野口尚一監修

基礎機械工学全書

5

振動学

北郷　薫

露木洋二

共著

野口尚一監修

基礎機械工学全書

5

振　動　学

東京大学教授・工学博士

北郷　薫

工学院大学講師

露木洋二

共著

森北出版株式会社

著 者 略 歴

北郷　薫

1944年9月　東京帝国大学第一工学部機械工学科卒業
1949年10月　工学院大学助教授
1962年3月　工学博士
1962年4月　工学院大学教授
1966年6月　東京大学教授（工学部機械工学科）
現在にいたる．

露木　洋二

1956年3月　東京大学工学部機械工学科卒業
1956年4月　東京芝浦電気株式会社
1966年4月　工学院大学講師

基礎機械工学全書 5
振 動 学

1974年12月1日　第1版第1刷発行
1977年11月10日　第1版第3刷発行
定価はカバー・ケースに表示してあります．

著者との協議により検印は廃止します．

著 者　北 郷 薫（ほんごう かおる）
露 木 洋 二（つゆき ようじ）
発行者　森 北 肇
印刷者　増 田 嘉 十

発行所　森 北 出 版 株式会社
東京都千代田区富士見 1-4-11
電話 東京（265）8341（代表）
振替 東京 1-34757 郵便番号 102

日本書籍出版協会・自然科学書協会・工学書協会　会員

落丁・乱丁本はお取替えいたします　　印刷　洋文堂／製本　小高製本

3353-4605-8409

Printed in Japan

序　文

本書は大学工学部，工業短大および工業高専で履修する機械振動学の教科書または参考書として編纂したものである．

振動は広く自然界に存在する興味深い現象であり，昔から多くの物理学者によって研究されている．工学においても機械系，電気系に発生する振動の研究は極めて重大で多くの工学者の研究の対象になっている．

音響関係の機器のように振動を発生させてそれを直接利用する場合だけでなく，たとえば蒸気タービン，あるいは内燃機関の回転軸の振動の発生を防止したい場合にもそれらの振動の性質を知っていることが大切である．

線形振動の基礎的理論はすでに19世紀までの人々によって完成されている古いものである．しかし，その価値は永遠であり，現在でも，多くの実際問題を線形振動の問題として取り扱うことができるので工学を学ぶ人々が必ず学ばなければならない理論である．したがって本書では，大部分（第1章～第3章）を線形振動の解説にあてている．

非線形振動の研究は，線形振動の研究にくらべると研究の歴史も浅く，むずかしくて本書の程度をこえると思われる問題が多いが，機械工学の進歩につれて，機械の振動現象のなかにも非線形振動の問題として取り扱う必要があるものが多くなってきた．そのため本書においても，一章（第4章）を非線形振動の解説にあて，非線形振動の基礎の習得に役立てることを試みた．

現在，機械工学を学ぶ人が修得しなければならない知識は極めて多岐にわたっているにもかかわらず，休日の増加等により全体の授業時間はむしろ減少する傾向にありひとつひとつの学科に与えられる授業時間は決して多くはない．機械振動学の場合も同様であって，余裕のある場合は1週間1時限（90分）の授業で30週（1年）が与えられるが，15週（半年）しか与えられない場合も少なくない．

著者たちが浅学非才も顧みず，本書を世に送るにあたって留意した点は，まず，すくない学修時間で機械振動学の基礎を修得することができるように内容を選択しようと試みたことである．基礎を十分に理解しておけば，それ以上の高度の学習も研究も自力で可能になることは多くの人々が認めるところであ

る．

つぎに著者たちが留意したことは，著者たちの大学における授業の経験をもとにして，できるだけわかり易く機械振動学の内容を説明しようと試みたことである．

もとより著者たちの能力不足のために，でき上がった本書が所期のものと異なっていることを恐れるが，それにもかかわらず本書が読者の機械振動学の学習に役立つことがあれば，著者たちの望外の喜びである．

誤植その他の誤りについては十分注意したが，まだ残っているかもしれない．読者諸兄の忌憚のない御指摘を期待している．

おわりに本書を執筆するにあたって参考にさせていただいた多くの著書の著者諸氏に深甚な謝意を表明する．

1974年9月

北　郷　　薫

露　木　洋　二

目　　次

第1章　1自由度系の線形振動

第2章 多自由度系の線形振動

第3章　連続体の線形振動

第4章 非線形振動

第1章 1自由度系の線形振動

1・1 力学系の自由度

簡単なてこ，振り子，滑車などをはじめ複雑な往復動ピストンエンジン，自動車，船舶，航空機など，質量の分布と運動とが問題となる系(システム)を力学系と総称する．

いま図1・1に示す単振り子，およびばね振り子(ばね質量系)を例にとって説明する．これらの振り子の質量mの位置は，座標x, y, zを指定すると決定される．図1・1(a)の単振り子の場合に，糸または棒Omが伸び縮みせず，一定の長さlをもつときは

$$x^2+y^2+z^2=l^2 \quad (1\cdot1)$$

の関係があるから独立に変化できるのはx, y, zのうちの2つであり，これら2個の変数を定めれば質量mの位置が決定される．このとき，この単振り子の自由度(degree of freedom)は2であるという．図1・1(b)のばね振り子では，式(1・1)が成立しないから，ばね振り子の質量mの位置を決定するためにはx, y, zの3変数を指定する必要があり，このばね振り子の自由度は3である．

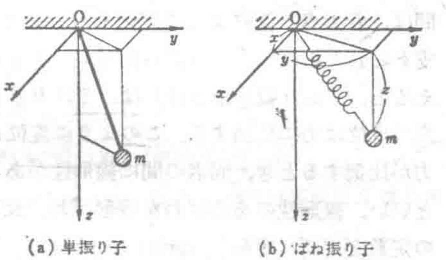


図1・1 振り子の自由度

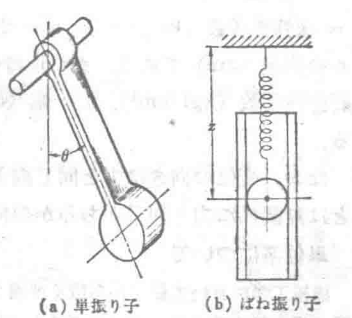


図1・2 1自由度の振り子

つぎに単振り子の支点の構造を図1・2のようなピン接にして一平面内だけでふれるようにするとか，ばね振り

子の質量に z 方向のガイドをつけて，質量が z 方向だけに運動するようにすると，それぞれ1自由度の運動系とすることができる．

これらの例は，力学系の自由度はその機械的構造によって定まることを示している．

1・2　線形ばねとばね定数

(1)　直　線　ば　ね

コイルばねの一端を固定し，他端にコイルの軸方向に力を加えると，力が比較的小さい間は，着力点の変位は力に比例する．適当に支えられた板ばねの一点に直角方向の力を加えると，力が比較的小さければ，やはり着力点の変位は力に比例する．このように変位と力が比例するとき，両者の間に線形性があるといい，線形性のあるばねを線形ばね，比例の定数を“ばね定数”（spring constant）という．式であらわせば，

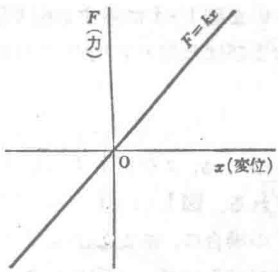


図 1・3　線形ばねのばね特性

$$F = kx \tag{1・2}$$

ここに，F = 力 (kgf)，x = 変位 (cm)，k = ばね定数 (kgf/cm) である．

ばね定数 k は，たとえば密巻コイルばねならば，$k = Gd^4/8nD^3$．ただし G = 横弾性係数 (kgf/cm²)，d = 素線の直径 (cm)，n = 有効巻数，D = コイルの直径 (cm) である．また片持板ばねならば，$k = Ebt^3/4l^3$．ただし E = 縦弾性係数 (kgf/cm²)，b = 幅 (cm)，t = 厚さ (cm)，l = 長さ(cm) である．

なお，変位の向きは力と同じ向きを正とし，コイルばねの場合に，伸び縮みとは無関係に力と同じどちらかの向きを正にとる．

単位系について

機械工学において従来から広く使用されている単位系は重力単位系である．メートル系の重力単位系では，1キログラム（1(kg) であらわす）の質量に作用する重力（本書では JIS に従って 1(kgf) であらわす），長さの単位1センチメートル（cm）と時間の単位1秒（s）とを基本単位として，他の物理量をこれらの3基本単位の組み合わせで

あらわすものである．たとえば，重さ（重力）が W(kgf) の物体の質量を x とすると，この物体は重力 W(kgf) の作用によって，重力の加速度 $g = 980$(cm/s²) で落下するから，ニュートンの運動の法則により 力 = 質量・加速度の関係があるから

$$W(\mathrm{kgf}) = x \cdot g(\mathrm{cm/s^2})$$

したがって

$$x = \frac{W}{g}(\mathrm{kgf \cdot s^2/cm})$$

となる．これにより，メートル系重力単位系では質量の単位は (kgf・s²/cm) となることがわかる．

将来，国際的に広く使用されることになっている SI 単位系 (système international d'unités) では，質量 1 キログラム (kg)，長さ 1 メートル (m) および時間 1 秒 (s) を基本単位として採用している．SI 単位系では力の単位は質量 1 (kg) に作用して 1 (m/s²) の加速度を生じるような力であり，この力の単位を 1 ニュートン ((N) であらわす) と名づける．すなわち

$$1(\mathrm{N}) = 1(\mathrm{kg})\ (\mathrm{m})/(\mathrm{s^2})$$

である．重力単位系の 1 (kgf) と 1 (N) との換算はつぎのとおりである．すなわち

$$1(\mathrm{kgf}) = g(\mathrm{kg})\ (\mathrm{cm})/(\mathrm{s^2}) = \frac{g}{100}(\mathrm{kg})\ (\mathrm{m})/(\mathrm{s^2}) \fallingdotseq 9.8(\mathrm{N})$$

SI 単位系は現在ではまだ十分には普及していないので，本書では諸単位を重力単位系で統一することにする．

(2) 回転ばね

コイルばねあるいは真直棒の一端を固定し，他端にトルクを加えてねじる場合にも，トルクが比較的小さい間は，角変位とトルクの間に比例関係があり，その比例の定数もばね定数と呼ばれる．(1)の場合と区別するときには，前者を直線ばね定数，これを回転ばね定数と称する．式であらわすならば，

$$T = k\theta \tag{1・3}$$

ここに，T = トルク (kgf・cm)，θ = 角変位 (rad)，k = 回転ばね定数 (kgf・cm/rad)

回転ばね定数 k は，たとえば密巻コイルばねならば，$k = Ed^4/64nD$，真直丸棒ならば，$k = \pi Gd^4/32l$ である．

一つの軸のまわりに摩擦なく自由に回転できる剛体を重力の場におき，トルクを加えて釣り合いの位置から微小な角変位を与えれば，この場合も角変位はトルクにほぼ比例するので，これも一種の回転ばねであって，$k = mgh$ とあらわすことができる．ここに，m = 質量 (kgf・s²/cm)，g = 重力の加速度(cm/

s^2), h = 回転軸と重心との距離 (cm) である．これはいわゆる複振り子であるが，重力ばねと呼ばれることもある．

(3) ばね定数の合成

二つ以上のばねを組み合わせた場合，おのおののばね定数を合成して一つの等価ばね定数であらわすことができる．

(a) 直列の場合 (図1・4)

二つのばね定数を k_1, k_2 とする．外力 F を加えた場合のそれぞれの変形量を δ_1, δ_2 とすれば，力 F は両ばねに共通に作用するから，$\delta_1 = F/k_1$, $\delta_2 = F/k_2$ であって，着力点の変位 $\delta = \delta_1 + \delta_2 = F/k_1 + F/k_2 = F(1/k_1 + 1/k_2)$ である．したがって等価ばね定数を k_e とすれば，

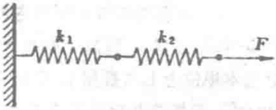


図1・4　直列ばね

$$k_e = \frac{F}{\delta} = \frac{1}{1/k_1+1/k_2} = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2} \tag{1・4}$$

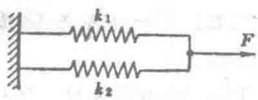
第三のばね k_3 をさらに直列に加える場合には，上記の k_e と k_3 とを同様に合成すればよいわけだから，一般に k_j ($j = 1\sim n$) を直列に接続した場合の等価ばね定数 k_e は，

$$\frac{1}{k_e} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j} \tag{1・4a}$$

により求めることができる．

(b) 並列の場合 (図1・5)

並列の場合には変形量 δ は両者とも等しいが，作用する力が異なる．いまそれを，それぞれ F_1, F_2 とすれば，$F_1 = k_1\delta$, $F_2 = k_2\delta$ であって，$F = F_1+F_2 = k_1\delta+k_2\delta = (k_1+k_2)\delta$ であるから等価ばね定数 k_e は，



$$k_e = F/\delta = k_1+k_2 \tag{1・5}$$

図1・5　並列ばね

したがって，一般に k_j ($j = 1\sim n$) を並列に接続する場合の等価ばね定数 k_e は，

$$k_e = \sum_{j=1}^{n} k_j \tag{1・5a}$$

により求めることができる．

上述の合成法則は回転ばね定数についても同じである．

【例　題】 図1・6に示すばね系の等価ばね定数を求め，着力点の変位 δ を F と k であらわせ．

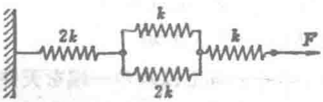


図1・6　線形ばね系の例

【解】 中央部の2個のばねは並列であるから合成すれば $3k$，そうすればあとは，k，$3k$，$2k$ の3個の直列ばねの合成となるから，

$$\frac{1}{k_e}=\frac{1}{k}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{3k}=\frac{11}{6k} \qquad \therefore\ k_e=\frac{6}{11}k$$

$$\therefore\ \delta=\frac{F}{k_e}=\frac{11}{6}\cdot\frac{F}{k}$$

1・3　自由振動の運動の方程式

一端が壁に固定されたコイルばねが水平方向に置かれ，その他端に付着されたおもりが，なんらかの方法で適当に拘束されていて，ばねの軸方向にだけなめらかに摩擦がなく動き得る場合を考える．ばねの軸を含む直線に沿って x 座標をとれば，おもりの位置は1変数 x のみであらわし得るから，これは1自由度系（system of one degree of freedom）である．

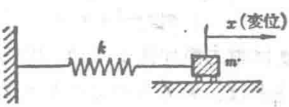


図1・7　1自由度直線振動系

さて，おもりの質量を $m(\mathrm{kgf\cdot s^2/cm})$，ばねのばね定数を $k(\mathrm{kgf/cm})$ として，おもりの運動を数式により表現することを考えよう．x 座標の原点は，おもりの静止の位置，すなわち釣り合い状態の点に選び，時間は t であらわすものとする．ニュートンの運動の法則によれば，運動の任意の瞬間において，おもりに作用する力は，おもりの質量と加速度の積に等しい．変位 x における加速度は $\ddot{x}=d^2x/dt^2$ であらわされ，作用している力はばね力 $-kx$ だけであるから運動の方程式は，

$$m\ddot{x}=-kx \tag{1・6}$$

ここで，ばね力は釣り合いの位置に戻そうとする向き，すなわち x が正のときは負の向き，x が負のときは正の向きと，つねに x と逆向きなので負号を欠く

ことができないことに注意すべきである．上式は移項すれば，

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{1・6a}$$

となり，m で割れば，

$$\ddot{x}+\omega_n{}^2x=0 \tag{1・7}$$

ただし，$\omega_n{}^2=k/m$

つぎに，同じばねの一端を天井に固定し，下端におもりをつけて鉛直に吊るした場合を考えてみよう．おもりはやはりばねの軸方向，すなわちこの場合には上下方向にしか動き得ないものとする．今度はおもりに作用する重力 mg がばねの伸縮に影響を及ぼすが，静止の状態すなわち釣り合いの位置を x 座標の原点に選べば，運動の方程式は全く同じになることが導かれる．

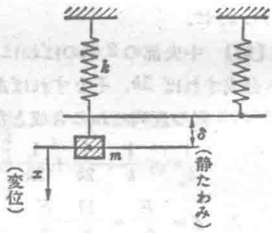


図 1・8　1自由度振動系（鉛直の場合）

まずおもりの重力 mg によるばねの伸びを δ とすれば，ばね力は上向きに $k\delta$ であるから，

$$mg-k\delta=0 \quad \text{すなわち} \quad k\delta=mg \tag{1・8}$$

g は重力の加速度で $g\fallingdotseq 980(\mathrm{cm/s^2})$ である．釣り合いの位置から下方に x をとれば，おもりの変位が x のときのばねの伸びは $\delta+x$，したがってばね力は $-k(\delta+x)$．この他に重力 mg がつねに作用しているから，運動の方程式は

$$m\ddot{x}=-k(x+\delta)+mg$$

前掲の式 (1・8) の関係を代入すれば，

$$m\ddot{x}=-kx$$

となって，式 (1・6) に一致する．このように重力は，釣り合いの位置を座標の原点に選べば，普通考慮しなくてもよい．しかし，運動がばねの軸方向ではない場合には状況が異なってくるので注意を要する．

一端が壁に固定された真直棒の他端に付着された円板が，棒の軸のまわりに微小角 θ 回転すると，ねじられた棒が元へ戻そうとするためにねじり振動が生ずる．この場合の運動の方程式は，任意の瞬間において，

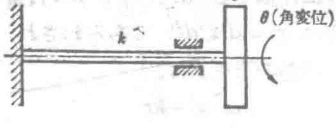


図 1・9　1自由度回転振動系

円板に作用する復元トルク $-k\theta$ が，円板の慣性モーメント J(kgf·cm/rad) と角加速度 $\ddot{\theta}=d^2\theta/dt^2$ との積に等しいということにより，つぎのように書きあらわすことができる．

$$J\ddot{\theta}=-k\theta \tag{1・9}$$

移項して，$J\ddot{\theta}+k\theta=0$　　(1・9a)

J で割れば，

$$\ddot{\theta}+\omega_n{}^2\theta=0 \tag{1・10}$$

ただし　$\omega_n{}^2=k/J$

式 (1・7) (1・10) を見れば明らかなように，直線振動系，回転振動系にかかわりなく，1自由度系の運動の方程式は同じ形の微分方程式であらわされる．

【例　題】 長さ l なる糸に吊るされたおもり m の微小振動の方程式を書け．

【解】 角変位を θ とすれば，固定点まわりのモーメントは $mgl\sin\theta$．これは θ を減少させるように作用するので負号をつけて，

$$J\ddot{\theta}=-mgl\sin\theta$$
$$\fallingdotseq -mgl\theta$$

一方，慣性モーメントはいま $J=ml^2$ である．

ゆえに $ml^2\ddot{\theta}=-mgl\theta$

$$\therefore\quad \ddot{\theta}+\omega_n{}^2\theta=0$$

ただし $\omega_n{}^2=g/l$.

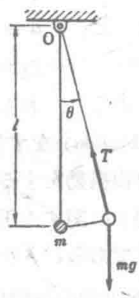


図 1・10　単振り子

1・4　自由振動の方程式の解

質量とばねよりなる1自由度系の運動の方程式は，直線運動，回転運動のいかんを問わず，同じ形の微分方程式であらわされることが判った．本節では，この方程式を解いて，おもりの運動を詳しく調べてみることにする．

式 (1・7) は定数係数の2階線形常微分方程式と呼ばれるものに属するが，この場合にはつぎのような解き方がある．まず $2\dot{x}$ を辺々に乗じて，

$$2\ddot{x}\dot{x}+2\omega_n{}^2\dot{x}x=0$$

積分して，$\dot{x}^2+\omega_n{}^2x^2=\text{const}$

ここで右辺は負とはなり得ないから $\omega_n{}^2a^2$ と書くことができる．移項して，

$$\dot{x}=\pm\omega_n\sqrt{a^2-x^2}$$