全国成人高等教育新创教材

JING JI YING YONG SHU XUE

经济应用数学（微积分）

丁正中　等◎编著

中国科学技术出版社

全国成人高等教育新创教材

经济应用数学(微积分)

丁正中　等◎编著

中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·北　京·
BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学(微积分)/丁正中等编著.—北京:中国科学技术出版社,2007.3
ISBN 978-7-5046-4544-9

Ⅰ.经… Ⅱ.丁… Ⅲ.①经济数学-成人教育:高等教育-教材 ②微积分-成人教育:高等教育-教材 Ⅳ.F224.0 O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第028883号

内容提要

本书为了适合成人教育学院(校)学生的基础和学习特点,对传统的微积分学理论作了按需取舍的处理,同时注重数学概念深入浅出的描绘,着重培养学生高等数学的计算能力。本书包含一元微积分中的函数极限、连续性、导数、导数的应用、不定积分、定积分等基本内容和二元微积分的偏导数、二重积分等,适合成人教育本科经济管理类各专业高等数学课程的教学需要。

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街16号 邮政编码:100081
电话:010-62103210 传真:010-62183872
http://www.kjpbooks.com.cn
科学普及出版社发行部发行
北京蓝空印刷厂印刷
*
开本:787毫米×1092毫米 1/16 印张:14 字数:358千字
2007年3月第1版 2007年3月第1次印刷 定价:21.80元
书号 ISBN 978-7-5046-4544-9/O·126

策划编辑　林　培　许　英

责任编辑　程安琦　彭慧元

责任校对　林　华

责任印制　安利平

封面设计　孙兰兰

前　言

大学经济管理类各本科专业培养计划中，均包含西方经济学、计量经济学等重要的专业基础课和专业课。这些课程中，由于需要定量分析经济管理中的实际问题，大量引进了数学的概念、理论及方法。几乎在每一本现代经济理论的书籍中，都能找出一大堆高等数学的符号与公式，可以说，不懂得高等数学，在现代经济领域里将寸步难行。微积分学作为高等数学课程内容的主体，具有高度的抽象性与严密的逻辑性，这对于刚入学的经济管理类大学生，尤其是对在职学习的成人教育、函授、夜大学生，历来是一门很难学好的课程。这个问题还反映在该课程教学上存在的一个通病，即教师在教学中对于非全日制成人教育与普通全日制教育的区别注意不够，有的教师不加区别地把普通全日制教育的教学要求和教学方法照搬到非全日制成人教育中，导致不少成教学生视该课程如虎，无法取得该课程学分，完不成成人教育的本科学业。多年来的成人教育实践，使我们深切地体会到改进这些问题的迫切要求，为此，我们编写了这本较能适合成人教育特点和满足后继课程教学要求的教材，希望能在与普通全日制教育有所区别的非全日制成人教育教学研究上有所探索；同时也希望在适合成人教育的教材建设工作中起到抛砖引玉的作用。

在编写这本教材时，在以下几个方面作了一些尝试：

（1）注意对基本概念作直观性的描绘，着重这些概念的计算与应用，简略数学概念的抽象定义。例如在介绍数列极限和函数极限概念时，完全摒弃了 $\varepsilon-N$ 和 $\varepsilon-\delta$ 的数学定义写法，只从简单数列和简单函数的图像分析入手，说明其精神实质，并将极限这部分内容的重点放在极限四则运算法则的运用上。

（2）加大高等数学概念与方法在经济管理中的应用篇幅。考虑到成人教育学生的特点以及高等数学在经济管理类学科中的应用作用，我们对数学理论的证明和应用意义不大的内容作了删减，以便有更多的篇幅叙述应用方面的知识。例如，增加了与导数相关的“边际”、“弹性”等概念在经济学上应用的例子。

（3）重视练习题的配备。一套精心编写的练习题往往可以使一本教材增色不少。数学课程的特点决定了学生必须通过演算一定量难易适度的习题，才能真正领会和掌握相关的数学知识点。在习题配备上，着重在于让学生掌握最基本计算方法和技能，对于技巧性难度大的习题和理论证明题很少涉及。事实上，后继课程的教学也只要求学生有这方面的基本计算训练就足够了。

（4）对于普通教科书上常见的错误及易混淆之处，例如分段函数、复合函数、反三角函数等，作了必要的澄清与纠正。

本教材是针对每周4学时，共17教学周的本科教学需要而编写的。为了方便教师的备课和学生的自学，我们尽量按两个学时的讲授内容作为一节进行章节划分的。全书共分七章，第一、二章由丁正中编写，第三、四章由李剑秋编写，第五、六章由王海敏编写，第七章由朱灵编写，最后由丁正中总纂各章。

本书经浙江工商大学审定，已列入浙江工商大学成人教育重点教材系列编写计划并获资助出版。

编者

2006年11月30日

目　录

第一章　函　数

§1.1　函数概念

一、函数的定义

在中学数学中，我们已接触过函数这一概念. 这里，我们作一简要的复习，并着重指出其中一些要点.

在同一个经济现象中，往往同时有几个变量在变化着，这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 现在我们先就两个变量的情况(多于两个变量的情形以后在第七章再讲)举出几个例子.

例 1　考虑工厂生产某种产品的总成本 c 与该产品生产数量 q 之间的相依关系. 它们之间的关系可以由公式

$$c = c_0 + aq$$

给定. 这里 c_0 是生产该产品的固定成本，它与生产出多少产品无关，为一常数；a 是每生产一个单位产品的成本，也为一个固定的常数. 当生产数量 q 在 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个整数值时，由上式就可以确定此时的总成本的相应数值.

例 2　某运输公司规定货物的吨千米运价为：在百千米以内，每千米 5 元；超过百千米，超过部分每千米为 4 元. 考虑运价 M 和里程 s 之间的相依关系，它们的相依关系是：

当 s 不超过 100 时，$M = 5s$；

当 s 超过 100 时，$M = 500 + 4(s - 100) = 4s + 100$.

显然，里程数 s 在 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上面计算方法可以确定此时运价的相应数值.

例 3　用铁皮做一个容积固定为 $V_0(\mathrm{cm}^3)$ 的圆柱形带盖罐头筒. 考虑罐头筒的铁皮用料 $S(\mathrm{cm}^2)$ 与罐头筒底半径 r (cm) 之间的相依关系. 显然罐头筒的表面积即铁皮用料

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh,$$

而其中 $h = \dfrac{V_0}{\pi r^2}$，故铁皮用料 S 与筒底半径 r 之间的相依关系可由公式 $S = 2\pi r^2 + \dfrac{2V_0}{r}$ 给定. 当底半径 r 在 $(0, +\infty)$ 中任意取定一个数值时，罐头筒的铁皮用料可由以上公式确定出相应的数值.

抽出上面几个例子中所考虑的量的实际意义，它们都表达了两个变量之间的明确的相依关系或明确的对应规律，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量根据这种对应规律就有一个确定的值与之对应. 两个变量的这种对应关系就是我们常说的函数概念的实质.

定义 1.1 若有两个变量 x 和 y,变量 x 的变化范围为 X. 如果对于 X 中的每一个 x 值按照某一明确的对应规律 f,都可以唯一地确定变量 y 相应的取值,则称变量 y 是变量 x 的函数,记为

$$y = f(x), x \in X$$

其中变量 x 称为**自变量**,实数子集 X 称为该函数的定义域,变量 y 称为**因变量**.

二、函数的表示法

在说明两个变量中一个变量是另一个变量的函数时,关键的问题是应说明:

1. 定义域 X

由于定义域 X 是一个实数子集,所以它的常见表示法有集合表示形式,例如:

$$X = \{x \in R \mid 0 < x < 1\} \text{ 以及 } X = \{x \in R \mid x \geqslant 2 \text{ 或 } x \leqslant -1\} \text{ 等等.}$$

另一常用表示定义域的形式为区间(开,闭或半开半闭)表示法,例如上面的集合表示形式可改写为:

$$X = (0,1) \text{ 以及 } X = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty) \text{ 等等.}$$

在实际问题中,函数的定义域可以根据问题的实际意义来确定. 例如前面的例 2 与例 3 中的函数定义域均为 $X = (0, +\infty)$,而例 1 中函数的定义域应为 $X = Z^+$ (Z^+ 表示正整数集合).

2. 函数的对应规律 f

函数的对应规律 f 最常见的表示法是所谓的"**解析表示法**". 它指示出,对 x 的给定数值必须进行哪些数学运算,才可以得出 y 的对应数值. 这里所说的"数学运算",只限于加、减、乘、除、乘方、开方、指数、对数、三角函数和以后将学到的反三角函数运算(以后,随着我们微积分知识的学习,还可以加入其他的运算,例如极限运算等).

如果不考虑实际问题的背景,只从数学意义上(即数学运算的合理性)来考虑问题,一个用解析表示法来表明对应规律的函数,它的定义域通常认为就是自变量所能取的、使对应规律表示法中所有数学运算均有意义的一切实数所组成的数集. 例如,函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是$[-1,1]$;函数 $y = 1/\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是$(-1,1)$. 这种函数定义域,通常称之为"**自然定义域**",或者,在不致引起混淆时,简称"定义域". 由于自然定义域在数学意义上是一个完全确定的数集,为了今后叙述方便,我们规定:自然定义域可以略写. 当然,如果必须考虑问题的实际意义并且此时实际意义的定义域与自然定义域不一样时,或者由于研究问题的需要只考虑自然定义域的一部分作为函数定义域,则应明确表示清楚,不能略写,以免引起混淆.

例 4 求函数 $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$ 的(自然)定义域.

解 求 $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$ 的定义域,即是求不等式 $x^2 - x - 6 \geqslant 0$ 的解,解之,得

$$(x-3)(x+2) \geqslant 0, \qquad -\infty < x \leqslant -2 \quad \text{或} \quad 3 \leqslant x < +\infty,$$

故得定义域

$$X = (-\infty -2] \cup [3, +\infty).$$

例 5 确定 $f(x) = \dfrac{x+1}{\lg(4-x^2)}$ 的(自然)定义域.

解　设 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，由 $f(x)$ 知，

$$\begin{cases}4-x^2>0\\ \lg(4-x^2)\neq 0\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases}-2<x<2\\ x\neq\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

由此，$D(f)=\{x\mid -2<x<2 \text{ 且 } x\neq\pm\sqrt{3}\}$，

或者写为 $D(f)=(-2,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2)$.

例 6　下列各组函数是否是相同函数？

(1) $f(x)=x$，　$g(x)=\dfrac{x^2}{x}$

(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$，　$g(x)=|x|$

(3) $f(x)=\lg x^2$，　$g(x)=2\lg x$

(4) $f(x)=\sqrt[6]{x^2}$，　$g(x)=\sqrt[3]{x}$

解　(1) 因 $f(x)=x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

$$g(x)=\frac{x^2}{x} \text{ 的定义域为 } (-\infty,0)\cup(0,+\infty),$$

即它们的定义域不同，故不是相同函数.

(2) 因 $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=|x|$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，且对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，总成立 $\sqrt{x^2}=|x|$，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应规律亦相同，故它们是相同函数.

(3) 因 $f(x)=\lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

　　$g(x)=2\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

即它们的定义域不同，故不是相同函数.

(4) 尽管 $f(x)=\sqrt[6]{x^2}$ 与 $g(x)=\sqrt[3]{x}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，但当 $x<0$ 时，例如取 $x=-1$，$f(-1)=\sqrt[4]{(-1)^2}=1$，$g(-1)=\sqrt[3]{-1}=-1$，即 $f(-1)\neq g(-1)$，也就是说它们的对应规律不相同，故它们是不相同函数.

例 7　设函数 $y=f(x)=2x^2+x+1$.

指出该函数对应关系 f 的意义，并求 $f(-1)$，$f(x_0)$，$f(\dfrac{1}{x})$ 和 $f[f(x)]$.

解　所给函数的对应关系 f 是用解析表示式给出的. 自变量 x 通过一连串代数运算而得到函数值 y；具体而言，f 作用于"$(\bullet)$"的意义是

$f(\bullet)=2(\bullet)^2+(\bullet)+1$.

现令 $(\bullet)$ 为 (-1)，则得 $f(-1)=2(-1)^2+(-1)+1=2$；

若令 $(\bullet)$ 为 (x_0)，则得 $f(x_0)=2(x_0)^2+(x_0)+1=2x_0^2+x_0+1$；

若令 $(\bullet)$ 为 $(\dfrac{1}{x})$，则得 $f(\dfrac{1}{x})=2\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(\dfrac{1}{x}\right)+1=\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1$；

若令(•)为$[f(x)]$,则得 $f[f(x)] = 2[f(x)]^2 + [f(x)] + 1$

$$= 2[(2x^2 + x + 1)^2] + (2x^2 + x + 1) + 1$$

$$= 8x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 5x + 4.$$

例 8　设 $f(x+1) = x^2 + 2x$

求(1)$f(x)$；　(2)$f(\sin x)$

解　(1) 令 $x + 1 = t$,则 $x = t - 1$.

故 $f(t) = f(x+1) = x^2 + 2x = (t-1)^2 + 2(t-1) = t^2 - 1$；

改写自变量 t 为 x,得 $f(x) = x^2 - 1$.

(2) 由(1)得 $f(t) = t^2 - 1$. 以 $\sin x$ 替代 t,得 $f(\sin x) = (\sin x)^2 - 1 = -\cos^2 x$.

在用解析表示法表示一个函数时,还可以对于它的定义域内自变量 x 不同的值,用两个或两个以上的数学运算表达式来表明它的对应规律. 这时,这样表示出的函数,形式上有一个方便的名称,称之为**“分段函数”**. 例如：

$$y = f(x) = \begin{cases} x & (x \geqslant 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

和

$$y = F(x) = \begin{cases} 1 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

都是定义在实数集 R 上的分段函数,它们的函数图象分别如图 1－1 和图 1－2 所示.

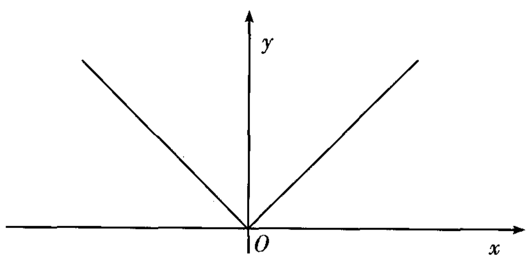

图 1－1

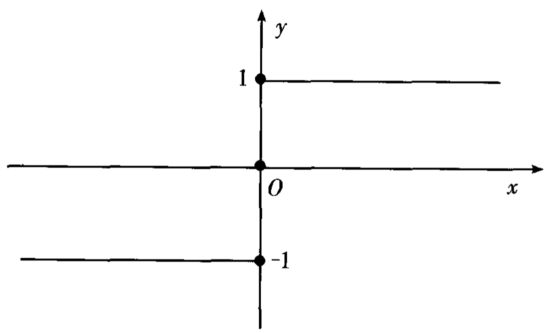

图 1－2

例 9　设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & 当\ x \neq 0 \\ 0 & 当\ x = 0 \end{cases}$,求 $\dfrac{f(t) - f(0)}{t} (t \neq 0)$.

解　因为 $t \neq 0$,故 $f(t) = t^2 \sin \dfrac{1}{t}$.　又因 $f(0) = 0$,故最后

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{t^2 \sin \frac{1}{t} - 0}{t} = t \cdot \sin \frac{1}{t}.$$

例 10 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin x & (x\leqslant 0)\\ 2x+3 & (x>0)\end{cases}$

试问 $f(x+2)=\begin{cases}(x+2)^2\sin(x+2) & (x\leqslant 0)\\ 2(x+2)+3 & (x>0)\end{cases}$

对吗?为什么?

解 题中的函数是用分段表达式给出的,所求的函数值应视自变量取值范围而定,不能如同一个解析式表示的函数那样简单代入求值.正确的做法是:

当 $x+2\leqslant 0$ 即 $x\leqslant -2$ 时,有 $f(x+2)=(x+2)^2\sin(x+2)$

当 $x+2>0$ 即 $x>-2$ 时,有 $f(x+2)=2(x+2)+3$

由此 $f(x+2)=\begin{cases}(x+2)^2\sin(x+2) & (x\leqslant -2)\\ 2(x+2)+3 & (x>-2)\end{cases}$

例 11 设 $f(x+2)=\begin{cases}3x-2 & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ x^2-1 & (-1\leqslant x<0)\end{cases}$,求 $f(x)$.

解 令 $t=x+2$,则 $x=t-2$,

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,即 $0\leqslant t-2\leqslant 1$ 或 $2\leqslant t\leqslant 3$ 时,有

$$f(t)=f(x+2)=3x-2=3(t-2)-2=3t-8,$$

当 $-1\leqslant x<0$ 时,即 $-1\leqslant t-2<0$ 或 $1\leqslant t<2$ 时,有

$$f(t)=f(x+2)=x^2-1=(t-2)^2-1=t^2-4t+3,$$

故 $f(t)=\begin{cases}3t-8 & (当\ 2\leqslant t\leqslant 3)\\ t^2-4t+3 & (当\ 1\leqslant t\leqslant 2)\end{cases}$.

由于函数的对应规律与自变量所采用的字母无关,所以改写 t 为 x,得

$$f(x)=\begin{cases}3x-8 & (2\leqslant x\leqslant 3)\\ x^2-4x+3 & (1\leqslant x<2)\end{cases}.$$

函数的对应规律实用的表示法还有**图象法**和**列表法**.

图象法是指对于每一个 $x\in X$,相应的得到 y 后,将它们组成点的坐标,并在直角坐标系平面上逐点描出这些点的集合.通常,这个点集合组成一条曲线,称之为图象.这样描出图线后,函数定义域及函数对应规律便被直观、明了地表示了出来.

例 12 某工厂生产某产品每日最多生产 100 吨,固定成本为 130 元,每生产 1 吨,需增加变动成本 6 元,则每日产品的总成本 C 是产量 x 的函数. 图 1－3 为该函数的图象表明了这个函数的定义域及其对应规律.

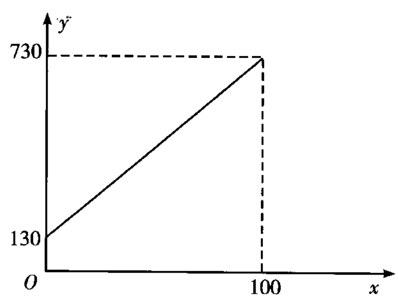

图 1－3

至于列表法,我们用下例说明之.

例 13 某城市一年里各月毛线的零售量(单位:百千克) 如下。

表 1－1

月份(t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量(s)	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

表 1－1 表示了某城市毛线零售量 s 随月份 t 而变化的函数关系，是列表法表示函数的一个实例. 这里很明显地可以看出：它的定义域 $D(f) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$，而函数对应规律则规定为"从上格数找下格数"的方式.

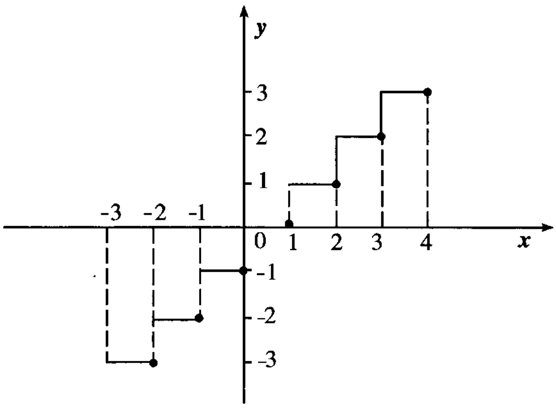

图 1－4

函数对应规律的表示法除了以上 3 种之外，还有用语言直接叙述函数的定义域和对应规律的. 这种仅用文字叙述表达函数的方法，我们应该习惯它.

例如，"对于任何一个实数 x，舍去它的正小数部分，留下它的整数部分数值作为函数值"，这样的叙述已确定了一个函数：$y = f(x), x \in R$. 这个函数由于经常被用到，被取名为"**实数 x 的取整函数**"，并在形式上被记成 $y = [x]$. 图 1－4 画出了它的图象.

又如，"对于任何一个实数 x，如果它是有理数，则函数值 y 取为 1，如果它是无理数，则函数值 y 取为 0."这样的叙述也确定了一个函数，被称为"**狄立克莱(Dirichlet) 函数**"并常被记成以下形式：

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 & (\text{当 } x \text{ 为有理数}) \\ 0 & (\text{当 } x \text{ 为无理数}) \end{cases}.$$

以上两个例子均无法用我们所限定的"数学运算"来表示出函数的对应规律. 这些例子告诉我们，函数的重要表示法 —— 解析法并非处处可行. 尽管如此，在大多数实际场合，我们还是力图用解析法来表明所需要研究的函数. 因为我们将会看到，一旦函数有了解析表示式，就能很方便地对函数进行精确的理论分析.

三、用解析法表示函数的实例

例 14 某商品的需求量 Q 是单价 p 的一次函数. 经统计知道，当 $p = 5$ 元时，可卖出 200 件，当 $p = 4$ 元时，可卖出 1200 件. 求需求函数.

解 由题意可知

$$Q = Q(p) = a + bp \in [0, +\infty), p \in [0, x_0]$$

其中 a, b 为待定常数，x_0 为最高单价.

根据条件有 $\begin{cases} a + 5b = 200 \\ a + 4b = 1200 \end{cases}$,

解之，得 $\begin{cases} a = 5200 \\ b = -1000 \end{cases}$,

又由值域的实际意义限制，$Q \geqslant 0$，故 $5200 - 1000p \geqslant 0$，
解之，得 $p \leqslant 5.2 = x_0$.

最后，需求函数是 $Q = 5200 - 1000p$，
$p \in [0, 5.2]$.

需求曲线如图 1－5 所示.

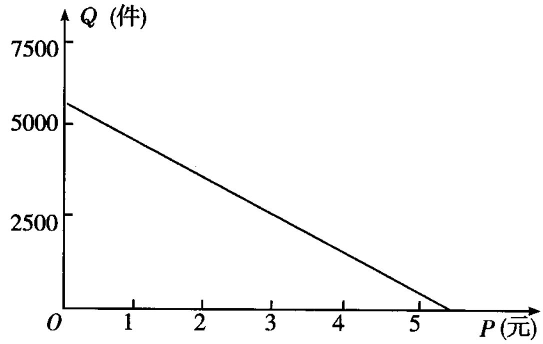

图 1－5

例 15 已知成本函数为二次函数，固定成本为 2 万元，且当产量为 1 吨时成本为 6 万元，当产量为 2 吨时，成本为 12 万元，求此成本函数.

解 设产量为 x 吨时，成本为 y 万元，则所求成本函数应为

$$y = ax^2 + bx + c, x \in [0, +\infty),$$

其中 a, b, c 为需确定的常数.

由已知，当 $x = 0$ 时，$y = 2$(固定成本)；当 $x = 1$ 时，$y = 6$；而当 $x = 2$ 时，$y = 12$，由此得关于 a, b, c 的方程组：

$$\begin{cases} c = 2 \\ a + b + c = 6 \\ 4a + 2b + c = 12 \end{cases}$$

解之，得 $$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$$

欲求成本函数即为 $y = x^2 + 3x + 2, \quad x \in [0, +\infty)$.

我们最后再举一个分段函数的实例.

例 16 铁路局收取行李费规定如下：当行李不超过 50 千克时，每千克收 0.15 元；当超过 50 千克时，超重部分按每千克 0.35 元收费. 试求运费 y(元) 与重量 x(千克) 之间的函数关系.

解 由已知，当 $0 < x \leqslant 50$ 时，$y = 0.15x$；

当 $x > 50$ 时，超重部分是$(x - 50)$ 千克，正常收费部分是 50 千克，由此，

$$\begin{aligned} y &= 0.15 \times 50 + 0.35(x - 50) \\ &= 7.5 - 0.35(x - 50), \end{aligned}$$

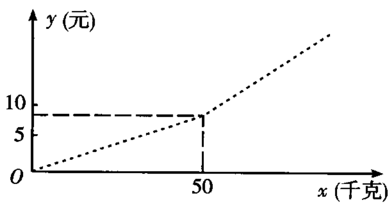

图 1－6

因此，最后得函数的分段表示式

$$y = \begin{cases} 0.15x & (\text{当 } 0 < x \leqslant 50) \\ 7.5 + 0.35(x - 50) & (\text{当 } x > 50) \end{cases}$$

该函数图象如图 1－6 所示.

四、函数的有界性

当一个函数被确定后，其含义是定义域及对应规律已被明确给出，于是函数的值域也就自然地被精确地确定出来了. 但鉴于今后研究的需要，常常并无必要去弄清函数的值域究竟是一个什么样的数集，而只需粗略地搞清随着自变量的变动，函数值是否只在实数集合的一个有限的范围内变动，也就是值域是否是一个有界限的数集就行了. 如果对于已给的函数，回答是肯定的，我们就称所给函数具有"有界性"，或函数是"有界"的. 反之，则称所给函数是"无界"的.

例如，过去学过的正弦函数 $y=\sin x$，便是一个有界函数. 因为它的值域是有界限的实数集合$[-1,1]$.

函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 则是无界的，因为它的值域 $Z=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 是一个无界限的实数集合.

习题　1.1

1. 下列函数是否相同，为什么

(1)$y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 与 $y=x-1$　　(2)$y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x$

(3)$y=x^3$ 与 $y=\sqrt{x^6}$　　(4)$y=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 与 $y=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

2. 求下列函数的(自然)定义域

(1)$y=\dfrac{x-2}{x^2-4x}$　　(2)$y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(3)$y=\dfrac{1}{\lg(x-\pi)}+\lg\dfrac{x}{2}$　　(4)$y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$

3. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & (x<-1)\\ 1+x^3 & (-1\leqslant x<2)\\ \sin x & (x\geqslant 2)\end{cases}$$

求函数值 $f(-2)$，$f(-1)$，$f(\sqrt[3]{3})$，$f(\pi)$.

4. 设 $f(x+\pi)=\sin x+x$

求：(1)$f(x)$；(2)$f(2x-\dfrac{\pi}{2})$；(3)$f(\sin x)$；(4)$f[f(x)]$ 的解析表示式.

5. 若 $f(x)=\begin{cases}0 & (0\leqslant x<1)\\ \dfrac{1}{2} & (x=1)\\ 2x-2 & (1<x\leqslant 2)\end{cases}$

求：(1)$f(2x+1)$；(2)$f[f(x)]$ 的解析表示式.

6. 将边长为 10 厘米的一块正方形铁皮的四角各截去一个大小相同的小正方形，然后将四边折起做成一个无盖的方盒，试求所得方盒体积与截去的小正方形边长的函数关系.

7. 某工厂生产某产品总数量为 1000 吨，规定向某客户销售时每吨定价为 130 元，但若销售超过 700 吨，则超出部分可按每吨降价一成予以优惠. 试求该厂在向客户销售时，其销售总收入与销售量的函数关系.

8. 某产品年产量为 x 台，每台售价为 200 元. 当年产量不超过 500 台时，可以全部售出；当年产量超过 500 台时，须经广告宣传后才可再售出一些，这时超额销售部分需花广告费每台 2 元和销售杂务费每台 15 元，但最多也只能售出 200 台. 试求该产品年销售总收入与年产量 x 的函数关系.

9. 判断下列函数是否有界

(1) $y = \sin^2 x + \cos x - 3$ (2) $y = 3\sin\dfrac{1}{x}$

(3) $y = 2^{\frac{1}{x}}$ (4) $y = \dfrac{1+3x^2}{1+x^2}$

§1.2 反函数与反三角函数

一、反函数概念

在经济学中，某个产品的生产函数与成本函数体现了两个不同的然而却有内在联系的函数过程. 它们是不同的，因为自变量与因变量正好颠倒了位置，但当生产函数确定时，成本函数无形之中也已确定. 换言之，成本函数可以从生产函数推算出来. 这种现象，不仅仅在这两个具体函数的研究中存在，因此，为了进行一般性的讨论，我们引进下面反函数的概念.

设给定一个函数：$y = f(x) \in Z, x \in X$. 这里 x 是自变量，y 是因变量，X 是定义域，Z 是值域.

我们现在从相反的方向来看 X 到 Z 的这个函数关系. 在 Z 中任意取一个值 y，根据 Z 是 $y = f(x)$ 的值域的含义，故至少可以在 X 中找到一个 x，使得 $f(x) = y$. 如果这种 x 在 X 中不止一个，则这样由 y 找出 x 的方法不成为函数对应法则，但如果对每一个 $y \in Z$，这种 x 在 X 中均只有一个，则这种由 y 找出唯一的 x 的方法，就是一个与原来的函数对应规律逆向而行的、新的函数对应规律，这时我们就可以将 Z 作为新的定义域，用上述新的函数对应规律定义一个新的函数来. 从上面的分析可以看到，这种新函数能够产生的前提是："对每一个 $y \in Z$，使得 $f(x) = y$ 的 x 值均只有一个". 这个前提也可以说成："对于不同的自变量 x 之值，已给函数 $y = f(x), x \in X$，相应的因变量 y 的值都不同". 根据以上讨论，我们给出以下反函数的定义.

定义 1.2 假设函数 $y = f(x), x \in X$ 的函数对应规律 f 具有以下特性：对于 X 中不同的自变量 x 之值，相应的因变量 y 值也不同. 现以该函数的值域 Z 为定义域，对于任意 $y \in Z$，令 x 与 y 相对应，这里 x 是 X 中使得 $f(x) = y$ 的唯一取值，则这个从原值域 Z 到原定义域 X 的函数，称为函数 $y = f(x), x \in X$ 的**反函数**，记为

$$x = f^{-1}(y), y \in Z$$