

河流及水库流场 与水质的数值模拟

冯民权 郑邦民 周孝德\著



科学出版社

www.sciencep.com

河流及水库流场与 水质的数值模拟

冯民权 郑邦民 周孝德 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

数值模拟是研究河流及水库流场与水质的的重要手段之一。本书对该领域在国内外的发展趋势进行了详尽的列举和阐述,系统地介绍了河道水库一维、二维、三维水流数学模型及其基本原理、贴体坐标变换、方程离散、数值解法及典型的检验算例和工程应用实例。

本书介绍的内容是作者从事河流及水库流场与水质数值模拟方面研究工作的经验总结,书中的工程实例均是作者工作的成果。本书是一本基本原理和理论分析与工程实际密切结合的专著。

本书可供水利水电、环境等专业的科研、设计及管理人員阅读,亦可供大专院校相关专业的教师和研究生参考。

图书在版编目(CIP)数据

河流及水库流场与水质的数值模拟/冯民权,郑邦民,周孝德著. —北京:科学出版社,2007

ISBN 978-7-03-017902-1

I. 河… II. ①冯… ②郑… ③周… III. ①河流-流场(流体力学) ②河流-水质-数值模拟 IV. TV14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 100497 号

责任编辑:罗 吉 于宏丽 / 责任校对:朱光光
责任印制:钱玉芬 / 封面设计:王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

陈海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 2 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2007 年 2 月第一次印刷 印张:21 1/2

印数:1—2 000 字数:421 000

定价:48.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

序

在河流及水库工程的设计、施工和运行管理中,会遇到许多复杂的与水流、水质有关的问题,它不仅具有重要的学术意义,而且常常关系着工程的关键技术,所以国内外一直十分重视对它的研究。

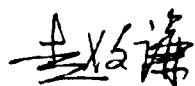
随着计算机技术的发展,数值模拟已成为众多学科重要的研究手段之一。大尺度水体流动和传质问题的研究、不规则边界条件的处理、算法的收敛性和稳定性、模拟精度与计算时间等问题都是当前计算水动力学的热点问题。该书系统地研究了河流及水库流场与水质的数值模拟,对溢流坝流场,作者用有限元法计算了流速和压力分布,模拟了缓流、急流与坝面紊流边界层流动。江河、水库、湖泊区域形状多是不规则的,作者用一般曲线坐标变换生成网格。由于流动多为紊流,因此流动方程具有非线性性质,作者采用 $k-\epsilon$ 紊流模型,计算了三维问题,其中有中缝射流、半中缝射流、侧排水、淹没射流等流场与温度场。采用有限分析法计算对流扩散方程时,作者改进了 FA 系数,使它在高雷诺数情况下,保持自动迎风特性,并适应斜迎风。对宽浅水域,作者建立了曲线坐标下考虑自由水面的平面二维水流与水质数学模型,计算了黄河北金堤分滞洪区、大庆市区非恒定流洪水演进和新疆博斯腾湖湖流及盐浓度分布等。对窄深水域,作者建立了紊动扩散系数采用 F 分布与垂向坐标伸缩变换相结合的垂向二维水流与水温数值模型,计算了糯扎渡水电站水库的水流与分层水温。对于大型河网,作者分别采用稀疏矩阵常用解法与随机游动及图论方法,计算了珠江三角洲及上海市苏州河大型河网。作者用质点随机运动方法,计算了沁河张峰水库的泥沙淤沉,给出了它的分布量、部位与过程,从单相流引向两相流。

作者长期致力于水流和水质的数值模拟研究,在理论与实践上都取得了不少的研究成果。该书是作者在这一领域潜心研究多年的成果总结。

该书的最大特点是理论与实践的紧密结合,既讲述河流及水库水流与水质问题的基本理论,又列举了较多工程计算实例,因这些实例都是作者亲自完成的研究课题,故分析特别深入和生动。读者通过对该书的学习,既可以理解基本理论,又能学到运用基本理论解决工程实际问题的方法。

该书内容丰富,实用性强,同时还向我们展示了一个范例:耕耘学术需要长期的积累。书中没有张扬浮躁和玩弄辞藻的时弊,是一本值得认真学习的好著作。

相信该书的出版,不仅会促进我国河流及水库流场与水质模拟研究的发展,也会引领学术风气的改善。



前 言

河流、水库是人类重要的淡水生态资源,沿江环湖地区常是人类活动频繁和生息繁衍的重要地区。随着经济的发展,大江大河的防洪压力逐年增大,河流水库的水质逐年下降,给人类的生产、生活和经济发展带来了巨大的威胁。随着计算机技术的发展,数学模型已经成为研究的重要手段。

河流的综合治理是近代水利工程和经济发展中的重要内容,作者从 20 世纪 70 年代接触这一课题,算来已有多年的历史。

较早的是 70 年代初对溢流坝的流场计算,当时除了对个别的坝形体做模型试验之外,也对相关理论进行了研究,寻求设计规律,这一任务落在计算流体方面,作者用有限元法计算了流速、压力分布,同时模拟了缓流、急流,随后计算了坝面紊流边界层流动(见《中国科学》,1985 年 A 辑 3 期),最后是白龟山水库流场与温度场数值模拟,解决大型火电厂冷却水、取排水口所引起的温度变化及热污染处理,计算结果与实验结果对比是一致的。江河、水库、湖泊区域形状多是不规则的,作者用一般曲线坐标变换生成网格。又由于流动多为紊流,流场方程具有非线性性质,作者采用 $k-\epsilon$ 紊流模型,计算了三维问题,其中有中缝射流、半中缝射流、侧排水、淹没射流等流场与温度场。对于平面二维流场计算了海河口潮汐流动、黄河北金堤分滞洪区洪水演进、大庆市二维非恒定流洪水演进、新疆博斯腾湖流动及盐分浓度分布、葛洲坝溃坝洪水及澜沧江小湾水库以下五个梯级水库的溃坝洪水影响,包括糯扎渡水库垂向二维流场及温度场。在垂向二维溃坝计算方面,还用了格子质点法,并得出溃口在流动初始瞬间是不符合静水压强分布的结果,从而指出以往溃口流量公式的误差。对于大型河网,作者做过珠江三角洲及八大口门的一维、二维衔接计算。对上海市苏州河河网计算,作者除采用稀疏矩阵常用解法外,还采用随机游动及图论方法,此法对越大的网络,越显其优越性。无论流场、温度场、浓度场都可以广义地作为物质运输,具有对流扩散性质。解对流扩散方程作者采用了有限分析法,改进 FA 系数的计算,使它在高雷诺数情况下,保持自动迎风特性,并适应斜迎风。与此同时,作者研究长江上芜湖大桥、江阴桥的局部桥渡冲刷与河床演变,模拟了高含沙黄河的浑水运动,用质点随机运动方法,计算沁河张峰水库的泥沙淤沉,给出了它的分布量部位与过程,从单相流引向两相流。

相关课题涉及长江、黄河及其支流、海河口、珠江及其口门。在水环境方面除了 BOD、COD 分析之外,也涉及藻类生长及鱼类活动等生态水力学内容。

本书的特点是内容创新,且理论与实践紧密的结合,既讲述河流,又讲述水库湖泊;既讲述流场,又讲述水质;既讲述基本原理与理论分析,又有实际工程计算实

例。本书介绍的内容是作者从事河流及水库流场与水质数值模拟方面研究工作的经验与学术总结。书中工程实例均是作者工作成果,其中实际算例给出的各种方法,可以开阔视野、启发思路。

为了精简篇幅,避免重复,与本书相关的其他内容可参阅相关文献。这一课题还正在不断发展中,书中如有不足之处,欢迎读者批评指正。

作者

2005年10月

目 录

序
前言

第一部分 基本原理

第 1 章 绪论	3
1.1 流体力学基本原理	3
1.2 流体力学基本方程	9
1.3 流体力学方程计算特点	15
第 2 章 河流水力学特性	22
2.1 河渠水力学基本特性	22
2.2 河流水流结构	26
2.3 河渠恒定流	29
2.4 河渠非恒定流	31
第 3 章 有限差分法	48
3.1 差分方法的基本概念	48
3.2 典型的偏微分方程的有限差分分解	58
第 4 章 随机分析方法及其应用	66
4.1 随机游动与扩散理论	66
4.2 用随机游动方法解泊松方程	67
4.3 一般二维对流扩散方程随机游动解	71
4.4 对流扩散方程的 Monte-Carlo 解法及其证明	81
4.5 异质在流体中运动随机游动理论基础	91
4.6 颗粒在流体中的随机运动	96
4.7 固体颗粒的群体沉降速度分析	104
第 5 章 平面二维水流水质数值模型	117
5.1 水流控制方程	117
5.2 水流控制方程的坐标变换	118

5.3	水流方程求解方法	119
5.4	水质控制方程	126
5.5	水质方程求解方法	126
5.6	小结	129

第二部分 实际应用

第6章	垂向二维水流水温数值模型	133
6.1	水流数学模型	133
6.2	水流定解条件	134
6.3	坐标变换	135
6.4	水流方程计算方法	137
6.5	参数确定方法	140
6.6	水温控制方程	140
6.7	水温方程求解方法	140
6.8	水温边界条件	142
6.9	小结	143
第7章	三维紊动对流扩散的数值分析	144
7.1	控制方程	144
7.2	坐标变换	146
7.3	一般曲线坐标下的方程	146
7.4	有限分析解	149
7.5	算例分析及结论	152
第8章	溢流体形的数值模拟	158
8.1	坝面流动的有限元解	158
8.2	溢流体形变换函数交替方向解	165
第9章	大庆市二维非恒定流洪水演进模拟	169
9.1	概述	169
9.2	数学模型	171
9.3	数值解法	172
9.4	大庆市洪水模拟	173
9.5	计算结果及其分析	175

9.6	系统结构	178
9.7	系统功能	179
9.8	小结	181
第 10 章	博斯腾湖平面二维水流水质数值模拟	182
10.1	概述	182
10.2	研究目的	184
10.3	研究方法的确定	186
10.4	计算条件的确定	190
10.5	计算方案的选择	194
10.6	计算结果与分析	195
10.7	小结	206
第 11 章	糯扎渡水电站垂向二维水流水温数值模拟	208
11.1	概述	208
11.2	水流数学模型	210
11.3	水流计算方法	212
11.4	水流定解条件	212
11.5	参数计算方法	212
11.6	水流模型验证	213
11.7	糯扎渡计算方案及基础资料	214
11.8	水流计算结果及其分析	216
11.9	糯扎渡水库水温模型	224
11.10	水温预测基础资料	225
11.11	水温计算结果分析	226
11.12	小结	230
第 12 章	丁坝绕流及局部冲刷坑二维数值模拟	231
12.1	流场模拟的原理与方法	231
12.2	丁坝头局部冲刷坑的分析	235
12.3	丁坝绕流算例	239
12.4	模型验证	240
12.5	丁坝冲刷坑计算	241
12.6	结论	242

第 13 章 张峰水库库区泥沙淤积数值模拟	243
13.1 概述	243
13.2 计算条件	245
13.3 数学模型及计算方法	246
13.4 计算成果分析	252
13.5 结论	285
第 14 章 河网计算	287
14.1 河网基本公式	287
14.2 Monte-Carlo 方法在河网计算中的应用	290
14.3 结论	298
第 15 章 展望	299
主要参考文献	301
附录 A 一般曲线坐标变换与网格生成	303
附录 B 一般正交曲线坐标系在河道水流中的应用	306
附录 C 一般曲线坐标系下的流体力学基本方程的张量形式	318
附录 D $\nabla^2 a$ 的表达式与计算	331

第一部分 基本原理

第 1 章 绪 论

江河是人类文明的摇篮,古今中外莫不如此。近百年来,随着经济的发展、科学的进步,人类治理江河的步伐加快,提出许多河流及水库方面的新课题。本书是作者多年来从事河流及水库流场与水质数值模拟方面的总结。

1.1 流体力学基本原理

1.1.1 观察流体运动的两种方法

观察流体运动有两种方法,一种是把流体视为质点或质点系,着眼于流体质点的运动情况,这是理论力学中采用的方法,称为质点法或 Lagrange 法。另一种方法着眼于流动空间运动要素如流速、压强的变化,着眼于流场的变化,这是连续介质力学中采用的方法,称为流场的方法或 Euler 法。

1. 质点法(Lagrange 法)

流体质点的位置是时间和它们的初始参数(如初始坐标)的函数,即

$$\gamma = \gamma(a, b, c, t) \quad (1.1a)$$

或

$$x_i = x_i(c_i, t) \quad (1.1b)$$

三维空间中 $i=1, 2, 3$; 流速分量为

$$u_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} = \dot{x}_i(c_i, t) \quad (1.2)$$

加速度分量

$$a_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \ddot{x}_i(c_i, t) \quad (1.3)$$

式中, c_i, t 称为 Lagrange 坐标或叫作 Lagrange 参数。

如果 c_i 固定, 改变 t , 则为某一个流体质点随时间 t 变化的质点轨迹线(path line)。

如果令 $t=t_1$, 对于不同的 c_i , 则为某一特定的时间内流体质点的位置分布。 $C_i^{(m)}$ 为 m 个质点分布状态。注意在 Lagrange 观点来看 γ 的定义域不是场, 而是质点标号 m 与时间的函数。不要将 Lagrange 法与 Euler 法中恒定流、非恒定流概念混淆, 在挑流扩散消能与水库泥沙沉降中就是采用此法进行分析的。

对于 Lagrange 法而言, 若质点 m 是千百个, 就要列出千百个方程, 这在过去

用起来是非常不方便的。因此,以往 Lagrange 法只在一些能用少数典型质点就可以代表整个流动性质的情况下得到采用,如波浪的运动。虽然数百年来牛顿创立力学定律时就以质点力学为基础,但过去流体力学中并不常用质点分析法。

随着电子计算机的发展,求解为数繁多的质点系力学方程,对大型快速电子计算机而言已无本质困难,我们已作过 $10^{12} \sim 10^{15}$ 个质点随机运动。目前,计算流体力学中 PIC (particle in cell) 等方法又为 Lagrange 法在流体力学中的应用开辟了新途径。

2. 场的方法(Euler 法)

确定着某种物理量的空间区域称为场,流体力学沿用着连续介质力学描写流体运动通常的观察方法,即 Euler 法。

按 Euler 法流场中某运动要素是时间 t 和空间坐标的函数,例如,流速、压强

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\gamma}, t), \quad p = p(\boldsymbol{\gamma}, t) \quad (1.4a)$$

或

$$u_i = u_i(x_i, t), \quad p = p(x_i, t) \quad (1.4b)$$

式(1.4)中,笛卡儿坐标 x_i 与时间 t 称为 Euler 参变数,或 Euler 坐标。和 Lagrange 法不同,在 Euler 法中 x_i 不是随质点一起运动的,而是固定于空间的坐标架。

当 x_i 固定, t 改变时, u_i 代表空间某固定点上,不同质点通过该点时速度随时间的变化规律;当 t 固定, x_i 改变时,它代表某一时刻,空间各点流速的分布。

流线(stream line)是用来描述流场中流动趋势的一条几何线,线上各点的速度向量与该线相切,即

$$\frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2} = \frac{dx_3}{u_3} = \frac{ds}{u} = \lambda \quad (1.5a)$$

即

$$dx_i = \lambda u_i \quad (1.5b)$$

Euler 法广泛地利用场论的知识,它着眼于流动中运动要素场的变化。例如,流速场 $u_i = u_i(x_i, t)$ 、压强场 $p = p(x_i, t)$ 、浓度场 $c = c(x_i, t)$ 等。

流动要素都与时间无关者称恒定场(steady field)或叫定常场、恒定流。否则,叫不定常场(unsteady field)、非恒定流。

为了研究质点的速度及其变化,尤其是加速度,我们必须跟随质点一个短的时间 dt ,在这一时间间隔里,质点坐标变化了一个 dx_i ,若两个空间点的速度差为 du_i ,则它可以分为两个部分:①第一部分为由于时间的改变,一点的局部变化;②另一部分为由于位置改变引起的,我们有

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} dt + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (1.6)$$

如果用笛卡儿坐标,位移分量 $dx_j = u_j dt$,对式(1.6)求导

$$a_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1.7a)$$

或写作向量形式

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad (1.7b)$$

式中,第一项为空间给定点上的速度随时间的变化率(local rate of change),称为局部加速度或当地加速度或定位加速度;第二项为时间不变,位置改变时空间场的不均匀性引起的变化(convective rate of change),称为对流加速度、迁移加速度、变位加速度。

一般说来,任何一个物理量如压力、密度、能量、浓度、应力等,当它以 Euler 参数表示时,如 $f=f(x_i, t)$,就有

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (1.8)$$

物质导数 df/dt 为局部导数与对流项导数之和。

算子约定

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (1.9)$$

1.1.2 流体微团速度分解定理(Cauchy-Helmholtz)

取一个流体微团,其中 M_0 质点,其位置为 M_0 ,当 $t=0$ 时,其位置在空间 P 点,与其相邻一质点 M ,处于空间 Q 点, $\boldsymbol{\gamma} + \delta\boldsymbol{\gamma}$ 。如果 M_0 点速度为 u_{0i} , M 点的速度 $u_i = u_{0i} + \delta u_i$,以 M_0 为原点新坐标 (ξ_i) ,而有

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_j \quad (1.10)$$

式中, δ 为对空间坐标的微分而不对时间,且有

$$\partial u_i / \partial x_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

它是一个二阶张量在 M_0 点取值,式(1.11)中 $x_j = (x, y, z)$,而 $u_i = (u_1, u_2, u_3) = (u_x, u_y, u_z)$,我们可以把 $\partial u_i / \partial x_j$ 称为流场的不均匀量度,也叫作相对位移率张量(rate of relative displacement) $R_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$ 。如果是均匀流,则 $\partial u_i / \partial x_j = 0$ 。它可以分解为一个对称张量与一个反对称张量之和,即

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.12)$$

令

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad A_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.13)$$

于是我们有

$$R_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \quad (1.14)$$

显然 S_{ij} 是对称的, 称为变形率张量; A_{ij} 是反对称的, 它与旋转角速度 ω_k 有关, 即有

$$\epsilon_{jik} \omega_k = A_{ij} \quad (1.15)$$

最后写为

$$u_i = u_{i0} + s_{ij} \delta x_j + \epsilon_{kji} \omega_k \delta x_j \quad (1.16a)$$

向量形式为

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{s} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \boldsymbol{\gamma} \quad (1.16b)$$

此即流体微团中任一点运动可以分解为平移、变形、旋转三者之和的 Helmholtz 流体微团的速度分解定理。

我们知道, 刚体只有平移与旋转, 而流体则三者都有, 关于详细解释与证明, 可见有关参考文献。

1.1.3 流体中一点应力状态, 应力张量

流体受有内力与外力。内力成对出现, 若取流体中一个以界面为 A 、体积为 V 的微团为脱离体作力的平衡分析, 则只有外力, 而外力又分质量力和表面力两大类 (此为 Cauchy 所分), 如下:

$$\left. \begin{array}{l} \text{内力} \\ \text{外力} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{质量力 —— 体力 (均质流体)} \\ \text{表面力 —— 面力} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{正应力} \left\{ \begin{array}{l} \text{压应力} \\ \text{拉应力} \end{array} \right. \\ \text{切应力} \end{array} \right.$$

按牛顿第二定律外力平衡则有: $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 。

1. 质量力

作用在流体质点上与质量成正比。围绕质点 M 取一个体元 ΔV , 它的质量为 Δm , 所受的质量力为 $\Delta \mathbf{F}$, 则极限

$$\mathbf{X} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta m} = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V} \quad (1.17)$$

式中, \mathbf{X} 称为单位质量的质量力, 又叫质量力密度, 它的单位为加速度, 如果为均质则为体力, 写作 \mathbf{b} 。重力 $G = mg$ 就是质量力。

作用在有限体积 V 上的总质量力

$$\int_V \rho \mathbf{X} dV = \int_V \rho X_i dx_i dx_j dx_k \epsilon_{ijk} \quad (1.18)$$

2. 表面力

与表面 A 接触的流体或固体, 作用于表面上的力称为表面力, 它的大小与面积成正比, 例如, 压力、摩擦力都是表面力, 在 A 面上取任一点 M , 作用元 ΔA 包含有 M 点在内, 见图 1.1。

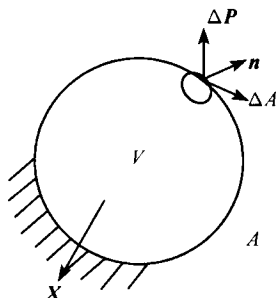


图 1.1 表面力

设 ΔA 的法线方向为 n , 作用在 ΔA 面上的面力为 ΔP , 如果有极限

$$\mathbf{p}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta A_n} \quad (1.19)$$

则 \mathbf{p}_n 即为面力密度, 它代表 A 面上单位面积上的力(应力)。以 \mathbf{p}_n 表示之, 并不一定与 n 方向一致, 它可以是拉应力、压应力、切应力。只是说它是 A 面上的单位面积上的力而已。 dA 面上的总面力为 $\mathbf{p}_n dA$, 而 A 面上的总面力则为

$$\mathbf{P} = \int_A \mathbf{p}_n dA \quad (1.20)$$

过任一点 M 可以有无数个不同的方向, 作用在这些不同 n 表面上的面力, 一般来说是不相等的, 因此, 描写一点的应力状态, 本来是要知道通过点所有的应力的, 换句话说, \mathbf{p}_n 是矢径 $\boldsymbol{\gamma}$ 与表面单位法线向量 n 的函数, 但是, 通过同一点的不同方向各应力并不是互不相关的。事实上, 只要知道三个坐标面方向的应力 \mathbf{p}_x 、 \mathbf{p}_y 、 \mathbf{p}_z , 则任一个 n 面上的应力都可以通过它们来确定。

换句话说, 任意 n 面上的应力 \mathbf{p}_n , 可以由三个坐标轴方向面的应力矢量 \mathbf{p}_x 、 \mathbf{p}_y 、 \mathbf{p}_z 来确定, 而每一个矢量有三个分量, 也就是由 9 个分量来确定。下面我们来证明这一事实, 面的外法线方向代表该面的方向。 $\mathbf{p}_{-n} = -\mathbf{p}_n$ 。应力矢量 \mathbf{p}_n 在直角坐标轴的投影向量分别为 p_{nx} 、 p_{ny} 、 p_{nz} , 这里两个注标: 第一个注标, 表示“面”的方向, 第二个指标表示“力”的方向。

实际流体由于黏性的作用, 应力 \mathbf{p}_n 一般说来是不一定垂直于作用面的。所