

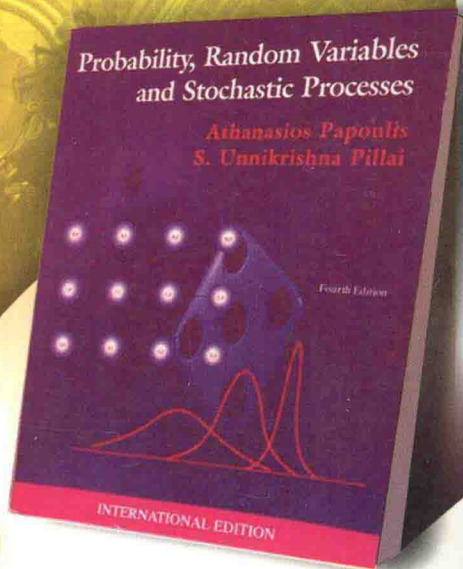
Mc
Graw
Hill
Education


随机变量 与随机过程

(英文改编版·原书第4版)

**PROBABILITY, RANDOM VARIABLES
AND STOCHASTIC PROCESSES**

(美) A. Papoulis 著
S. U. Pillai



 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

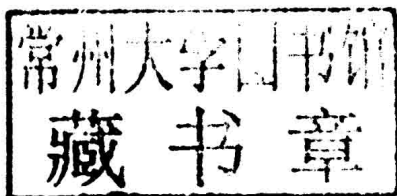


时代教育·国外高校优秀教材精选

随机变量与随机过程

(英文改编版·原书第4版)

(美) A. Papoulis 著
S. U. Pillai



机械工业出版社

Athanasios Papoulis, S. Unnikrishna Pillai

Probability, Random Variables and Stochastic Processes, Fourth Edition

978-0073660116

Copyright © 2002 by McGraw-Hill Education.

All Rights reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including without limitation photocopying, recording, taping, or any database, information or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

This authorized English Abridgement is jointly published by McGraw-Hill Education (Asia) and China Machine Press. This edition is authorized for sale in the People's Republic of China only, excluding Hong Kong, Macao SAR and Taiwan.

Copyright © 2012 by McGraw-Hill Asia Holdings (singapore) PTE. LTD and China Machine Press.

版权所有。未经出版人事先书面许可，对本出版物的任何部分不得以任何方式或途径复制或传播，包括但不限于复印、录制、录音，或通过任何数据库、信息或可检索的系统。

本授权英文影印删减版由麦格劳-希尔（亚洲）教育出版公司和机械工业出版社合作出版。此版本经授权仅限在中华人民共和国境内（不包括香港特别行政区、澳门特别行政区和台湾）销售。

版权©2012 由麦格劳-希尔（亚洲）教育出版公司与机械工业出版社所有。

本书封面贴有 McGraw-Hill Education 公司防伪标签，无标签者不得销售。
北京市版权局著作权合同登记号：01-2012-7137

图书在版编目 (CIP) 数据

随机变量与随机过程：英文改编版·原书第4版/（美）帕普里斯（A. Papoulis），佩莱（S. U. Pillai）著。—北京：机械工业出版社，2013.8

时代教育·国外高校优秀教材精选

ISBN 978-7-111-43558-7

I. ①随… II. ①帕…②佩… III. ①随机变量-高等学校-教材-英文
②随机过程-高等学校-教材-英文 IV. ①O211.5 ②O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 177616 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：郑 玫 责任编辑：郑 玫

责任校对：刘 岚 封面设计：鞠 杨

责任印制：杨 曦

北京双青印刷厂印刷

2013 年 11 月第 1 版·第 1 次印刷

182mm × 234mm · 52 印张 · 940 千字

0 001 - 3 000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-43558-7

定价：99.80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心：(010) 88361066

教材网：<http://www.cmpedu.com>

销售一部：(010) 68326294

机工官网：<http://www.cmpbook.com>

销售二部：(010) 88379649

机工官博：<http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线：(010) 88379203

封面无防伪标均为盗版

国外高校优秀教材审定委员会

主任委员：

杨叔子

委员（按姓氏笔画为序）：

丁丽娟	王先逵	王大康	白峰衫	石德珂
史荣昌	孙洪祥	朱孝禄	陆启韶	张润琦
张 策	张三慧	张福润	张延华	吴宗泽
吴 麒	宋心琦	李俊峰	余远斌	陈文楷
陈立周	单辉祖	杨芄原	俞正光	赵汝嘉
郭可谦	翁海珊	龚光鲁	章栋恩	黄永畅
黄培强	谭泽光	郭鸿志		

出版说明

随着我国加入 WTO，国际间的竞争越来越激烈，而国际间的竞争实际上也就是人才的竞争、教育的竞争。为了加快培养具有国际竞争力的高水平技术人才，加快我国教育改革的步伐，国家教育部近来出台了一系列倡导高校开展双语教学、引进原版教材的政策。以此为契机，机械工业出版社陆续推出了一系列国外影印版教材，其内容涉及高等学校公共基础课，以及机、电、信息领域的专业基础课和专业课。

引进国外优秀原版教材，在有条件的学校推动开展英语授课或双语教学，自然也引进了先进的教学思想和教学方法，这对提高我国自编教材的水平，加强学生的英语实际应用能力，使我国的高等教育尽快与国际接轨，必将起到积极的推动作用。

为了做好教材的引进工作，机械工业出版社特别成立了由著名专家组成的国外高校优秀教材审定委员会。这些专家对实施双语教学做了深入细致的调查研究，对引进原版教材提出了许多建设性意见，并慎重地对每一本将要引进的原版教材一审再审，精选再精选，确认教材本身的质量水平，以及权威性和先进性，以期所引进的原版教材能适应我国学生的外语水平和学习特点。在引进工作中，审定委员会还结合我国高校教学课程体系的设置和要求，对原版教材的教学思想和方法的先进性、科学性严格把关，同时尽量考虑原版教材的系统性和经济性。

这套教材出版后，我们将根据各高校的双语教学计划，举办原版教材的教师培训，及时地将其推荐给各高校选用。希望高校师生在使用教材后及时反馈意见和建议，使我们更好地为教学改革服务。

机械工业出版社

影印改编版序

随机过程是一连串随机事件动态关系的定量描述，讨论的是生产和管理中带有随机性的问题。在经济数学、计算机科学、运筹决策、人口理论、天气预报、物理学、安全科学等领域都要经常用到随机过程的理论来建立数学模型。

本书原版 *Probability, Random Variables and Stochastic Processes* 是美国著名学者 A. 帕普里斯 (Athanasios Papoulis) 教授所著的一本经典教材，自 1965 年第 1 版问世以来至今已至第 4 版，它一直被美国多所大学用作相关专业的研究生教材，长久不衰，是被美国 Citation 模板引用最多的一本书。它的特点是将高深的理论应用于工程实际，因而深受工程界人士的青睐。作者按照演绎规则，结合大量工程上非常令人感兴趣的例子，系统地、逐步地展开了概率论和随机过程的内容。

帕普里斯教授 1921 年出生于希腊，分别从希腊国家技术大学和美国宾夕法尼亚大学获得电子工程和数学学士学位，于 1952 年到美国布鲁克林工业大学任教，2002 年在美国去世。他一生撰写了 150 余篇学术文章和 9 本专著，获得了很多荣誉，包括国际电气电子工程师协会 (IEEE) 颁发的杰出教育贡献金质奖章、德国 Humbolt 科研奖和 3 个欧洲大学的荣誉学位。

考虑到概率论在我国的本科低年级已学过，有些内容甚至在高中就已经学过，将本书定位在本科高年级或研究生教材，这些内容就显得并非必需。所以在改编过程中，将原书前 2 章删除，第 3 章至第 16 章改为第 1 章到第 14 章，后面用到前 2 章的定理、公式、例题合成第 0 章供学习时参考，只起到提点的作用，没有系统性，如果需要复习概率论的知识，请参考专门的概率论与数理统计教材。感谢清华大学葛余博教授提出的改编意见，由王挥老师执笔完成。

本书内容包括重复试验、随机变量的概念、一元随机变量的函数、二元随机变量、随机变量序列、统计学、随机过程的一般概念、随机游动及其应用、谱表示、谱估计、均方估计、熵、马尔可夫链、马尔可夫过程与排队论。叙述流畅直观，但不失严谨，理论部分与应用部分结合紧密，内容丰富简洁。与国内的类似教材体系不同，更具思想性。由于本书包含了大量给出结果的实例和 MATLAB 的代码，所以也很便于自学。MATLAB 的代码和针对各节的多选题的测验等内容也可以在网站上找到。

本书可供无线电通信系统、信号处理、控制理论、优化等专业的研究生和本科高年级学生使用，也可供相关领域的科研人员和工程技术人员参考。

前 言

与前几版相比，第4版做了重大的改进，包括增加了一位合作作者。第4版大约有三分之一的内容是新的，新内容与原内容很好地融为一体，新版秉承了前三版的风格和精华，这些是前几版的读者非常熟悉的。

新版保持了相同的基本观点和方法：按照演绎科学讲解概率论和随机过程这门课程，并通过基本的工程应用说明理论。关于本书的内容安排，第1版的说明依然有效：“本书既不是为那些满足于查阅指导手册的学生，也不是为那些能从高等数学教材中深究这一课题的少数人写的。本书的主要对象是大多数的工程师和物理学家，他们相当成熟，能够理解并跟得上逻辑推理……在一些概率论的入门课程中，所讲的概率论的基本原理与现代应用所需的复杂概念之间明显缺乏衔接……随机变量、变换、数学期望、条件密度和特征函数是不可能熟练掌握的。这些概念必须明确定义并且逐个加以详细讨论。”

基于此，我们加入了大量的例子进一步澄清这些概念。第4版中新的课题包括：

第1章和第2章有一些部分重写并得到了充实。第1章有一节详细描述了伯努利定理和机会游戏（1-3节），添加了几个有趣的例子提高学生的兴趣，包括经典的赌博破产问题。在第2章，分类并罗列了各种概率分布，介绍了二项式分布的两种近似，表明了一些随机变量之间的关系。

第3章包含了一些新例子，这些例子演示了特征函数和矩生成函数的用途，包括棣莫弗-拉普拉斯定理的证明。

第4章被重写并增加了一些例子，这一章透彻描述了二元随机变量及其性质。

第6章增加了6-3节——参数估计，包括了最小方差无偏估计的关键思想、克拉美-罗界、罗-布莱科沃尔定理和巴塔亚界。

在第7、8章，泊松过程这节被扩充，包含了一些新结果，并添加了随机游动的详细内容，作为新的一节。

第 10 章包括了一个新的小节，描述了在给定一组有效的自相关函数的情况下，所有容许的谱延拓类的参数化。

因为排队的重要性，原材料中关于排队论的内容被完全修改并扩充成第 13 和 14 章。第 13 章描述了马尔可夫链，包括性质、特征，以及链的长期（稳态）和瞬态性态，也通过例子说明了各个定理的用途。特别是，例 13-26. 网球比赛是一个从理论到应用的非常好的例子。这章也包括了分枝理论的详细研究，它在排队论中有重要的应用。第 14 章描述了马尔可夫过程和排队论，从介绍查普曼-柯尔莫格洛夫（Chapman-Kolmogorov）方程入手，核心是用生-灭过程演示马尔可夫排队。不过，也讲到了非马尔可夫排队和机器服务问题，并包括了对网络排队的介绍。

这本书的内容可按如下安排作为一个学期的课程进行讲授：

- 第 1 章到第 4 章：概率论（对高年级或一年级研究生）
- 第 5 章和第 6 章：统计和估计理论（概率论的后续课程）
- 第 7 章至第 9 章：随机过程（概率论的后续课程）
- 第 10 章至第 12 章：谱估计和滤波（随机过程的后续课程）
- 第 13 章和第 14 章：马尔可夫链和排队论（概率论的后续课程）

最后，作者衷心感谢 McGraw-Hill 出版公司电子和计算机工程编辑 Gatherine Fields Shultz 女士，发展部编辑 Michelle Flomenhoft 女士和 John Griffin 先生，计划部经理 Sheila Frank 女士和她高效率的团队。感谢 D. P. Gelopoulos, M. Georgiopoulos, A. Haddad, T. Moon, J. Rowland, C. S. Tsang, J. K. Tugnait 和 O. C. Ugweje 教授，在整个书的修改过程中，他们提出了大量的评论、批评和指导。另外，应该特别提到是 Michael Rosse 博士，他的同事 Dante Youla, Henry Bertoni, Leonard Shaw 和 Ivan Selesnick 教授，以及他的学生 Hyun Seok Oh 博士，Jun Ho Jo 先生和 Seung Hun Cha 先生，在手稿的准备过程中，他们给予作者有价值的帮助和鼓励。作者同 C. Radhakrishna Rao 教授讨论了他的两个关键定理和其他问题，对他提供的帮助深表感谢。

A. Papoulis
S. U. Pillai

PREFACE

The fourth edition of this book has been updated significantly from previous editions, and it includes a coauthor. About one-third of the content of this edition is new material, and these additions are incorporated while maintaining the style and spirit of the previous editions that are familiar to many of its readers.

The basic outlook and approach remain the same: To develop the subject of probability theory and stochastic processes as a deductive discipline and to illustrate the theory with basic applications of engineering interest. To this extent, these remarks made in the first edition are still valid: “The book is written neither for the handbook-oriented students nor for the sophisticated few (if any) who can learn the subject from advanced mathematical texts. It is written for the majority of engineers and physicists who have sufficient maturity to appreciate and follow a logical presentation... There is an obvious lack of continuity between the elements of probability as presented in introductory courses, and the sophisticated concepts needed in today’s applications.... Random variables, transformations, expected values, conditional densities, characteristic functions cannot be mastered with mere exposure. These concepts must be clearly defined and must be developed, one at a time, with sufficient elaboration.”

Recognizing these factors, additional examples are added for further clarity, and the new topics include the following.

Chapters 1 and 2 have undergone substantial rewriting. Chapter 1 has a detailed section on *Bernoulli’s theorem and games of chance* (Sec. 1-3), and several examples are presented there including the classical *gambler’s ruin problem* to stimulate student interest. In Chap. 2 various probability distributions are categorized and illustrated, and two kinds of approximations to the binomial distribution are carried out to illustrate the connections among some of the random variables.

Chapter 3 contains new examples illustrating the usefulness of characteristic functions and moment-generating functions including the proof of the DeMoivre – Laplace theorem.

Chapter 4 has been rewritten with additional examples, and is complete in its description of two random variables and their properties.

Chapter 6 contains a new Sec. 6-3 on *Parameter estimation* that includes key

ideas on minimum variance unbiased estimation, the Cramer – Rao bound, the Rao –Blackwell theorem, and the Bhattacharya bound.

In Chaps. 7 and 8, sections on *Poisson processes* are further expanded with additional results. A new detailed section on *random walks* has also been added.

Chapter 10 includes a new subsection describing the parametrization of the class of all admissible spectral extensions given a set of valid autocorrelations.

Because of the importance of *queueing theory*, the old material has undergone complete revision to the extent that two new chapters (13 and 14) are devoted to this topic. Chapter 13 describes *Markov chains*, their properties, characterization, and the long-term (steady state) and transient behavior of the chain and illustrates various theorems through several examples. In particular, Example 13-26 *The Game of Tennis* is an excellent illustration of the theory to analyze practical applications, and the chapter concludes with a detailed study of *branching processes*, which have important applications in queueing theory. Chapter 14 describes *Markov processes and queueing theory* starting with the Chapman-kolmogorov equations and concentrating on the *birth-death processes* to illustrate markovian queues. The treatment, however, includes non-markovian queues and, machine servicing problems, and concludes with an introduction to the network of queues.

The material in this book can be organized for various one semester courses:

- Chapters 0 to 4: *Probability Theory* (for senior and/or first-level graduate students)
- Chapters 5 and 6: *Statistics and Estimation Theory* (as a follow-up course to *Probability Theory*)
- Chapters 7 to 9: *Stochastic Processes* (follow-up course to *Probability Theory*)
- Chapters 10 to 12: *Spectrum Estimation and Filtering* (follow-up course to *Stochastic Processes*)
- Chapters 13 and 14: *Markov Chains and Queueing Theory* (follow-up course to *Probability Theory*)

The authors would like to thank Ms. Catherine Fields Shultz, editor for electrical and computer engineering at McGraw-Hill Publishing Company, Ms. Michelle Flomenhoft and Mr. John Griffin, developmental editors, Ms. Sheila Frank, Project manager and her highly efficient team, and Profs. D. P. Gelopoulos, M. Georgiopoulos, A. Haddad, T. Moon, J. Rowland, C. S. Tsang, J. K. Tugnait, and O. C. Ugweje, for their comments, criticism, and guidance throughout the period of this revision. In addition, Dr. Michael Rosse, several colleagues at Polytechnic including Profs. Dante Youla, Henry Bertoni, Leonard Shaw and Ivan Selesnick, as well as students Dr. Hyun Seok Oh, Mr. Jun Ho Jo, and Mr. Seung Hun Cha deserve special credit for their valuable help and encouragement during the preparation of the manuscript. Discussions with Prof. C. Radhakrishna Rao about two of his key theorems in statistics and other items are also gratefully acknowledged.

Athanasios Papoulis
S. Unnikrishna Pillai

目 录

- 出版说明 / IV
影印改编版序 / V
前 言 / VI
PREFACE / XIII
- 第 0 章 概 率 / 1**
- 第 I 部分 随机变量 / 9**
- 第 1 章 重复试验 / 10**
- 1-1 联合实验
1-2 伯努利试验
1-3 伯努利定理和机会游戏
习题
- 第 2 章 随机变量的概念 / 36**
- 2-1 引言
2-2 分布函数和密度函数
2-3 常用随机变量
2-4 条件分布
2-5 二项式随机变量的渐进逼近
习题
- 第 3 章 一元随机变量的函数 / 87**
- 3-1 随机变量 $g(\mathbf{x})$
3-2 $g(\mathbf{x})$ 的分布
3-3 均值和方差
3-4 矩
3-5 特征函数
习题
- 第 4 章 二元随机变量 / 133**
- 4-1 二元分布
4-2 二元随机变量的一个函数
4-3 二元随机变量的两个函数
4-4 联合矩
4-5 联合特征函数
4-6 条件分布
4-7 条件期望值
习题
- 第 5 章 随机变量序列 / 207**
- 5-1 一般概念
5-2 条件密度, 特征函数和正态性
5-3 均方估计
5-4 随机收敛和极限定理
5-5 随机数列: 意义和生成
习题
- 第 6 章 统计学 / 267**
- 6-1 引言
6-2 估计
6-3 参数估计
6-4 假设检验
习题
- 第 II 部分 随机过程 / 335**
- 第 7 章 一般概念 / 337**
- 7-1 定义
7-2 具有随机输入的系统
7-3 功率谱
7-4 离散时间过程
附录 7A 连续性, 微分, 积分
附录 7B 移位算子和平稳过程
习题
- 第 8 章 随机游动及其应用 / 399**
- 8-1 随机游动
8-2 泊松点和散弹噪声
8-3 调制
8-4 循环平稳过程
8-5 带限过程和采样定理
8-6 噪声中的确定性信号
8-7 双谱和系统识别

- 附录 8A 泊松求和公式
 附录 8B 施瓦尔兹不等式
 习题
- 第 9 章 谱表示 / 463**
 9-1 分解和新息
 9-2 有限阶系统和状态变量
 9-3 傅里叶级数和卡洛南-洛伊(K-L)展开
 9-4 随机过程的谱表示
 习题
- 第 10 章 谱估计 / 487**
 10-1 遍历性/各态历经性
 10-2 谱估计
 10-3 外推和系统辨识
 10-4 外推谱的一般类和尤拉参数化
 附录 10A 最小相位函数
 附录 10B 全通函数
 习题
- 第 11 章 均方估计 / 544**
 11-1 引言
 11-2 预测
 11-3 滤波和预测
 11-4 卡尔曼滤波器
 习题
- 第 12 章 熵 / 593**
 12-1 引言
 12-2 基本概念
 12-3 随机变量和随机过程
 12-4 最大熵方法
 12-5 编码
 12-6 信道容量
 习题
- 第 13 章 马尔可夫链 / 659**
 13-1 引言
 13-2 高阶转移概率和查普曼-柯尔莫格洛夫方程
 13-3 状态分类
 13-4 平衡分布与极限概率
 13-5 非常返状态和吸收概率
 13-6 分支过程
 附录 13A 恒定数目的混合型群体
 附录 13B 周期链的结构
 习题
- 第 14 章 马尔可夫过程与排队论 / 737**
 14-1 引言
 14-2 马尔可夫过程
 14-3 排队论
 14-4 排队网络
 习题
- 参考文献 / 799
 索引 / 801
 教辅材料申请表 / 817

CONTENTS

出版说明	III
影印改编版序	V
前言	VI
目录	VIII
PREFACE	XIII
CHAPTER 0 PROBABILITY	1
PART I RANDOM VARIABLES	9
CHAPTER 1 REPEATED TRIALS	10
1-1 Combined Experiments / 1-2 Bernoulli Trials / 1-3 Bernoulli's Theorem and Games of Chance / Problems	
CHAPTER 2 The Concept of a Random Variable	36
2-1 Introduction / 2-2 Distribution and Density Functions / 2-3 Specific Random Variables / 2-4 Conditional Distributions / 2-5 Asymptotic Approximations for Binomial Random Variable / Problems	
CHAPTER 3 Functions of One Random Variable	87
3-1 The Random Variable $g(\mathbf{x})$ / 3-2 The Distribution of $g(\mathbf{x})$ / 3-3 Mean and Variance / 3-4 Moments / 3-5 Characteristic Functions / Problems	
CHAPTER 4 Two Random Variables	133
4-1 Bivariate Distributions / 4-2 One Function of Two Random Variables / 4-3 Two Functions of Two Random Variables / 4-4 Joint Moments / 4-5 Joint Characteristic	

	Functions / 4-6 Conditional Distributions / 4-7 Conditional Expected Values / Problems	
CHAPTER 5	Sequences of Random Variables	207
	5-1 General Concepts / 5-2 Conditional Densities, Characteristic Functions, and Normality / 5-3 Mean Square Estimation / 5-4 Stochastic Convergence and Limit Theorems / 5-5 Random Numbers: Meaning and Generation / Problems	
CHAPTER 6	STATISTICS	267
	6-1 Introduction / 6-2 Estimation / 6-3 Parameter Estimation / 6-4 Hypothesis Testing / Problems	
PART II	STOCHASTIC PROCESSES	335
CHAPTER 7	General Concepts	337
	7-1 Definitions / 7-2 Systems with Stochastic Inputs / 7-3 The Power Spectrum / 7-4 Discrete – Time Processes / Appendix 7A Continuity, Differentiation, Integration / Appendix 7B Shift Operators and Stationary Processes / Problems	
CHAPTER 8	Random Walks and Other Applications	399
	8-1 Random Walks / 8-2 Poisson Points and Shot Noise / 8-3 Modulation / 8-4 Cyclostationary Processes / 8-5 Bandlimited Processes and Sampling Theory / 8-6 Deterministic Signals in Noise / 8-7 Bispectra and System Identification / Appendix 8A The Poisson Sum Formula / Appendix 8B The Schwarz Inequality / Problems	
CHAPTER 9	Spectral Representation	463
	9-1 Factorization and Innovations / 9-2 Finite-Order Systems and State Variables / 9-3 Fourier Series and Karhunen – Loeve Expansions / 9-4 Spectral Representation of Random Processes / Problems	
CHAPTER 10	Spectrum Estimation	487
	10-1 Ergodicity / 10-2 Spectrum Estimation / 10-3 Extrapolation and System Identification / 10-4 The General Class of Extrapolating Spectra and Youla's Parametrization / Appendix 10A Minimum-Phase Functions / Appendix 10B All-Pass Functions / Problems	
CHAPTER 11	Mean Square Estimation	544
	11-1 Introduction / 11-2 Prediction / 11-3 Filtering and Prediction / 11-4 Kalman Filters / Problems	

CHAPTER 12	Entropy	593
	12-1 Introduction / 12-2 Basic Concepts / 12-3 Random Variables and Stochastic Processes / 12-4 The Maximum Entropy Method / 12-5 Coding / 12-6 Channel Capacity / Problems	
 CHAPTER 13	 Markov Chains	 659
	13 - 1 Introduction / 13-2 Higher Transition Probabilities and the Chapman-Kolmogorov Equation / 13-3 Classification of States / 13-4 Stationary Distributions and Limiting Probabilities / 13-5 Transient States and Absorption Probabilities / 13-6 Branching Processes / Appendix 13A Mixed Type Population of Constant Size / Appendix 13B Structure of Periodic Chains / Problems	
 CHAPTER 14	 Markov Processes and Queueing Theory	 737
	14-1 Introduction / 14-2 Markov Processes / 14-3 Queueing Theory / 14-4 Networks of Queues / Problems	
	Bibliography	799
	Index	801
	教辅材料申请表	817

CHAPTER

0

PROBABILITY

If the experiment is performed n times and the event A occurs n_A times, then, *with a high degree of certainty*, the relative frequency n_A/n of the occurrence of A is close to $P(A)$:

$$P(A) \approx n_A/n \quad (0-1)$$

provided that n is *sufficiently large*.

PARTITIONS. A partition U of a set S is a collection of mutually exclusive subsets A_i of S whose union equals S (Fig. 0-1).

$$A_1 \cup \dots \cup A_n = S \quad A_i A_j = \{\emptyset\} \quad i \neq j \quad (0-2)$$

Thus

$$U = [A_1, \dots, A_n]$$

THE AXIOMS

► We assign to each event A a number $P(A)$, which we call *the probability of the event A*. This number is so chosen as to satisfy the following three conditions:

I $P(A) \geq 0$ (0-3)

II $P(S) = 1$ (0-4)

III if $AB = \{\emptyset\}$ then $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (0-5)



These conditions are the axioms of the theory of probability. In the development of the theory, all conclusions are based directly or indirectly on the axioms and only on the axioms. Some simple consequences are presented next.

PROPERTIES. The probability of the impossible event is 0:

$$P\{\emptyset\} = 0 \quad (0-6)$$

Indeed, $A \cap \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$ and $A \cup \{\emptyset\} = A$; therefore [see (0-5)]

$$P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P\{\emptyset\}$$

For any A ,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1 \quad (0-7)$$

because $A \cup \bar{A} = S$ and $A\bar{A} = \{\emptyset\}$; hence

$$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

For any A and B ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq P(A) + P(B) \quad (0-8)$$

To prove this, we write the events $A \cup B$ and B as unions of two mutually exclusive events:

$$A \cup B = A \cup \bar{A}B \quad B = AB \cup \bar{A}B$$

Therefore [see (0-5)]

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A}B) \quad P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$$

Eliminating $P(\bar{A}B)$, we obtain (0-8).

Finally, if $B \subset A$, then

$$P(A) = P(B) + P(A\bar{B}) \geq P(B) \quad (0-9)$$

because $A = B \cup A\bar{B}$ and $B(A\bar{B}) = \{\emptyset\}$.

EXAMPLE 0-1

► Suppose that S consists of the four elements a, b, c , and d and C consists of the sets $\{a\}$ and $\{b\}$. Attaching to C the complements of $\{a\}$ and $\{b\}$ and their unions and intersections, we conclude that the smallest field containing $\{a\}$ and