数学》(*Mathematics In Western Culture*)，这本书部分是在讲历史，部分则是在探寻数学对哲学、宗教、文学、艺术、音乐、经济理论和政治思想的影响。最近我以普通读者为对象，写了一本关于数学的哲学基础的书，和一本关于好多科学（尤其是天体演化学和物理学）的数学背景结构的书。

我希望学生、老师，还有普通读者，都能从这套在价格上比较容易承受而且在内容上比较容易接受的《古今数学思想》三卷本平装版中获益。在此感谢 Harold Edwards，Donald Gillis 和 Robert Schlapp 等人提供的对我有帮助的建议。特别要感谢的是 Fred Pohle，感谢他不惜花费时间，感谢他对本书钟爱有加，感谢他的慷慨大度。在多年以本书为基础进行授课之后，他看到了人们对多卷本平装版的需求，从而提供了催生这一版本的动力。除此之外，他还毫不吝啬地献出他的时间和知识，帮我纠正书中的差错。我感到欠他良多，同样，对于我的妻子 Helen，我也亏欠甚多，她为准备这个版本承担了大量工作。

* 写此序时为1990年，莫里斯·克莱因教授逝世于1992年6月10日，同年7月30日中国加入世界版权公约。——译者注

原出版者关于这套三卷本平装版的说明

《古今数学思想》初版由牛津大学出版社以一卷本布面精装版的形式出版。在出版这套三卷本平装版时，我们仍然采用布面精装版中的页码，以与姓名索引、主题索引以及注释中的页码保持一致。由于页码是一卷接一卷地连续标记的，故为方便读者起见，每一卷的最后部分都有姓名索引和主题索引。

序

如果我们想要预见数学的将来，适当的途径是研究这门科学的历史和现状。

庞加莱(Henri Poincaré)

本书论述从古代一直到20世纪头几十年中的重大数学创造和发展。目的是介绍中心思想，特别着重于那些在数学历史的主要时期中逐渐冒出来并成为最突出的，并且对于促进和形成尔后的数学活动有影响的主流工作。本书所极度关心的还有对数学本身的看法、不同时期中这种看法的改变，以及数学家对于他们自己的成就的理解。

必须把本书看作是历史的一个概述。当人们想到欧拉（Leonhard Euler）全集满满的约70卷、柯西（Augustin-Louis Cauchy）的26卷、高斯(Carl Friedrich Gauss)的12卷，人们就容易理解只凭本书一卷的篇幅不能给出一个详尽的叙述。本书的一些篇章只提出所涉及的领域中已经创造出来的数学的一些样本，可是我坚信这些样本最具有代表性。再者，为了把注意力始终集中于主要的思想，我引用定理或结果时，常常略去严格准确性所需要的次要条件。本书当然有它的局限性，但我相信它已给出整个历史的一种概貌。

本书的组织着重在居领导地位的数学课题，而不是数学家。数学的每一分支打上了它的奠基者的烙印，并且杰出的人物在确定数学的进程方面起决定性作用。但是，特意叙述的是他们的思想，传记完全是次要的。在这一点上，我遵循帕斯卡（Blaise Pascal）的意见：“当我们援引作者时，我们是援引他们的证明，不是援引他们的姓名。”

为使叙述连贯，特别是在1700年以后的时期，对于每一发展要等到它已经成熟，在数学中占重要地位并且产生影响的时候，我才进行论述。例如，我把非欧几里得几何放在19世纪的时期介绍，虽然企图寻找欧几里得平行公

理的替代物或证明早在欧几里得（Euclid）时代就开始了并且继续不断。当然，有许多问题会在不同的时期反复提及。

为了不使资料漫无边际，我忽略了几种文化，例如中国的*、日本的和玛雅的文化，因为他们的工作对于数学思想的主流没有重大的影响。还有一些数学中的发展，例如概率论和差分演算，它们今天变得重要，但在所考虑的时期中并未起重要作用，从而也只得到很少的注意。这最后的几十年的大发展使我不得不在本书中只收入那些20世纪的，并且在该时期变成有特殊意义的创造。我没有在20世纪时期继续讨论像常微分方程或变分法的扩展，因为这将会需要很专门的资料，而它们只对于这些领域的研究工作者有兴趣，并且将会大大增加本书的篇幅。此外还考虑到，对于许多较新的发展的重要性，目前还不能做客观的估价。数学的历史告诉我们，许多科目曾经激起过很大的热情，并且得到最好的数学家的注意，但终于湮没无闻。我们只需要回忆一下凯莱（Arthur Cayley）的名言“射影几何就是全部几何”，以及西尔维斯特（James Joseph Sylvester）的断言“代数不变量的理论已经总结了数学中的全部精华”。确实，历史给出答案的有趣问题之一便是数学中哪些东西还生存着而未被淘汰？历史做出它自己的而且更可靠的评价。

通过几十项重要发展的即使是基础的叙述，也不能指望读者知道所有这些发展的内容。因此，我在本书中论述某科目的历史时，除去一些极初等的领域外，也说明科目的内容，把科目的历史叙述和内容说明融合起来。对各种数学创造，这些说明也许不能把它们完全讲清楚，但应能使读者对它们的本质得到某些概念。从而在某种程度上，本书也可作为一本从历史角度来讲解的数学入门书。这无疑是使读者能获得理解和鉴赏的最好的写法之一。

我希望本书对于专业的数学家和未来的数学家都有帮助。专业的数学家今天不得不把这么多的时间和精力倾注到他的专题上去，使得他没有机会去熟悉他的学科的历史。而实际上，这历史背景是重要的。现在的根深扎在过去，而对于寻求理解“现在之所以成为现在这样子”的人们来说，过去的每一事件都不是无关的。再者，虽然数学大树已经伸张出成百的分支，它毕竟是一个整体，并且有它自己的重大问题和目标。如果一些分支专题对于数学的心脏无所贡献，它们就不会开花结果。我们的被分裂的学科就面临着这种危险；跟这种危险做斗争的最稳妥的办法，也许就是要对于数学的过去成就、传统和目标得到一些知识，使得能把研究工作导入有成果的渠道。如同

* 中国数学史的一个可喜的叙述，已见于李约瑟（Joseph Needham）的*Science and Civilization in China*，剑桥大学出版社，1959，卷3，第1～168页。

希尔伯特（David Hilbert）所说的："数学是一个有机体，它的生命力的一个必要条件是所有各部分的不可分离的结合。"

对于学数学的学生来说，本书还会另有好处。通常一些课程所介绍的是一些似乎没有什么关系的数学片断。历史可以提供整个课程的概貌，不仅使课程的内容互相联系，而且使它们跟数学思想的主干也联系起来。

在一个基本方面，通常的一些数学课程也使人产生一种幻觉。它们给出一个系统的逻辑叙述，使人们有这种印象：数学家们几乎理所当然地从定理到定理，数学家能克服任何困难，并且这些课程完全经过锤炼，已成定局。学生被湮没在成串的定理中，特别是当他正开始学习这些课程的时候。

历史却形成对比。它教导我们，一个科目的发展是由汇集不同方面的成果点滴积累而成的。我们也知道，常常需要几十年甚至几百年的努力才能迈出有意义的几步。不但这些科目并未锤炼成无缝的天衣，就是那已经取得的成就，也常常只是一个开始，许多缺陷有待填补，或者真正重要的扩展还有待创造。

课本中的斟字酌句的叙述，未能表现出创造过程中的斗争、挫折，以及在建立一个可观的结构之前，数学家所经历的艰苦漫长的道路。学生一旦认识到这一点，他将不仅获得真知灼见，还将获得顽强地追究他所攻问题的勇气，并且不会因为他自己的工作并非完美无缺而感到颓丧。实在说，叙述数学家如何跌跤，如何在迷雾中摸索前进，并且如何零零碎碎地得到他们的成果，应能使搞研究工作的任一新手鼓起勇气。

为了使本书能包罗所涉及的这个大范围，我曾经试着选择最可靠的原始资料。对于微积分以前的时期，像希思(Thomas L.Heath)的《希腊数学史》（*A History of Greek Mathematics*）无可否认地是第二手的资料，可是我并未只依靠这样的一个来源。对于以后时期中的数学发展，通常都能直接查阅原论文；这些都幸而可以从期刊或杰出的数学家的全集中找到。对研究工作的大量报道和概述也帮助了我，其中一些实际上也就在全集里。对于所有的重要结果，我都试着给出出处。但并没有对于所有的断言都这么做；否则将会使引证泛滥，浪费篇幅，而这些篇幅还不如用来充实报道。

每章中的参考书目指出资料来源。如果读者有兴趣，他能从这些来源得到比本书中所说的更多的报道。这些书目中还包括许多不应而且没有作为来源的文献。把它们列在书目中，是因为它们供给额外的报道，或者表达的水平可以对一些读者更有帮助，或者它们比原始资料更易于找到。

在此，我想对我的同事Martin Burrow,Bruce Chandler,Martin Davis, Donald

Ludwig,Wilhelm Magnus,Carlos Moreno,Harold N.Shapiro 和Marvin Tretkoff表示谢意，感谢他们回答了大量的问题，阅读了本书的许多章节，提出了许多宝贵的批评意见。我特别感激我的妻子Helen，她以批评的眼光编辑我的手稿，广泛地核对人名、日期和出处，而且极仔细地阅读尚未分成页的校样并给它们编上页码。Eleanore M.Gross夫人做了大量的打字工作，对我是一个极大的帮助。我想对牛津大学出版社的编辑部表示感激，感谢他们细心地印刷了本书。

莫里斯·克莱因(Morris Kline)

纽约1972年5月

目　录

第 1 章　美索不达米亚的数学 …… 3
1. 数学是在哪里开始出现的 …… 3
2. 美索不达米亚的政治史 …… 4
3. 数的记号 …… 5
4. 算术运算 …… 7
5. 巴比伦的代数 …… 8
6. 巴比伦的几何 …… 10
7. 巴比伦人对于数学的使用 …… 11
8. 对巴比伦数学的评价 …… 13

第 2 章　埃及的数学 …… 15
1. 背景 …… 15
2. 算术 …… 16
3. 代数与几何 …… 18
4. 埃及人对数学的使用 …… 21
5. 总结 …… 22

第 3 章　古典希腊数学的产生 …… 24
1. 背景 …… 24
2. 史料的来源 …… 25
3. 古典时期的几大学派 …… 27
4. 爱奥尼亚学派 …… 28
5. 毕达哥拉斯派 …… 28
6. 埃利亚学派 …… 34
7. 诡辩学派 …… 37
8. 柏拉图学派 …… 42
9. 欧多克索斯学派 …… 48
10. 亚里士多德及其学派 …… 51

第 4 章 欧几里得和阿波罗尼奥斯 ……56
1. 引言 ……56
2. 欧几里得《原本》的背景 ……57
3. 《原本》里的定义和公理 ……58
4. 《原本》的第一篇到第四篇 ……60
5. 第五篇：比例论 ……68
6. 第六篇：相似形 ……73
7. 第七、八、九篇：数论 ……77
8. 第十篇：不可公度量的分类 ……80
9. 第十一、十二、十三篇：立体几何及穷竭法 ……81
10. 《原本》的优缺点 ……86
11. 欧几里得的其他数学著作 ……88
12. 阿波罗尼奥斯的数学著作 ……89

第 5 章 希腊亚历山大时期：几何与三角 ……101
1. 亚历山大城的建立 ……101
2. 亚历山大希腊数学的特性 ……103
3. 阿基米德关于面积和体积的工作 ……105
4. 赫伦关于面积和体积的工作 ……116
5. 一些特殊曲线 ……117
6. 三角术的创立 ……119
7. 亚历山大后期的几何工作 ……126

第 6 章 亚历山大时期：算术和代数的复兴 ……131
1. 希腊算术的记号和运算 ……131
2. 算术和代数作为一门独立学科的发展 ……135

第 7 章 希腊人对自然形成理性观点的过程 ……145
1. 希腊数学受到的启发 ……145
2. 关于自然界的理性观点的开始 ……146
3. 数学设计信念的发展 ……147
4. 希腊的数理天文学 ……154
5. 地理学 ……160
6. 力学 ……162
7. 光学 ……166
8. 占星术 ……168

第 8 章 希腊世界的衰替 ······171
1. 对希腊人成就的回顾 ······171
2. 希腊数学的局限性 ······173
3. 希腊人留给后代的问题 ······176
4. 希腊文明的衰替 ······177

第 9 章 印度和阿拉伯的数学 ······183
1. 早期印度数学 ······183
2. 公元200—1200年时期印度的算术和代数 ······184
3. 公元200—1200年时期印度的几何与三角 ······188
4. 阿拉伯人 ······190
5. 阿拉伯的算术和代数 ······191
6. 阿拉伯的几何与三角 ······195
7. 1300年左右的数学 ······197

第 10 章 欧洲中世纪时期 ······200
1. 欧洲文明的开始 ······200
2. 可供学习的材料 ······201
3. 中世纪早期数学在欧洲的地位 ······202
4. 数学的停滞 ······203
5. 希腊著述的第一次复活 ······205
6. 理性主义和对自然的兴趣的复活 ······206
7. 数学本身的进展 ······209
8. 物理科学中的进展 ······211
9. 总结 ······213

第 11 章 文艺复兴 ······216
1. 革命在欧洲产生的影响 ······216
2. 知识界的新面貌 ······218
3. 学识的传播 ······220
4. 数学中的人文主义活动 ······221
5. 要求科学改革的呼声 ······223
6. 经验主义的兴起 ······227

第 12 章 文艺复兴时期数学的贡献 ······231
1. 透视法 ······231
2. 几何本身 ······234
3. 代数 ······236

4. 三角 ······237
5. 文艺复兴时期主要的科学进展 ······240
6. 文艺复兴时期评注 ······247

第 13 章 16、17世纪的算术和代数 ······250
1. 引言 ······250
2. 数系和算术的状况 ······251
3. 符号体系 ······259
4. 三次与四次方程的解法 ······263
5. 方程论 ······270
6. 二项式定理及相关的问题 ······272
7. 数论 ······274
8. 代数同几何的关系 ······278

第 14 章 射影几何的肇始 ······285
1. 几何的重生 ······285
2. 透视法工作中所提出的问题 ······286
3. 德萨格的工作 ······288
4. 帕斯卡和拉伊尔的工作 ······295
5. 新原理的出现 ······299

第 15 章 坐标几何 ······302
1. 坐标几何的缘起 ······302
2. 费马的坐标几何 ······303
3. 笛卡儿 ······304
4. 笛卡儿在坐标几何方面的工作 ······308
5. 坐标几何在17世纪中的扩展 ······317
6. 坐标几何的重要性 ······321

第 16 章 科学的数学化 ······325
1. 引言 ······325
2. 笛卡儿的科学观 ······325
3. 伽利略的科学研究方式 ······327
4. 函数概念 ······335

第 17 章 微积分的创立 ······342
1. 促使微积分产生的因素 ······342
2. 17世纪初期的微积分工作 ······344

3. 牛顿的工作 ……………………………………………………356
4. 莱布尼茨的工作……………………………………………………370
5. 牛顿与莱布尼茨的工作的比较 …………………………………378
6. 优先权的争论……………………………………………………380
7. 微积分的一些直接增补 …………………………………………381
8. 微积分的可靠性……………………………………………………383

杂志名称缩写一览表
人名索引
名词索引

Contents

1. Mathematics in Mesopotamia, 3

1. Where Did Mathematics Begin? 3 2. Political History in Mesopotamia, 4
3. The Number Symbols, 5 4. Arithmetic Operations, 7 5. Babylonian Algebra, 8
6. Babylonian Geometry, 10 7. The Uses of Mathematics in Babylonia, 11
8. Evaluation of Babylonian Mathematics, 13

2. Egyptian Mathematics, 15

1. Background, 15 2. The Arithmetic, 16 3. Algebra and Geometry, 18 4. Egyptian Uses of Mathematics, 21 5. Summary, 22

3. The Creation of Classical Greek Mathematics, 24

1. Background, 24 2. The General Sources, 25 3. The Major Schools of the Classical Period, 27 4. The Ionian School, 28 5. The Pythagoreans, 28 6. The Eleatic School, 34 7. The Sophist School, 37 8. The Platonic School, 42 9. The School of Eudoxus, 48 10. Aristotle and His School, 51

4. Euclid and Apollonius, 56

1. Introduction, 56 2. The Background of Euclid's *Elements*, 57 3. The Definitions and Axioms of the *Elements*, 58 4. Books I to IV of the *Elements*, 60 5. Book V: The Theory of Proportion, 68 6. Book VI: Similar Figures, 73 7. Books VII, VIII, and IX: The Theory of Numbers, 77 8. Book X: The Classification of Incommensurables, 80 9. Books XI, XII, and XIII: Solid Geometry and the Method of Exhaustion, 81 10. The Merits and Defects of the *Elements*, 86 11. Other Mathematical Works by Euclid, 88 12. The Mathematical Work of Apollonius, 89

5. The Alexandrian Greek Period: Geometry and Trigonometry, 101

1. The Founding of Alexandria, 101 2. The Character of Alexandrian Greek Mathematics, 103 3. Areas and Volumes in the Work of Archimedes, 105 4. Areas and Volumes in the Work of Heron, 116 5. Some Exceptional Curves, 117 6. The Creation of Trigonometry, 119 7. Late Alexandrian Activity in Geometry, 126

6. The Alexandrian Period: The Reemergence of Arithmetic and Algebra, 131

1. The Symbols and Operations of Greek Arithmetic, 131 2. Arithmetic and Algebra as an Independent Development, 135

7. The Greek Rationalization of Nature, 145

1. The Inspiration for Greek Mathematics, 145 2. The Beginnings of a Rational View of Nature, 146 3. The Development of the Belief in Mathematical Design, 147 4. Greek Mathematical Astronomy, 154 5. Geography, 160 6. Mechanics, 162 7. Optics, 166 8. Astrology, 168

8. The Demise of the Greek World, 171

1. A Review of the Greek Achievements, 171 2. The Limitations of Greek Mathematics, 173 3. The Problems Bequeathed by the Greeks, 176 4. The Demise of the Greek Civilization, 177

9. The Mathematics of the Hindus and Arabs, 183

1. Early Hindu Mathematics, 183 2. Hindu Arithmetic and Algebra of the Period A.D. 200–1200, 184 3. Hindu Geometry and Trigonometry of the Period A.D. 200–1200, 188 4. The Arabs, 190 5. Arabic Arithmetic and Algebra, 191 6. Arabic Geometry and Trigonometry, 195 7. Mathematics *circa* 1300, 197

10. The Medieval Period in Europe, 200

1. The Beginnings of a European Civilization, 200 2. The Materials Available for Learning, 201 3. The Role of Mathematics in Early Medieval Europe, 202 4. The Stagnation in Mathematics, 203 5. The First Revival of the Greek Works, 205 6. The Revival of Rationalism and Interest in Nature, 206 7. Progress in Mathematics Proper, 209 8. Progress in Physical Science, 211 9. Summary, 213

11. The Renaissance, 216

1. Revolutionary Influences in Europe, 216 2. The New Intellectual Outlook, 218 3. The Spread of Learning, 220 4. Humanistic Activity in Mathematics, 221 5. The Clamor for the Reform of Science, 223 6. The Rise of Empiricism, 227

12. Mathematical Contributions in the Renaissance, 231

1. Perspective, 231 2. Geometry Proper, 234 3. Algebra, 236 4. Trigonometry, 237 5. The Major Scientific Progress in the Renaissance, 240 6. Remarks on the Renaissance, 247

13. Arithmetic and Algebra in the Sixteenth and Seventeenth Centuries, 250

1. Introduction, 250 2. The Status of the Number System and Arithmetic, 251 3. Symbolism, 259 4. The Solution of Third and Fourth Degree Equations, 263 5. The Theory of Equations, 270 6. The Binomial Theorem and Allied Topics, 272 7. The Theory of Numbers, 274 8. The Relationship of Algebra to Geometry, 278

14. The Beginnings of Projective Geometry, 285

1. The Rebirth of Geometry, 285 2. The Problems Raised by the Work on Perspective, 286 3. The Work of Desargues, 288 4. The Work of Pascal and La Hire, 295 5. The Emergence of New Principles, 299

15. Coordinate Geometry, 302

1. The Motivation for Coordinate Geometry, 302 2. The Coordinate Geometry of Fermat, 303 3. René Descartes, 304 4. Descartes's Work in Coordinate Geometry, 308 5. Seventeenth-Century Extensions of Coordinate Geometry, 317 6. The Importance of Coordinate Geometry, 321

16. The Mathematization of Science, 325

1. Introduction, 325 2. Descartes's Concept of Science, 325 3. Galileo's Approach to Science, 327 4. The Function Concept, 335

17. The Creation of the Calculus, 342

1. The Motivation for the Calculus, 342 2. Early Seventeenth-Century Work on the Calculus, 344 3. The Work of Newton, 356 4. The Work of Leibniz, 370 5. A Comparison of the Work of Newton and Leibniz, 378 6. The Controversy over Priority, 380 7. Some Immediate Additions to the Calculus, 381 8. The Soundness of the Calculus, 383

List of Abbreviations

Index