DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

HERAUSGEGEBEN VON
R. GRAMMEL · E. HOPF · H. HOPF · W. MAGNUS
F. K. SCHMIDT · B. L. VAN DER WAERDEN

BAND LXXXI

EINFÜHRUNG IN DIE TRANSZENDENTEN ZAHLEN

VON

THEODOR SCHNEIDER

SPRINGER-VERLAG
…LIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1957

Vorwort

Über transzendente Zahlen gibt es nur sehr wenige zusammenfassende Darstellungen. Ein Grund dafür dürfte darin zu suchen sein, daß in der Originalliteratur über transzendente Zahlen nur vereinzelt allgemeinere Methoden entwickelt worden sind und zumeist die Transzendenzergebnisse durch recht spezielle, eigens auf die jeweilige Aufgabe zugeschnittene Gedanken bewiesen wurden. Erst seit einiger Zeit wurden in zunehmendem Maße umfassendere Beweisprinzipien deutlich.

Gerade auf die Herausarbeitung von allgemeineren Beweismethoden habe ich in dieser Schrift besonderen Wert gelegt und dabei sogar in Kauf genommen, daß einige Resultate durchaus nicht mit dem kürzestmöglichen, dafür aber einem verallgemeinerungsfähigen Beweis bestätigt werden. Aus solchen methodischen Gesichtspunkten heraus glaubte ich auch, mich auf die meines Erachtens wichtigsten Teile der Theorie der transzendenten Zahlen beschränken zu sollen, und konnte dabei manche geistvolle Einzeluntersuchung nicht berücksichtigen.

Ich habe mich bemüht, eine Einführung in das leider so wenig bekannte Gebiet der transzendenten Zahlen zu geben, bei der nur einige Grundkenntnisse aus der Theorie der algebraischen Zahlen und aus der Funktionentheorie vorausgesetzt werden. Die einzelnen Kapitel sind unabhängig voneinander lesbar, insbesondere stehen Kapitel I und III für sich, wenn auch teilweise auf Hilfssätze aus vorhergehenden Kapiteln zurückgegriffen wird. Im Literaturverzeichnis ist nur diejenige Literatur aufgeführt, auf die bereits im Text verwiesen ist.

Für wertvolle Hilfe bei der Durchsicht des Manuskripts und der Korrekturen bin ich Herrn Dr. Leopoldt zu Dank verpflichtet. Dem Herausgeber und dem Verlag schulde ich Dank für das Verständnis und die überaus große Geduld, die sie mir entgegengebracht haben.

Erlangen, im März 1957.

Theodor Schneider.

Inhaltsverzeichnis

Erstes Kapitel

Konstruktion transzendenter Zahlen

§ 1. Der LIOUVILLEsche Approximationssatz

J. LIOUVILLE hat in seiner Untersuchung mit dem Titel «Sur les classes très étendus de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques» (LIOUVILLE [1]) darauf aufmerksam gemacht, daß sich algebraische Zahlen in gewisser Weise nicht beliebig gut durch rationale annähern lassen. Er konnte auf Grund dieser Erkenntnis leicht Zahlen bilden, bei denen die Annäherungsmöglichkeit durch rationale Zahlen im Widerspruch zu der von ihm festgestellten Approximationsfähigkeit algebraischer Zahlen durch rationale stand, und die demnach nicht algebraisch sein konnten. Damit waren erstmals nichtalgebraische oder transzendente Zahlen aufgezeigt.

Das Resultat von LIOUVILLE über die Annäherung algebraischer Zahlen ist präzisiert in

***Satz 1** (LIOUVILLEscher Satz): Ist α eine algebraische Zahl eines Grades $s > 1$, so existiert eine nur von α abhängige Zahl $c > 0$ derart, daß für alle ganzen rationalen Zahlen p, q mit $q > 0$ die Ungleichung*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^s} \tag{1}$$

gilt.

Beweis: Ist bereits $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q}$ für alle $\frac{p}{q}$ richtig, so gilt die Behauptung des Satzes mit $c = 1$. Wir können darum im folgenden voraussetzen

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}. \tag{2}$$

Die Konjugierten*) der algebraischen Zahl α in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen seien mit $\alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(s)}$ bezeichnet. Eine feste natürliche Zahl q_0 sei so gewählt, daß die $s-1$ Bedingungen

$$\frac{1}{q_0} < |\alpha - \alpha^{(\sigma)}| \qquad (\sigma = 2, \ldots, s)$$

erfüllt seien. Dann gilt für $q \geq q_0$ und $\sigma = 2, \ldots, s$ die Ungleichung

$$\frac{1}{q} < |\alpha - \alpha^{(\sigma)}|,$$

*) Zu den Begriffen: Konjugierte, Minimalpolynom u. a. s. S. 5.

und damit muß unter Beachtung von (2)

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \left|\alpha - \alpha^{(\sigma)}\right|$$

und folglich

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha^{(\sigma)}\right| \leqq \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| + \left|\alpha - \alpha^{(\sigma)}\right| < 2\left|\alpha - \alpha^{(\sigma)}\right| \tag{3}$$

für alle $\sigma = 2, \ldots, s$ sein.

Das Minimalpolynom von α sei mit

$$G(x) = a_0(x - \alpha)\,(x - \alpha^{(2)}) \ldots (x - \alpha^{(s)}) = a_0 x^s + a_1 x^{s-1} + \cdots + a_s$$

bezeichnet. Für $x = \frac{p}{q}$ liefert das Minimalpolynom die Abschätzung

$$\left|G\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|a_0\left(\frac{p}{q} - \alpha\right) \ldots \left(\frac{p}{q} - \alpha^{(s)}\right)\right| = \left|a_0\left(\frac{p}{q}\right)^s + \cdots + a_s\right| \geqq \frac{1}{q^s}, \tag{4}$$

denn die Koeffizienten von $G(x)$ sind ganze rationale Zahlen, und wegen $s > 1$ ist die Zahl $G\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$. Aus (4) erhalten wir zusammen mit der Ungleichung (3) die Abschätzung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \left(|a_0|\, 2^{s-1} |\alpha - \alpha^{(2)}| \ldots |\alpha - \alpha^{(s)}| \cdot q^s\right)^{-1},$$

und schreiben wir abkürzend

$$c_1 = \left(|a_0|\, 2^{s-1}\, |\alpha - \alpha^{(2)}| \ldots |\alpha - \alpha^{(s)}|\right)^{-1},$$

so ist damit die Behauptung (1) mit $c = \mathrm{Min}\,(1, c_1)$ für alle $q \geqq q_0$ bewiesen.

Für die endlich vielen $\frac{p}{q}$ mit $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$ und $0 < q < q_0$ wählen wir

$$c_2 < \mathop{\mathrm{Min}}_{p,q \text{ mit } 0 < q < q_0} \left(q^s \cdot \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|\right),$$

womit schließlich Ungleichung (1) mit $c = \mathrm{Min}\,(1, c_1, c_2)$ für alle $\frac{p}{q}$ gezeigt ist.

§ 2. Liouvillesche transzendente Zahlen

Wie schon bemerkt, ist es auf Grund des Satzes 1 möglich, transzendente Zahlen zu konstruieren.

Als Umkehrung zu Satz 1 läßt sich unmittelbar aussprechen:

Existiert zu einer irrationalen Zahl ξ keine Konstante $c > 0$, so daß die Ungleichung (1) bei festem $s > 1$ für alle p, q mit $q > 0$ gilt, so kann ξ keine algebraische Zahl eines Grades $\leqq s$ sein, und existiert kein Zahlenpaar (c, s) mit $c > 0$, $s > 1$ derart, daß Ungleichung (1) für alle p, q mit $q > 0$ erfüllt ist, so ist ξ notwendigerweise transzendent.

Derartige auf Grund des LIOUVILLEschen Satzes zu bildende transzendente Zahlen werden LIOUVILLEsche Zahlen genannt.

Eine hinreichende Bedingung dafür, daß eine gegebene Zahl LIOUVILLEsch ist, wird im folgenden Satze ausgedrückt:

Satz 2: *Ist* $\frac{p_n}{q_n}$ *für* $n = 1, 2, \ldots$ *mit* $(p_n, q_n) = 1$ *und* $q_n > 0$ *eine unendliche Folge von Quotienten ganzrationaler Zahlen,* s_n *für* $n = 1, 2, \ldots$ *eine Folge reeller Zahlen mit* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, s_n = +\infty$ *und* ξ *eine Irrationalzahl, für die*

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqq \frac{1}{q_n^{s_n}} \tag{5}$$

erfüllt ist, so ist ξ *eine* LIOUVILLE*sche Zahl.*

Beweis: Es ist evident, daß die Ungleichung (1) für kein festes s und festes $c > 0$ durch alle $\frac{p_n}{q_n}$ der unendlichen Folge erfüllt werden kann.

Zum Zwecke der Konstruktion transzendenter Zahlen auf Grund des Satzes 2 haben wir nur dafür zu sorgen, daß Ungleichung (5) gültig ist.

Ein einfaches Beispiel hierzu liefert

$$\xi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu!}}.$$

Die Irrationalität von ξ folgt aus der Nichtperiodizität seiner dyadischen Entwicklung. Sei

$$\frac{p_n}{q_n} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2^{\nu!}},$$

so ist $q_n = 2^{n!}$. Daraus folgt

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu!}} < \frac{2}{2^{(n+1)!}} = \frac{2}{q_n^{n+1}} \leqq \frac{1}{q_n^n},$$

und damit sind die Voraussetzungen von Satz 2 mit $s_n = n$ erfüllt.

Dieses Beispiel läßt sich leicht verallgemeinern, indem statt einer dyadischen Entwicklung eine entsprechende Darstellung einer Zahl ξ nach einer Basis g gewählt wird. So ist für $g = 10$ natürlich auch $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{10^{\nu!}}$, die sich sofort als Dezimalbruch schreiben läßt, eine LIOUVILLEsche Zahl.

Ebenfalls lassen sich leicht Beispiele für LIOUVILLEsche Zahlen, die in der Form regelmäßiger Kettenbrüche definiert sind, angeben.

Sei

$$\xi = [b_0, b_1, \ldots] = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \cdots}}$$

und sei der n-te Näherungsnenner von ξ mit B_n bezeichnet. Dann gilt*)

$$|\xi - [b_0, b_1, \ldots, b_n]| < \frac{1}{b_{n+1} B_n^2}.$$

Gibt es nun eine Folge natürlicher Zahlen n_k mit $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$ und

$$b_{n_k+1} \geqq B_{n_k}^{n_k-2}, \tag{6}$$

so folgt

$$|\xi - [b_0, b_1, \ldots, b_{n_k}]| < \frac{1}{B_{n_k}^{n_k}},$$

und *dann muß ξ* nach Satz 2 *eine* LIOUVILLE*sche Zahl sein*. Wir haben demnach nur die Bedingung (6) zu erfüllen und können so beliebig viele LIOUVILLEsche Transzendenten konstruieren.

Auf weitere Konstruktionsmöglichkeiten für LIOUVILLEsche Zahlen soll nicht eingegangen werden, zumal es gelungen ist, den LIOUVILLEschen Satz über die Approximation algebraischer Zahlen durch rationale erheblich zu verschärfen, wie noch später ausgeführt werden soll und sich aus solcher Verschärfung weitere Möglichkeiten zur Erzeugung transzendenter Zahlen ergeben.

Literatur: MAILLET [1, 2, 4, 5, 6]; PERRON [1]; PERNA [1, 2]; GIGLI [1].

§ 3. Verallgemeinerung des LIOUVILLEschen Satzes

Bevor wir an eine Verschärfung des LIOUVILLEschen Satzes herantreten, seien zwei Verallgemeinerungen behandelt. Der LIOUVILLEsche Satz läßt sich als eine Aussage über die Approximation der Zahl 0 durch Absolutwerte der Linearform $|\alpha - x|$ für rationales x auffassen. Es ist daher naheliegend, in dieser Aussage die Linearform durch ein Polynom oder das rationale x durch ein algebraisches zu ersetzen.

Hierzu seien einige Begriffe und Hilfsbetrachtungen vorangeschickt. Wir haben bereits von dem wohl allgemein bekannten Begriff einer algebraischen Zahl, deren Konjugierten, Grad und Minimalpolynom gesprochen, ohne ausdrücklich zu sagen, was hierunter zu verstehen ist. Da wir im folgenden noch einige, vielleicht weniger allgemein geläufige Bezeichnungen, die sich auf Eigenschaften von algebraischen Zahlen beziehen, benötigen, und um Mißverständnisse auszuschließen, sei es erlaubt, zur Erläuterung folgendes zusammenzustellen.

Eine Zahl α wird algebraisch genannt, wenn es zu α ein Polynom mit rationalen Koeffizienten $P(x)$ gibt derart, daß α Nullstelle dieses Polynoms ist.

---

*) Siehe z. B. in PERRON: Die Lehre von den Kettenbrüchen. 3. Aufl., S. 37. Stuttgart: Teubner 1954.

Ein Polynom niedrigsten Grades mit rationalen Koeffizienten, das für $x = \alpha$ verschwindet und dessen Koeffizienten ganzrational und ohne gemeinsamen Teiler sind, wollen wir Minimalpolynom von α nennen, wenn wir auch damit von der sonst vielfach gebräuchlichen Definition abweichen.

Der Grad des Minimalpolynoms wird als Grad von α und die übrigen Wurzeln des Minimalpolynoms als die Konjugierten von α bezeichnet.

Den höchsten Koeffizienten von α, das ist der Koeffizient der höchsten Potenz in x des Minimalpolynoms von α, nennen wir gelegentlich auch den Nenner von α. Ist dieser gleich ± 1, so heißt α ganzalgebraisch.

Unter der Höhe H eines Polynoms $P(x) = \sum_{\sigma=0}^{s} a_\sigma x^{s-\sigma}$, dessen Koeffizienten a_σ beliebig komplex sein dürfen, werde

$$H = \operatorname*{Max}_{\sigma=0}^{s} |a_\sigma|$$

verstanden.

Die Höhe h einer algebraischen Zahl α sei dann gleich der Höhe des Minimalpolynoms von α. Das Produkt einer algebraischen Zahl mit ihren sämtlichen Konjugierten wird Norm von α genannt.

Wir benötigen nun die folgende Ungleichung zwischen dem Betrag einer algebraischen Zahl und ihrer Höhe, die enthalten ist in

Hilfssatz 1: *α sei eine algebraische Zahl, h ihre Höhe und a_0 der höchste Koeffizient von α, dann gilt*

$$|\alpha| \leqq \frac{h}{|a_0|} + 1 . \tag{7}$$

Beweis: Ist $\alpha = 0$, so ist die Behauptung offensichtlich richtig. Wir können daher im folgenden $\alpha \neq 0$ voraussetzen. Da α Nullstelle des Minimalpolynoms $\sum_{\sigma=0}^{s} a_\sigma x^{s-\sigma}$ ist, gilt

$$a_0 \alpha^s = -a_1 \alpha^{s-1} - \cdots - a_s .$$

Hieraus folgt durch Übergang zu den absoluten Beträgen und Anwendung der Dreiecksungleichung

$$|a_0|\,|\alpha|^s \leqq |a_1|\,|\alpha|^{s-1} + \cdots + |a_s|$$

und daraus

$$|a_0|\,|\alpha|^s - |a_1|\,|\alpha|^{s-1} - \cdots - |a_s| \leqq 0 .$$

Bezeichnen wir das Polynom

$$|a_0|\,x^s - |a_1|\,x^{s-1} - \cdots - |a_s|$$

mit $F(x)$, so ist gezeigt: $F(|\alpha|) \leqq 0$.

Andererseits ist für hinreichend große positive Werte von x sicher $F(x) > 0$. Folglich muß $F(x)$ eine Nullstelle β mit $\beta \geqq |\alpha|$ besitzen. Aus der Gleichung

$$|a_0|\,\beta^s = |a_1|\,\beta^{s-1} + \cdots + |a_s|$$

folgt dann wegen der Bedeutung von h und $\beta > 0$:

$$\beta^s \leqq \frac{h}{|a_0|}(\beta^{s-1} + \cdots + 1) = \left(\frac{h}{|a_0|} + 1\right)(\beta^{s-1} + \cdots + 1) - (\beta^{s-1} + \cdots + 1),$$

folglich gilt

$$\beta(\beta^{s-1} + \cdots + 1) \leqq \left(\frac{h}{|a_0|} + 1\right)(\beta^{s-1} + \cdots + 1).$$

Wegen $\beta > 0$ ist auch $\beta^{s-1} + \cdots + 1 > 0$. Division durch diesen positiven Ausdruck liefert

$$\beta \leqq \frac{h}{|a_0|} + 1,$$

und mit $|\alpha| \leqq \beta$ folgt daraus (7).

Über den Zusammenhang zwischen algebraischen und ganzalgebraischen Zahlen benötigen wir im Augenblick nur den

Hilfssatz 2: *Ist α algebraisch und a_0 der höchste Koeffizient von α, so ist $a_0\alpha$ ganzalgebraisch.*

Beweis: $G(x) = \sum\limits_{\sigma=0}^{s} a_\sigma x^{s-\sigma}$ sei das Minimalpolynom von α, dann ist $a_0\alpha$ Nullstelle von $x^s + a_1 x^{s-1} + a_2 a_0 x^{s-2} + \cdots + a^s a_0^{s-1}$. Da mit $G(x)$ auch dieses Polynom irreduzibel ist und ganze rationale teilerfremde Koeffizienten besitzt und der höchste Koeffizient 1 ist, muß es Minimalpolynom von $a_0\alpha$ sein, und daraus folgt die Ganzheit von $a_0\alpha$.

Ebenso sind natürlich auch $a_0\alpha^{\{\sigma\}}$ $(\sigma = 2, \ldots, s)$ ganzalgebraisch.

Diesen Hilfssatz werden wir später verschärfen.

Schließlich noch ein Wort zur Norm einer algebraischen Zahl. Da das Minimalpolynom von α die Darstellung

$$G(x) = \sum_{\sigma=0}^{s} a_\sigma x^{s-\sigma} = a_0 \cdot \prod_{\sigma=1}^{s} (x - \alpha^{\{\sigma\}})$$

mit der Bezeichnung $\alpha = \alpha^{\{1\}}$ besitzt, ist

$$\frac{a_s}{a_0} = (-1)^s \prod_{\sigma=1}^{s} \alpha^{\{\sigma\}} = (-1)^s \cdot N(\alpha),$$

wenn $N(\alpha)$ die Norm von α bedeutet, also

$$N(\alpha) = (-1)^s \cdot \frac{a_s}{a_0}.$$

Ist $\alpha \neq 0$, so folgt aus der Irreduzibilität von $G(x)$, daß auch $a_s \neq 0$ ist. Ist ferner α ganzalgebraisch, also $|a_0| = 1$, so folgt die Richtigkeit von

Hilfssatz 3: *Ist α ganzalgebraisch und nicht Null, so folgt*

$$|N(\alpha)| \geqq 1 .$$

Nun können wir den LIOUVILLEschen Satz verallgemeinern, und wir ersetzen zunächst $x - \alpha$ durch ein Polynom in α und erhalten so den

Satz 3: *Es sei α eine algebraische Zahl vom Grade $s \geqq 1$ und $P(x)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten vom Grade n und der Höhe H, für das $P(\alpha)$ nicht verschwinde. Dann gilt*

$$|P(\alpha)| > \frac{c^n}{H^{s-1}} \tag{8}$$

mit einer Konstanten $c > 0$, die nur von α abhängt.

Dieser Satz liefert im Spezialfall $n = 1$ offenbar den LIOUVILLEschen Satz.

Beweis: Bedeute a_0 den höchsten Koeffizienten von α, so ist nach Hilfssatz 2 die Zahl $a_0 \alpha$ ganzalgebraisch. Folglich ist mit $q = |a_0|$ auch $q^n P(\alpha)$ ganzalgebraisch, und wegen $P(\alpha) \neq 0$ gilt auf Grund von Hilfssatz 3

$$|N(q^n P(\alpha))| \geqq 1 .$$

Die Beträge der Konjugierten $(P(\alpha))^{\{\sigma\}} = P(\alpha^{\{\sigma\}})$ können für $\sigma = 2, \ldots, s$ mit $P(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} b_\nu x^{n-\nu}$ durch

$$|P(\alpha^{\{\sigma\}})| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} |b_\nu|\, |\alpha^{\{\sigma\}}|^{n-\nu} \leqq H \cdot \sum_{\nu=0}^{n} |\alpha^{\{\sigma\}}|^{n-\nu} \leqq H(n+1)\, \mathrm{Max}(1, |\alpha^{\{\sigma\}}|^n)$$

abgeschätzt werden. Für $|\alpha^{\{\sigma\}}|$ liefert aber Hilfssatz 1, wenn h die Höhe von α ist und $|a_0|$ durch 1 ersetzt wird,

$$|\alpha^{\{\sigma\}}| \leqq h + 1 .$$

Also erhalten wir

$$|P(\alpha^{\{\sigma\}})| \leqq (n+1)\, H(h+1)^n .$$

Damit folgt aus $|N(q^n P(\alpha))| = \prod\limits_{\sigma=1}^{s} (q^n |P(\alpha^{\{\sigma\}})|) \geqq 1$

$$|P(\alpha)| \geqq ((n+1)\, H(h+1)^n)^{1-s}\, q^{-ns} > \frac{c^n}{H^{s-1}}$$

mit nur von α abhängigem, geeignetem $c > 0$.

Den Satz 3 benutzen wir, um eine Aussage über die Approximation der Zahl Null durch die Linearform $\alpha - x$ mit algebraischem x vom

Grade n zu gewinnen. Wir zeigen

Satz 4: *Ist α algebraisch vom Grad s und ξ algebraisch vom Grad n und H die Höhe von ξ, so gilt für $\alpha \neq \xi$*

$$|\alpha - \xi| > \frac{c_1^n}{H^s} \tag{9}$$

mit einer nur von α abhängigen Konstanten $c_1 > 0$.

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann im folgenden angenommen werden, daß α und ξ nicht zueinander konjugiert sind, da c_1 so gewählt werden kann, daß (9) für die endlich vielen Konjugierten von α gültig ist. Dann verschwindet das Minimalpolynom von ξ, welches mit

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^{n-\nu} = b_0(x - \xi)(x - \xi^{(2)}) \ldots (x - \xi^{(n)})$$

bezeichnet sei, nicht für $x = \alpha$. Es folgt für $x = \alpha$

$$|\alpha - \xi| = \frac{|P(\alpha)|}{|b_0|\,|\alpha - \xi^{(2)}| \ldots |\alpha - \xi^{(n)}|}\,. \tag{10}$$

In Satz 3 haben wir eine untere Abschätzung für den Zähler auf der rechten Seite. Es kommt nun darauf an, den Nenner nach oben abzuschätzen. Mit der Bezeichnung

$$\frac{P(x)}{x - \xi} = b_0(x - \xi^{(2)}) \ldots (x - \xi^{(n)}) = \delta_0 x^{n-1} + \cdots + \delta_{n-1}$$

gilt

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^{n-\nu} = (x - \xi)(\delta_0 x^{n-1} + \cdots + \delta_{n-1})\,. \tag{11}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$b_0 = \delta_0\,,\ b_1 = \delta_1 - \xi\delta_0\,, \ldots, b_n = -\xi\delta_{n-1}\,.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \delta_0 &= b_0 \\ \delta_1 &= b_0\xi + b_1 \\ &\vdots \\ \delta_{n-1} &= b_0\xi^{n-1} + b_1\xi^{n-2} + \cdots + b_{n-1}\,. \end{aligned}$$

Daher ist für $|\xi| \leqq 1$

$$\operatorname*{Max}_{\nu=0}^{n-1}(|\delta_\nu|) = \Delta \leqq nH\,.$$

Für $|\xi| > 1$ setzen wir $x = \frac{1}{y}$ in (11) ein und multiplizieren (11) mit $-y^n \cdot \frac{1}{\xi}$.

Wir erhalten so

$$-\frac{b_n}{\xi}y^n - \cdots - \frac{b_0}{\xi} = \left(y - \frac{1}{\xi}\right)(\delta_{n-1}y^{n-1} + \cdots + \delta_0).$$

und auf Grund der gleichen Schlußweise wie oben ist jetzt wegen $\left|\frac{1}{\xi}\right| < 1$

$$\operatorname*{Max}_{\nu=0}^{n-1}(|\delta_\nu|) = \Delta \leqq \frac{nH}{|\xi|} < nH.$$

Mithin ergibt sich

$$|b_0|\,|\alpha - \xi^{(2)}| \ldots |\alpha - \xi^{(n)}| = |\delta_0\alpha^{n-1} + \cdots + \delta_{n-1}| \leqq \Delta \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} |\alpha|^\nu < c_2^n \cdot H$$

mit einem geeigneten, von n und ξ unabhängigen Faktor c_2.

Aus (10) folgt nun unter Beachtung von (8) und der soeben erzielten Abschätzung

$$|\alpha - \xi| > \frac{c^n}{H^{s-1} \cdot c_2^n \cdot H} = \frac{c_1^n}{H^s}.$$

Dabei hängt c_1 nur von α, nicht von n oder ξ ab, und Satz 4 ist bewiesen.

Literatur: BRAUER [1, 2].

§ 4. Eine Anwendung des einen verallgemeinerten LIOUVILLEschen Satzes

Mit Hilfe der Sätze 3 und 4 lassen sich wiederum transzendente Zahlen konstruieren. Es sei nur ein Beispiel hierfür als Anwendung von Satz 4 mitgeteilt.

Satz 5: *Jede reelle positive Nullstelle der Funktion*

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu a_\nu x^\nu}{(\nu!)^{\nu!}}$$

besitzt einen transzendenten Wert, wenn die natürlichen Zahlen a_ν mit einer Konstanten $B > 0$ die Eigenschaft $0 < a_\nu < B^\nu$ haben.

Beweis: Für algebraisches $x = \chi$ und genügend großes m, etwa $m > m_0$, gilt nämlich die Ungleichung

$$|F(\chi) - F_m(\chi)| < \frac{a_{m+1}\,|\chi|^{m+1}}{((m+1)!)^{(m+1)!}}, \tag{12}$$

wenn wir mit $F_m(\chi)$ den m-ten Abschnitt der Potenzreihe für $F(x)$ bezeichnen. Diese Abschätzung folgt aus der Tatsache, daß die Reihe für $F(x)$ alterniert und für hinreichend großes m die Absolutbeträge der Reihenglieder monoton fallen. Da χ algebraisch sein soll, ist auch $F_m(\chi)$ algebraisch, und machen wir nun die Annahme, daß auch $F(\chi)$ algebraisch sei, so liefert Satz 4 eine untere Schranke für den Betrag $|F(\chi) - F_m(\chi)|$. Diese Schranke wird im Widerspruch zu (12) stehen, und aus diesem Widerspruch folgt, daß $F(\chi)$ für algebraisches χ keine algebraische Zahl sein kann. Insbesondere kann also $F(\chi)$ für ein algebraisches χ nicht verschwinden.

In der Anwendung von Satz 4 auf den vorliegenden Fall ist $F(\chi)$ für α und $F_m(\chi)$ für ξ zu setzen. Es ist also der Grad und die Höhe von $F_m(\chi)$ zu bestimmen. Der Grad von $F(\chi)$ sei s genannt. χ habe den Grad n, dann ist der Grad von $F_m(\chi) = \sum\limits_{\nu=0}^{m} \frac{(-1)^\nu a_\nu \chi^\nu}{(\nu!)^{\nu!}}$, da die a_ν natürliche Zahlen sind, höchstens n. Die Abschätzung der Höhe H von $F_m(\chi)$ bereitet etwas mehr Schwierigkeiten.

Zwischen der Höhe einer ganzen algebraischen Zahl und dem Maximum der Absolutbeträge aller Wurzeln des Minimalpolynoms dieser Zahl besteht ein einfacher Zusammenhang, den wir zunächst aufzeigen wollen. Sei β ganzalgebraisch und

$$G(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^{n-\nu} = \prod_{\nu=1}^{n} (x - \beta^{\{\nu\}})$$

das Minimalpolynom, h die Höhe von β.

Aus der Bedeutung der b_ν als elementarsymmetrische Funktionen der $\beta^{\{\nu\}}$ ergibt sich unmittelbar mit der Bezeichnung $\operatorname{Max}\limits_{\nu=1}^{n} |\beta^{\{\nu\}}| = \overline{|\beta|}$

$$h = \operatorname{Max}_{\nu=0}^{n} |b_\nu| \leqq \operatorname{Max}_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \cdot \overline{|\beta|}^\nu < 2^n \overline{|\beta|}^n .$$

Wir können also formulieren

Hilfssatz 4: *Sei β eine ganzalgebraische Zahl, n ihr Grad und h ihre Höhe, so gilt mit der Bezeichnung $\operatorname{Max}\limits_{\nu=1}^{n} |\beta^{\{\nu\}}| = \overline{|\beta|}$ die Ungleichung*

$$h \leqq (2\overline{|\beta|})^n .$$

Diesen Hilfssatz können wir nicht unmittelbar auf $F_m(\chi)$ anwenden, da $F_m(\chi)$ nicht notwendig ganzalgebraisch ist. Zu χ gibt es eine natürliche Zahl, sie sei g genannt, derart, daß $g\chi$ eine ganze Zahl ist. Dann folgt aus der Definition von $F_m(\chi)$, daß $g^m \cdot (m!)^{m!} F_m(\chi)$ ganzalgebraisch sein muß. Folglich gilt nach Hilfssatz 4 für die Höhe H_1 dieser ganzalgebraischen Zahl

$$H_1 \leqq (2\,\overline{|g^m (m!)^{m!} F_m(\chi)|})^n$$

und wegen

$$\overline{|F_m(\chi)|} \leqq \sum_{\nu=0}^{m} \frac{a_\nu \overline{|\chi|}^\nu}{(\nu!)^{\nu!}} < c_2 ,$$

wobei c_2 nur von χ abhängt, folgt daraus

$$H_1 < (2g^m (m!)^{m!})^n \cdot c_2^n . \tag{13}$$

Um von H_1, der Höhe von $g^m(m!)^{m!}F_m(\chi)$, auf H, die Höhe von $F_m(\chi)$, schließen zu können, wollen wir $g^m(m!)^{m!}$ abkürzend mit q, $F_m(\chi)$ mit ξ, $\xi q = \zeta$ und der Deutlichkeit halber $H_1 = H(\zeta)$, $H = H(\xi) = H\left(\frac{\zeta}{q}\right)$ bezeichnen.

Es wird behauptet:

$$H \leqq q^n H_1 .$$

Ist $M(x)$ Minimalpolynom von ζ, so ist $\frac{\zeta}{q}$ Nullstelle von $M(qx)$, wobei die Höhe von $M(qx)$ kleiner oder gleich $q^n H(\zeta)$ ist. Da mit $M(x)$ auch $M(qx)$ irreduzibel ist, muß eine natürliche Zahl r existieren derart, daß $\frac{1}{r} M(qx)$ Minimalpolynom von $\frac{\zeta}{q}$ ist. Daher gilt für die Höhe die Ungleichung

$$H\left(\frac{\zeta}{q}\right) \leqq \frac{1}{r} q^n H(\zeta) \leqq q^n H(\zeta) ,$$

was behauptet war.

Daraus und aus (13) folgt dann

$$H < (g^m (m!)^{m!})^n \cdot (2 g^m (m!)^{m!})^n c_2^n < c_3^m ((m!)^{m!})^{2n}$$

mit einem geeigneten, nur von χ, nicht aber von m abhängigen c_3. Dies in Satz 4 eingetragen, ergibt

$$|\alpha - \xi| = |F(\chi) - F_m(\chi)| > \frac{c_1^n}{H^s} > \frac{1}{c_4^m\left((m!)^{m!}\right)^{2ns}}$$

mit einem von m unabhängigen c_4.

Dies steht aber für hinreichend großes m im Widerspruch zu (12), denn es ist für genügend großes m

$$\frac{1}{c_4^m\left((m!)^{m!}\right)^{2ns}} > \frac{1}{\left((m!)^{m!}\right)^{3ns}} > \frac{1}{((m+1)!)^{\frac{1}{2}(m+1)!}} > \frac{a_{m+1}\,|\chi|^{m+1}}{((m+1)!)^{(m+1)!}} .$$

Der Beweis von Satz 5 ist damit vollständig erbracht.

Ähnliche Beispiele lassen sich unschwer aufzeigen. Jedoch soll darauf nicht eingegangen werden, da wir uns nun den Verschärfungen des LIOUVILLEschen Satzes zuwenden wollen, die weitere Anwendungsmöglichkeiten zur Erzeugung transzendenter Zahlen eröffnen.

Literatur: COHN [1].

§ 5. Schärfere Approximationssätze. Der Satz von THUE-SIEGEL-ROTH

Die einfache Abschätzung des LIOUVILLEschen Satzes (Satz 1) wurde durch tiefere Betrachtungen ganz erheblich verschärft. Es seien hier nur die wesentlichen Fortschritte, die erzielt wurden, angegeben. Es handelt sich um die untere Schranke der Linearform $|\alpha - x|$ für algebraisches α und rationale Werte von x. Im einzelnen wurde gezeigt:

Für algebraisches α vom Grade $s > 1$ und ganze rationale Zahlen p, q; $q > 0$, hat die Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < q^{-\mu} \tag{14}$$

nur endlich viele Lösungen in rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$

1. mit $\mu > \frac{s}{2} + 1$ (Thue [1, 2]),

2. mit $\mu = \operatorname*{Min}_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{s}{\sigma+1} + \sigma\right) + \varepsilon < 2\sqrt{s}$ *bei genügend kleinem $\varepsilon > 0$* (Siegel [1]),

3. mit $\mu > \sqrt{2s}$ (Dyson [1], siehe hierzu auch Mahler [8], Schneider [6]),

4. mit $\mu > 2$ (Roth [1]).

Das letztgenannte Resultat, das K. F. Roth kürzlich veröffentlichte, liefert bezüglich des Exponenten μ den schärfstmöglichen Wert.

Bereits C. L. Siegel gelang es, über sein oben genanntes Resultat hinaus, für einen Exponenten $\mu < \operatorname*{Min}_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{s}{\sigma+1} + \sigma\right) + \varepsilon$ eine Aussage zu erhalten. Er bewies *für* $\mu = \operatorname*{Min}_{\sigma=1}^{s}\left(\sigma \sqrt[\sigma]{s}\right) + \varepsilon < e\left(\log s + \frac{1}{2\log s}\right)$ *bei genügend kleinem ε*, daß dann (14) *entweder nur endlich viele Lösungen in rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ hat, oder* daß, *falls unendlich viele rationale $\frac{p}{q}$ der Ungleichung* (14) *genügen, für die nach wachsenden Nennern angeordnete Folge dieser Lösungen $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ die Grenzbeziehung*

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{\log q_{\nu+1}}{\log q_\nu} = \infty \tag{15}$$

gilt (Siegel [2]). Dieser Siegelsche Satz wurde schon vor langem *auf den Exponenten $\mu > 2$ verschärft* (Schneider [3]). Der Satz von Roth unterscheidet sich von letztgenanntem Ergebnis dadurch, daß nach ihm der Fall unendlich vieler Lösungen nicht eintreten kann, und insofern sagt er natürlich sehr viel mehr aus.

Unter geeigneten arithmetischen Voraussetzungen über die zur Approximation zugelassenen Brüche $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ gelang es, selbst für Exponenten $\mu \leqq 2$ Aussagen [illegible] Lösungen von (14) zu machen. So bewies K. Mahler: *Ist α eine algebraische Zahl, μ eine Zahl > 1, und hat die Ungleichung (14) unendlich viele verschiedene, nach wachsenden q_ν geordnete Lösungen $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ [illegible] positiven Nennern q_ν, die allein durch endlich* *viele Primzahlen teilbar sind, so gilt* (15); und ferner: *Ist α eine algebraische Zahl $\neq 0$, $\mu > 0$, so gibt es höchstens endlich viele gekürzte Lösungen $\frac{p}{q}$ von* (14), *für die $p \cdot q$ nur durch endlich viele vorgegebene Primzahlen teilbar ist* (MAHLER [5]; siehe hierzu auch SCHNEIDER [3]). Auf einen das erstgenannte MAHLERsche Ergebnis umfassenden Satz (SCHNEIDER [8], siehe auch KASCH [1]) sei nur hingewiesen. Diese Resultate (MAHLER [5]; SCHNEIDER [8]) lassen sich unter Verwendung der Ideen von ROTH (ROTH [1]) verbessern. Wir wollen hier diese Verschärfung nicht in vollem Umfange durchführen, sondern nur eine solche Verallgemeinerung des Satzes von ROTH beweisen, wie diese für die Anwendungen, die wir im nächsten Paragraphen davon machen wollen, notwendig ist. Eine weitergehende Verallgemeinerung würde den ohnehin nicht einfachen Beweis des Satzes von ROTH noch erheblich komplizieren, während sich der gewünschte und nun zu formulierende Satz nur durch Hinzufügung eines einfachen Gedankens zu dem ROTHschen Beweis zeigen läßt.

Satz 6: *Es sei α eine algebraische Zahl vom Grade $s > 1$. Ferner bedeute $\left(\frac{p_\nu^*}{q_\nu^*}\right)$ eine unendliche Folge rationaler Zahlen mit ganzrationalen p_ν^*, q_ν^*; $q_{\nu+1}^* \geqq q_\nu^* > 0$; $\nu = 1, 2, \ldots$, deren Nenner q_ν^* in ein Produkt $q_\nu^* = q_\nu' \cdot q_\nu''$ ganzer rationaler Zahlen q_ν' und q_ν'' zerlegt seien derart, daß q_ν'' eine nichtnegative ganzzahlige Potenz einer von ν unabhängigen natürlichen Zahl b darstellt. Bezeichnen wir*

$$\eta = \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \frac{\log q_\nu'}{\log q_\nu^*}, \tag{16}$$

und ist μ eine Zahl, für die

$$\mu > \eta + 1 \tag{17}$$

gilt, so genügen der Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < q^{-\mu}$$

nur endlich viele Zahlen $\frac{p}{q} = \frac{p_\nu^*}{q_\nu^*}$ aus der Folge $\left(\frac{p_\nu^*}{q_\nu^*}\right)$.

Für $\eta = 1$ ist darin der oben genannte Satz von ROTH enthalten, den wir gemäß seiner Entstehung auch den Satz von THUE-SIEGEL-ROTH nennen wollen.

Vorbereitung des Beweises: Wir folgen in der Beweisführung weitgehend dem Beweise von ROTH. Es ist nicht verwunderlich, daß der Beweis des tiefliegenden Satzes nicht ohne weiteres auf der Hand liegt. In sieben Hilfssätzen, die wir vorausschicken, werden die notwendigen Hilfsbetrachtungen entwickelt.

1. Die wesentlichste Idee des Beweises von ROTH besteht in einer neuartigen nichtarchimedischen Bewertung von Polynomen von mehreren Veränderlichen, mit deren Darstellung wir beginnen wollen.

Es sei $P(x_1, \ldots, x_k)$ ein nicht identisch verschwindendes Polynom in den k Veränderlichen $x_1, \ldots, x_k$. Ferner seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ beliebige reelle und $r_1, \ldots, r_k$ beliebige positive Zahlen. Wir entwickeln $P(\alpha_1 + y_1, \ldots, \alpha_k + y_k)$ nach Potenzen von $y_1, \ldots, y_k$, also

$$P(\alpha_1 + y_1, \ldots, \alpha_k + y_k) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_k=0}^{\infty} c_{j_1 \ldots j_k} y_1^{j_1} \ldots y_k^{j_k}.$$

Dann bezeichne

$$\Theta = \operatorname*{Min}_{\substack{(j_1, \ldots, j_k \\ c_{j_1 \ldots j_k} \neq 0)}} \left(\frac{j_1}{r_1} + \cdots + \frac{j_k}{r_k} \right), \tag{18}$$

i. W., das Minimum der Summe $\frac{j_1}{r_1} + \cdots + \frac{j_k}{r_k}$, erstreckt über alle nichtnegativen ganzen Zahlen $j_1, \ldots, j_k$, für die $c_{j_1 \ldots j_k}$ nicht verschwindet. Die letzte Bedingung ist offenbar gleichbedeutend mit

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{j_k} P(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \\ = \frac{\partial^{j_1 + \cdots + j_k} P(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_k^{j_k}} \Big/ _{(x_1, \ldots, x_k) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)} \neq 0.$$

Wir nennen nach Roth die in (18) definierte Zahl Θ *den Index des Polynoms* $P(x_1, \ldots, x_k)$ *im Punkte* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *bezüglich der Zahlen* $r_1, \ldots, r_k$.

Es ist klar, daß dann der Index des Polynoms

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{l_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{l_k} P(x_1, \ldots, x_k)$$

im Punkte $(\alpha_1, \ldots, a_k)$ in bezug auf $r_1, \ldots, r_k$ für beliebige nichtnegative ganze Zahlen $l_1, \ldots, l_k$ mindestens gleich $\Theta - \frac{l_1}{r_1} - \cdots - \frac{l_k}{r_k}$ ist, falls nur das abgeleitete Polynom nicht identisch verschwindet.

Die später benötigten Eigenschaften des *Index* enthält der

Hilfssatz 5: *Es seien* $P(x_1, \ldots, x_k)$ *und* $Q(x_1, \ldots, x_k)$ *nicht identisch verschwindende Polynome mit* $P + Q \not\equiv 0$. *Bilden wir die Indizes derselben im gleichen Punkte* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *bezüglich derselben Zahlen* $r_1, \ldots, r_k$, *so gilt*

$$\text{Index}(P) \geqq 0 \textit{ und } \text{Index}(P) = 0 \textit{ nur, falls } P(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq 0, \tag{19}$$

$$\text{Index}(P + Q) \geqq \text{Min}\left(\text{Index}(P), \text{Index}(Q)\right) \tag{20}$$

$$\text{Index}(PQ) = \text{Index}(P) + \text{Index}(Q). \tag{21}$$

Beweis: Die Richtigkeit von (19) ist offensichtlich. Seien die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von P in $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ mit $c_{j_1 \ldots j_k}$, die von Q mit $d_{j_1 \ldots j_k}$ bezeichnet, so ist (20) gleichbedeutend mit der Folgerung: Aus $c_{j_1 \ldots j_k} = 0$ und $d_{j_1 \ldots j_k} = 0$ folgt $c_{j_1 \ldots j_k} + d_{j_1 \ldots j_k} = 0$,