MONOGRAPHIES DUNOD

GROUPES FINIS DE SYMÉTRIE ET RECHERCHE DE SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER

PAR

L. MARIOT

Maître de Conférences
à la Faculté des Sciences de Dijon

DUNOD
PARIS
1959

AVANT-PROPOS

La recherche des niveaux énergétiques des bandes de valence et de conduction d'un cristal est un problème non résolu en toute rigueur : il faut utiliser des méthodes d'approximation pour trouver les solutions de l'équation de SCHRÖDINGER appliquée à un cristal.

Les méthodes employées jusqu'à présent reposent sur un principe variationnel ; elles conduisent toutes à la résolution d'une équation séculaire de degré élevé si l'on veut une précision acceptable. Plusieurs points essentiels sont à examiner :

a) Comment déterminer le potentiel $V(r)$ du cristal dû à l'interaction des noyaux et des électrons, ainsi que des électrons entre eux.

b) Quelles sont les fonctions d'essai qui seront choisies pour traduire le principe variationnel.

c) Comment résoudre pratiquement un déterminant de degré élevé.

Nous nous sommes proposé d'étudier les deux derniers points et de montrer la nécessité absolue de la théorie des groupes pour aborder avec profit cette recherche. Il n'est pas exagéré de dire que cette discipline est un outil mathématique indispensable aux théories modernes de l'état solide.

Le premier chapitre est un bref rappel des définitions fondamentales de la théorie des groupes ; le second traite avec quelque détail de la représentation des groupes finis et dans le troisième nous indiquons les propriétés essentielles des groupes spatiaux associés aux cristaux.

Après avoir donné succinctement au chapitre IV le principe de la méthode variationnelle de RITZ, nous étudions au chapitre V les propriétés de symétrie des fonctions propres de l'équation de SCHRÖDINGER appliquée à un système dont le groupe de symétrie associé est fini, et nous montrons comment choisir les fonctions d'essai de la méthode de RITZ et trouver ensuite les fonctions symétriques qui seules permettent la factorisation du déterminant séculaire et la résolution du problème.

Le principe de la méthode féconde des ondes planes orthogonales est exposé au chapitre VI. Enfin, nous appliquons les notions développées précédemment à un exemple précis : l'étude des niveaux énergétiques électroniques des cristaux du type diamant.

C'est M. Pierre AIGRAIN qui a eu l'idée de cet ouvrage. Nous lui adressons nos plus vifs remerciements pour l'aide et les conseils fructueux qu'il nous a prodigués. De plus, nous sommes reconnaissant à M. F. HERMANN et à M. W.-O. WOODRUFF qui nous ont communiqué très aimablement et très simplement leurs travaux personnels et inédits sur ces questions.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES GROUPES

1. Notion de groupe.

Dans ce chapitre, nous rappellerons simplement quelques définitions fondamentales absolument nécessaires pour la compréhension de la suite de l'ouvrage.

a) *Un ensemble* est une collection finie ou infinie d'objets mathématiques de nature quelconque ; ces objets sont dits les éléments de l'ensemble.

Si un élément arbitraire de l'ensemble E possède une propriété, ceux des éléments de E possédant la même propriété forment un nouvel ensemble appelé *partie* de E.

b) Etant donné un ensemble E, on appelle loi de composition entre éléments de cet ensemble un procédé qui à deux éléments quelconques x et y de E fait correspondre un troisième élément z de E. On écrira : $z = x \cdot y$. Evidemment, en général, $x \cdot y \neq y \cdot x$.

c) Un *groupe* est alors un ensemble G muni d'une loi de composition satisfaisant aux trois conditions suivantes :

1) la loi est *associative* :

$$C_j \cdot (C_k \cdot C_l) = (C_j \cdot C_k) \cdot C_l \quad , \quad C_j, C_k, C_l \in G ;$$

2) la loi admet un *élément unité* E tel que :

$$E \cdot C_k = C_k \cdot E = C_k \text{ quel que soit } C_k \in G ;$$

3) tout élément C_i a un inverse $(C_i)^{-1}$ pour la loi considérée tel que :

$$C_i \cdot (C_i)^{-1} = (C_i)^{-1} \cdot C_i = E.$$

EXEMPLES.

— Les entiers positifs, négatifs et le nombre zéro forment un groupe dont la loi de composition est l'addition. $a + 0 = 0 + a = a$, 0 est l'élément unité du groupe, $(a)^{-1} = -a$, car $-a + a = 0$.

— Soient trois vecteurs non coplanaires $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ de l'espace, l'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{r} = L_1 \boldsymbol{a}_1 + L_2 \boldsymbol{a}_2 + L_3 \boldsymbol{a}_3$, L_1, L_2, L_3 entiers positifs, négatifs ou nuls, forme un groupe. Ces groupes comprennent un nombre infini d'éléments ; ce sont des *groupes infinis*. Par contre, un *groupe fini d'ordre g* contiendra g éléments. Les quatre nombres $1, -1, i, -i$ munis de la loi de multiplication ordinaire forment un groupe d'ordre 4. De même, l'ensemble des permutations des trois lettres a, b, c forme un groupe d'ordre 6.

d) Groupe abélien. — Si la loi de composition est en outre commutative ($A \cdot B = B \cdot A$) le groupe est dit commutatif ou abélien. Les trois premiers exemples sont des groupes abéliens tandis que le groupe de permutations (abc) ne l'est pas, il en est de même pour le groupe des déplacements de l'espace ordinaire.

2. Table de multiplication. Isomorphisme.

Prenons comme exemple le groupe dihédral D_3 d'ordre 6 : c'est le groupe de symétrie d'un solide admettant un axe principal de symétrie Λ_3 d'ordre 3 et trois axes secondaires Λ_2 perpendiculaires à Λ_3. Ses éléments sont

E, $A = C_3^1$ (rotation de $2\pi/3$ autour de Λ_3)

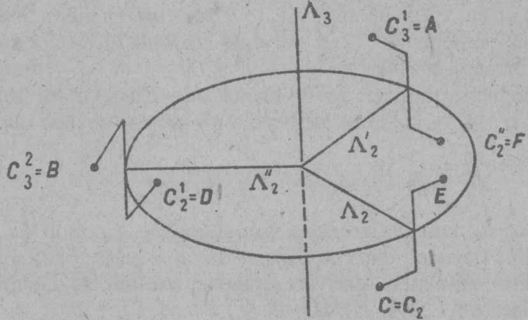
$B = C_3^2$ (rotation de $4\pi/3$ autour de Λ_3)

$C = C_2 \quad , \quad D = C_2' \quad , \quad F = C_2''$

C_2, C_2', C_2'' désignant respectivement les rotations de π autour de chacun des trois axes d'ordre 2.

Il est facile de construire la table de multiplication suivante :

	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	B	E	D	F	C
B	B	E	A	F	C	D
C	C	F	D	E	B	A
D	D	C	F	A	E	B
F	F	D	C	B	A	E



Ainsi :

$$C \cdot B = F \quad , \quad B \cdot C = D.$$

Pour chaque groupe on peut de la même manière établir une table de multiplication.

— Deux groupes G et G' sont *simplement isomorphes* si à chaque élément A, B, C,... de G correspond un élément

$A', B', C',...$ de G' tel que si $A \cdot B = C$, on a $A' \cdot B' = C'$. Evidemment, deux groupes simplement isomorphes ont même table de multiplication.

Dans le cas précédent, le groupe D_3 est simplement isomorphe avec le groupe de permutations des trois lettres a, b, c.

3. Notion de classe.

A, B, X étant trois éléments d'un groupe G, B est le transformé de A par X si $B = X^{-1} . A . X$, et B sera dit conjugué de A. Les propriétés suivantes sont évidentes : tout élément A de G est conjugué avec lui-même ; si A est conjugué avec B, B est conjugué avec A ; si A est conjugué à la fois avec B et C, B et C sont conjugués entre eux, c'est-à-dire que :

si $B = X^{-1} \cdot A \cdot X$ et si $C = Y^{-1} \cdot A \cdot Y$, $X, Y, B, C \in G$
on a $B = Z^{-1} \cdot C \cdot Z$, avec $Z = Y^{-1} \cdot X$.

DÉFINITION FONDAMENTALE. — Soit un élément A de G, tous les éléments $X^{-1} \cdot A \cdot X$ conjugués de A, X appartenant à G, forment la *classe de A*.

L'élément unité E de G forme une classe à lui seul car $X^{-1} \cdot E \cdot X = E$. Tout élément d'un groupe abélien constitue une classe, car

$$X^{-1} \cdot A \cdot X = X^{-1} \cdot X \cdot A = E \cdot A = A.$$

Par contre, pour les groupes non abéliens, la notion de classe n'est plus triviale ; dans ce dernier cas, une classe peut contenir plusieurs éléments, par exemple le groupe D_3 comprend trois classes : E, (A, B), (C, D, F).

4. Sous-groupes.

DÉFINITION. — Etant donné un groupe G, on appelle sous-groupe de G une partie H de G jouissant des deux propriétés suivantes :

a) si $X \in H$ et $y \in H$, alors $X \cdot Y \in H$;

b) H muni de la loi de composition opérant dans G est un groupe.

L'élément unité de H coïncide nécessairement avec celui de G. En effet, soit E et E' les éléments unités de G et de H, X un élément de H et X^{-1} son inverse dans G, il vient :

$$E' = E' \cdot E = E' \cdot X \cdot X^{-1} = X \cdot X^{-1} = E.$$

Soit $(H) = (E, H_1, H_2, \ldots)$ un sous-groupe de G et considérons un élément X de G. Formons les ensembles :

$$X \cdot (H) = X, X \cdot H_1, X \cdot H_2, \ldots$$
$$(H) \cdot X = X, H_1 \cdot X, H_2 \cdot X, \ldots$$

Si X lui-même est un élément de H, la propriété $X \cdot (H) = (H) \cdot X = (H)$ est triviale, mais si X n'appartient pas à H, l'ensemble des éléments $X \cdot (H)$ sera appelé le *coensemble droit* de G associé à H tandis que l'ensemble des éléments $(H) \cdot X$ sera le *coensemble gauche* de G associé à H.

Théorème. — Le sous-groupe H et le coensemble $X \cdot H$ n'ont aucun élément commun.

Si cela était, $H_j = X \cdot H_k$ pour j et k donnés, donc $X = H_j \cdot H_k^{-1}$ et X appartiendrait à H, ce qui est contraire à l'hypothèse. Si n_1 est l'ordre de H (cas où H est fini), H et $X \cdot H$ contiennent le même nombre d'éléments.

Considérons maintenant un élément Y de G, mais n'appartenant ni à H, ni à $X \cdot H$. Il est facile de montrer que le coensemble $Y \cdot H$ n'a aucun élément commun avec $X \cdot H$.

Donc, étant donné un sous-groupe H de G, X un élément de G n'appartenant pas à H, Y un élément de G n'appartenant ni à H, ni à $X \cdot H$, Z un élément de G n'appartenant ni à H, ni à $X \cdot H$, ni à $Y \cdot H$, et ainsi de suite, on peut écrire [1] :

$$(G) = (H) + X \cdot (H) + Y \cdot (H) + Z \cdot (H) + \cdots \qquad (1)$$

chaque coensemble contenant autant d'éléments que H. Alors, obligatoirement, si le groupe G est *fini*, le nombre d'éléments n_1 de chaque coensemble, c'est-à-dire l'ordre de H, sera un sous-multiple de l'ordre n du groupe G.

---

[1] (G) désigne l'ensemble des éléments de G.

Définition. — L'indice du sous-groupe H par rapport au groupe *fini* G est le quotient de l'ordre de G par l'ordre de H.

L'indice de H est égal au nombre de coensembles du développement (1) de G par rapport à H.

Tout ce qui a été dit pour les coensembles droits peut être répété pour les coensembles gauches. On a :

$$(G) = (H) + (H) \cdot X + (H) \cdot Y' + \cdots \qquad (2)$$

en notant bien, qu'en général $(H) \cdot X \neq X \cdot (H)$ et que $Y \neq Y'$,... En résumé :

$$\begin{cases} (G) = (H) \cdot [E', X, Y, \ldots] \\ (G) = [E', X, Y', \ldots] \cdot (H) \end{cases} \qquad (3)$$

Remarquons que les ensembles $[E', X, Y, \ldots]$, $[E', X, Y', \ldots]$ n'ont aucune raison d'être eux-mêmes des groupes.

5. Sous-groupes conjugués. Sous-groupe invariant.

L'ensemble (K) des transformés des éléments de H par un élément donné X de G est dit conjugué du sous-groupe H par rapport à X ; on écrira :

$$(K) = X^{-1} \cdot (H) \cdot X. \qquad (4)$$

Théorème. — *L'ensemble K est un sous-groupe de G.*

Soit $H_i \cdot H_j = H_k$; $X^{-1} \cdot H_i \cdot X$ et $X^{-1} \cdot H_j \cdot X$ appartiennent à K. Il est évident que :

$$(X^{-1} \cdot H_i \cdot X) \cdot (X^{-1} \cdot H_j \cdot X) = X^{-1} \cdot H_i H_j \cdot X$$

appartient encore à K.

D'autre part, $X^{-1} \cdot E \cdot X = E$. Enfin $X^{-1} \cdot H_j \cdot X$ est l'inverse de $X^{-1} \cdot H_j^{-1} \cdot X$. K est un groupe dit le *sous-groupe conjugué du sous-groupe H par rapport à X.*

Abordons la notion importante de sous-groupe invariant.

DÉFINITION. — *Si* $(H) = X^{-1} \cdot (H) \cdot X$ *pour tout élément* X *de* G, H *est sous-groupe invariant de* G.

Soient alors $X \cdot (H)$ et $(H) \cdot X$ les coensembles associés à H, comme $X^{-1} \cdot (H) \cdot X = (H)$ il vient $(H) \cdot X = X \cdot (H)$, dans les formules (1) et (2) $Y = Y'$, $Y \cdot (H) = (H) \cdot Y$, et finalement :

$$\left\{\begin{aligned} (G) &= (H) + X \cdot (H) + Y \cdot (H) + \cdots \\ (G) &= (H) + (H) \cdot X + (H) \cdot Y + \cdots \end{aligned}\right. \qquad (5)$$

THÉORÈME. — *L'ensemble* (H), $X \cdot (H)$, $Y \cdot (H)$,... *est un groupe dont l'élément unité est* (H).

Remarquons d'abord que l'ensemble (H), $X \cdot (H)$, $Y \cdot (H)$,... contient $X \cdot Y \cdot (H)$, $X^{-1} \cdot (H)$, $Y^{-1} \cdot (H)$,... non obligatoirement différents de $X \cdot (H)$, $Y \cdot (H)$. Cet ensemble est bien un groupe car :

$$\left\{\begin{aligned} &a)\ X\cdot(H)\cdot Y\cdot(H) = X\cdot(H)\cdot(H)\cdot Y = X\cdot(H)\cdot Y = X\cdot Y\cdot(H) \\ &b)\ (H)\cdot X\cdot(H) = (H)\cdot X\cdot(H) = (H)\cdot(H)\cdot X = (H)\cdot X = X\cdot(H) \\ &c)\ X\cdot(H)\cdot X^{-1}\cdot(H) = X\cdot(H)\cdot(H)\cdot X^{-1} = X\cdot(H)\cdot X^{-1} = (H) \end{aligned}\right.$$

Les égalités (5) peuvent s'écrire :

$$(G) = (H) \cdot [E', X, Y, ...] = [E', X, Y, ...] \cdot (H) \qquad (6)$$

E' est un élément quelconque de H et $[E', X, Y, ...]$ est un groupe.

DÉFINITION. — $[E', X, Y, ...]$ *est le groupe facteur de* G *par rapport au sous-groupe invariant* H.

On le désigne par G/H et l'on écrit :

$$(G) = (G/H) \cdot (H) = (H) \cdot (G/H). \qquad (7)$$

CHAPITRE II

REPRÉSENTATION D'UN GROUPE

1. Opérateurs linéaires. Matrices.

Soit une base d'un espace vectoriel à n dimensions (n fini) constituée de n vecteurs linéairement indépendants $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Tout vecteur $\boldsymbol{X}$ de cet espace $\bar{E}_n$ peut se mettre sous la forme :

$$\boldsymbol{X} = \sum_{j=1}^{n} x_j \, \boldsymbol{e}_j, \tag{1}$$

x_j étant les composantes de $\boldsymbol{X}$ par rapport à la base $(\boldsymbol{e}_j)$. Appliquons à $\boldsymbol{X}$ l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ tel que $\boldsymbol{Y} = \mathcal{A}(\boldsymbol{X})$. Les composantes y_k de $\boldsymbol{Y}$ par rapport à la base $(\boldsymbol{e}_j)$ sont liées aux composantes x_j de $\boldsymbol{X}$ par les relations :

$$y_k = \sum_{k=1}^{n} A_{kj} \, x_j. \tag{2}$$

La matrice carrée $(n \times n)$ de composantes A_{kj} est la représentation de l'opérateur $\mathcal{A}$ par rapport à la base $(\boldsymbol{e}_j)$. Si nous désignons par Y la matrice colonne $\{ y_1, \ldots, y_n \}$ et par X la matrice colonne $\{ x_1, \ldots, x_n \}$ on peut écrire (2) sous la forme :

$$Y = AX. \tag{3}$$

Effectuons alors le changement de base $(\mathbf{e}_i) \rightarrow (\mathbf{e}'_i)$ tel que

$$\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{n} P_{jk}\,\mathbf{e}'_j.$$

Nous avons :

$$\mathbf{X} = \sum_k x_k\,\mathbf{e}_k = \sum_j x'_j\,\mathbf{e}'_j = \sum_{jk} x_k P_{jk}\,\mathbf{e}'_j$$

d'où :

$$x'_j = \sum_k P_{jk}\,x_k.$$

Les composantes x'_j, y'_j des vecteurs $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ par rapport à la base $(\mathbf{e}'_j)$ s'expriment par :

$$x'_j = \sum_k P_{jk}\,x_k \quad , \quad y'_j = \sum_k P_{jk}\,x_k. \tag{4}$$

Si nous désignons respectivement les matrices colonnes $\{y'_1,..., y'_n\}$ et $\{x'_1,..., x'_n\}$ par Y' et X' les relations (4) se traduisent par :

$$X' = PX \qquad Y' = PY \tag{5}$$

en langage matriciel.

Si nous admettons que les formules (5) sont inversibles, la matrice P est régulière.

De (5) et (3) on tire :

$$Y' = PY = PAX = PAP^{-1}X'.$$

D'où :

$$Y' = BX' \quad \text{avec} \quad B = PAP^{-1}. \tag{6}$$

DÉFINITION. — *La matrice $B = PAP^{-1}$ transformée de A par la matrice régulière P est équivalente à la matrice A.*

Les matrices B et A représentent le même opérateur linéaire $\mathcal{A}$ par rapport à deux bases différentes de E_n.

Rappelons deux propriétés importantes des matrices équivalentes :

a) Les traces de B et A sont égales.

En s'appuyant sur la propriété commutative (¹) trace $(MQ) =$ trace (QM), il vient :

$$\text{trace } B = \text{trace } (PAP^{-1}) = \text{trace } (PP^{-1}A) = \text{trace } A.$$

b) Les déterminants associés aux matrices B et A sont égaux.

2. Représentation d'un groupe.

Soient $M, N, \ldots, R, S, \ldots$ les éléments d'un groupe G. Associons à chaque élément R de G une matrice carrée $(n \times n)$ *régulière* $D(R)$ telle que :

$$D(R) \cdot D(S) = D(RS). \tag{7}$$

DÉFINITION. — *Le groupe de matrices $D(R)$ est une représentation de dimension n du groupe G.*

Les matrices $D(R)$ représentent elles-mêmes, par rapport à une base $\mathbf{e}_n$ de E_n, des opérateurs linéaires réguliers définis sur E_n.

Remarques. — *a*) $R \neq S$ n'implique pas obligatoirement $D(R) \neq D(S)$.

b) $D(R) \equiv 0$ ou $D(R) \equiv 1$ sont des représentations triviales du groupe G.

c) $$D(S^{-1}) = D^{-1}(S).$$

En effet :

$$D(S^{-1})\, D(S) = D(S^{-1}S) = E.$$

D'autre part :

$$D(S^{-1})\, D(S)\, D^{-1}(S) = E D^{-1}(S) = D^{-1}(S)$$

d'où :

$$D(S^{-1})\, E = D^{-1}(S)$$

d) Le groupe des matrices $D(R)$ est évidemment isomorphe du groupe G. Si on change de base dans E_n, on obtiendra un groupe de matrices $D'(R)$ équivalentes aux matrices $D(R)$.

(¹) trace $(MQ) = \sum_{ij} M_{ij} Q_{ji} = \sum_{ij} Q_{ji} M_{ij} =$ trace (QM).

3. Réductibilité.

1° Soit un groupe d'opérateurs linéaires réguliers $\mathcal{A}$ opérant sur l'espace vectoriel à n dimensions E_n.

Définitions. — 1.- E_1 sous espace de E_n est espace invariant de l'opérateur $\mathcal{A}$, si à *tout* vecteur V appartenant à E_1 il correspond un vecteur $\mathcal{A}V$ appartenant aussi à E_1.

2.- E_1 sous espace de E_n est espace invariant du *groupe* d'opérateurs $\mathcal{A}$, si à tout vecteur V appartenant à E_1 il correspond un vecteur $\mathcal{A}V$ appartenant à E_1, quel que soit l'opérateur $\mathcal{A}$ du groupe.

Considérons E_1 sous espace invariant de dimension $m < n$ du groupe d'opérateurs $\mathcal{A}$. Choisissons une base ($e_1, \ldots e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$) de E_n telle que les m premiers vecteurs soient dans E_1. Par rapport à une telle base le groupe d'opérateurs $\mathcal{A}$ est représenté par le groupe de matrices A. Calculons Ae_j ($j = 1, 2, \ldots m$) :

$$A e_j = \begin{vmatrix} A_{11}\, A_{12} \ldots\ldots\ldots A_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{j1} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1} \ldots\ldots\ldots A_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{1j} \\ . \\ A_{jj} \\ . \\ A_{nj} \end{vmatrix}$$

Le vecteur Ae_j doit appartenir à E_1, donc les $n - m$ derniers éléments de la $j^{ème}$ colonne de A ($j = 1, 2, \ldots m$) sont nuls, et :

$$A = \begin{pmatrix} A_{m,m} & \alpha_{m,n-m} \\ 0 & A_{n-m,n-m} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

$A_{m,m}$ est une matrice carrée à m lignes et à m colonnes, $\alpha_{m,n-m}$ est une matrice rectangulaire à m lignes et à $n - m$ colonnes, 0 est la matrice nulle rectangulaire à $n - m$ lignes et à m colonnes, $A_{n-m,n-m}$ une matrice carrée à $n - m$ lignes et à $n - m$ colonnes.

Toutes les matrices A du groupe peuvent se mettre sous la forme (6). *Nous dirons que le groupe de matrice A est réductible.* Dans le cas contraire, il sera dit *irréductible.*

S'il existe, en outre, un second sous-espace E_2 de E_n, espace invariant du groupe d'opérateurs $\mathcal{A}$ et espace complémentaire de E_1, donc de dimension $n - m$, choisissons une base de E_n telle que les n premiers vecteurs soient dans E_1 tandis que les $n - m$ derniers vecteurs soient dans E_2. Le vecteur Ae_j $(j = 1, 2,... m)$ appartient à E_1 tandis que le vecteur Ae_p $(p = m + 1,... n)$ appartient à E_2. Les matrices A représentant les opérateurs $\mathcal{A}$ du groupe par rapport à cette base auront la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{m,m} & 0 \\ 0 & A_{n-m,n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Nous dirons que le groupe de matrices A est complètement réductible. La complète réductibilité implique la réductibilité mais, en général, la réciproque n'est pas vraie ([3], ch. II, p. 57). Cependant, si on ne considère que les *groupes finis*, les deux notions sont équivalentes. Par la suite, n'étudiant que les groupes finis, nous dirons simplement qu'une matrice est *réductible* ou est *irréductible*.

DÉFINITION. — *La matrice A est la somme directe des matrices A^1 et A^2 :*

$$A = A^1 \dotplus A^2.$$

Il se peut qu'une nouvelle décomposition de A^1 et A^2 en somme directe soit possible, et ainsi de suite. Le processus prend fin quand la matrice A est décomposée en une somme directe de matrices irréductibles A^γ :

$$A = A^1 \dotplus A^2 \dotplus \cdots \dotplus A^\gamma \dotplus \cdots \dotplus A^\rho.$$

2° Supposons maintenant le groupe de matrices $\bar{D}(R)$, représentation n dimensionnelle $\Gamma = \{\bar{D}(R)\}$ d'un groupe *fini* G d'éléments $M, N,..., R, S,...$ Le groupe de matrices $\bar{D}(R)$ est la représentation par rapport à une base donnée de E_n d'un groupe d'opérateurs linéaires $\mathcal{A}$.