中等职业学校文化基础课程教学用书

数学

（复习与提高模块）

潘　碚　主编

高等教育出版社

中等职业学校文化基础课程教学用书

数　　学

(复习与提高模块)

潘　碚　　主　编

高等教育出版社

内容提要

本书是专为中等职业学校的学生编写的对口升学考试数学复习用书。

学生在学习完中等职业学校数学必学内容《数学(共用基础平台)》后，可以有两个方向，一个是继续学习对应专业课程所需的数学知识(比如可以选择学习《数学(专业模块、工科类)》或《数学(专业模块、现代服务业及财经类)》)，另一个方向是升入更高一级的学校继续学习，那么就可以选择使用本书作为升学考试前的复习与提高用书。

本书在复习与提高两方面，给予学生以高水平的指导。

复习部分在于巩固所学数学知识，从而为提高成绩做好准备。提高部分则有针对性地教给学生有用的解题方法和技巧。解题能力其实是数学知识理解与掌握好坏的试金石，本书力图通过具体的数学题的详细解答过程，引导学生逐步掌握最基本的方法，深刻地理解和洞悉数学知识内容，从而，不管题型的千变万化，都能迎刃而解。

本书定位是：于复习中提高成绩，从容应对考试，顺利升入更高一级的学校。

本书供中等职业学校有志升入更高一级学校的学生使用。入学新生甚至可以直接把本书作为教材学习使用。本书浅显易学，还特别适合技校学生。

本书配有光盘一张，内容为书中练习题的详细解答，是用动画效果来展示做题步骤，从而更加符合学生年龄特点。

图书在版编目(CIP)数据

数学(复习与提高模块)/潘碚主编. —北京：高等教育出版社，2007.7

ISBN 978-7-04-020995-2

Ⅰ. 数… Ⅱ. 潘… Ⅲ. 数学课-专业学校-教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 078641 号

策划编辑 邵　勇　**责任编辑** 邵　勇　**封面设计** 李卫青　**责任绘图** 吴文信
版式设计 王艳红　**责任校对** 朱惠芳　**责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京明月印务有限责任公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2007 年 7 月第 1 版
印　　张	12.25	**印　　次**	2007 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	290 000	**定　　价**	25.90 元(含光盘)

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　20995-00

郑重声明

前　言

本书是专为中等职业学校的学生编写的对口升学考试数学复习用书。

学生在学习完中等职业学校数学必学内容数学(共用基础平台)后，可以有两个方向，一个是继续学习对应专业课程所需的数学知识(比如可以选择学习《数学(专业模块,工科类)》或《数学(专业模块,现代服务业及财经类)》)，另一个方向是升入更高一级的学校继续学习，那么就可以选择使用本书做为升学考试前的复习与提高用书。

由于不同专业所学习的数学内容不完全相同，各省市的考试范围不完全相同，所以我们尽量写得全面一些，供大家选择使用。

本书在复习与提高两方面，给予学生以高水平的指导。

复习部分在于巩固所学数学知识，从而为提高成绩做好准备。提高部分则有针对性地教给学生有用的解题方法和技巧。解题能力其实是数学知识理解与掌握好坏的试金石，本书力图通过具体的数学题的详细解答过程，引导学生逐步掌握最基本的方法，深刻地理解和洞悉数学知识内容，从而，不管题型的千变万化，都能迎刃而解。

在基本内容复习完成之后，我们给出了综合题解析和模拟试题。为满足基础比较好的学生的要求，我们编写了典型错误分析。

本书定位是：于复习中提高成绩，从容应对考试，顺利升入更高一级的学校。

本书供中等职业学校有志升入更高一级学校的学生使用。入学新生甚至可以直接把本书做为教材学习使用。本书浅显易学，还特别适合技校学生。

本书配有光盘一张，内容为书中练习题的详细解答，是用动画效果来展示做题步骤，从而更加符合学生年龄特点。建议学生自己先做练习题，并对照每章后的答案，然后再看光盘内容。

本书与其他数学书的不同之处在于：在书中我们介绍了一种与众不同的教学法——多头并进横线条教学法。这种方法的特点是：课时少，效果好。为使老师们用“多头并进横线条教学法”完成本书的教学内容，我们编写了《部分课时内容安排表》(60课时中的前10课时)，供老师们参考。

参加本书编写的有：

同济大学潘碚、邱嘉杰、邬建华，上海市虹口区教师进修学院李景祥，上海市钟山高级中学任威震、孙敏、王晨曦，上海市公用事业学校高孝乃，上海市海南中学沈英姿。潘碚任主编，邱嘉杰、李景祥任副主编。

参加本书审稿的有：

同济大学孙琪，上海市北郊高级中学张林森，上海市复兴高级中学葛伟，上海市虹口高级中学詹明全，上海市唐山中学鞠中华。孙琪任主审。

由于作者的水平有限，编写时间较紧，书中出现不妥之处在所难免，欢迎广大教师提出宝贵的意见，我们一定诚恳接受，并在今后加以改进。

作　者

2007年5月

目 录

第1章

集　合

1.1　集合

一、集合的意义

在人们现实生活和数学中，常常需要把一些对象放在一起，作为一个整体加以研究.例如：

(1) 某校钳工专业的全体学生；

(2) 所有的直角三角形；

(3) 不等式 $3x+5>2$ 解的全体；

(4) 某工厂金工车间的所有机床；

(5) 所有的自然数；

(6) 方程 $x^2-1=0$ 的所有实数根；

(7) 一个正方形 $ABCD$ 内部的点的全体；

(8) 抛物线 $y=x^2$ 上所有的点.

像这样把某些能确切指定的对象看作一个整体，这个整体叫做一个集合，简称集. 集合中的各个对象叫做这个集合的元素.

习惯上，集合常用大写的英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，集合中的元素用小写的英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

二、元素的特性

对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的. 任何一个对象，或者是这个给定集合的元素，或者不是它的元素.

对于一个给定的集合，集合中的元素是各不相同的，集合中的任何两个元素都是不同的对象，因此集合中的元素不重复出现，而且元素之间没有先后顺序.

所以元素具有三大性质：确定性，互异性，无序性.

三、集合的分类

含有有限个元素的集合叫做有限集，含有无限个元素的集合叫做无限集.

例如，上面的例子中，(1)，(4)，(6) 为有限集，而 (2)，(3)，(5)，(7)，(8) 为无限集.

四、集合与元素之间的从属关系

如果 a 是集合 A 的元素，就记作“$a\in A$”，读作“a 属于 A”；如果 a 不是集合 A 的元素，就记作“$a\notin A$”，读作“a 不属于 A”.

例如，设有由 1，3，5，7，9 组成的集合 A，那么 $3\in A$，$2\notin A$.

五、常见数集的特定符号

由数组成的集合叫做数集．一些常见的数集通常用特定的大写英文字母表示.

全体自然数的集合，即自然数集，记作 $\mathbf{N}$；不包括零的自然数组成的集合，记作 $\mathbf{N}^*$；

全体整数组成的集合，即整数集，记作 $\mathbf{Z}$；

全体有理数组成的集合，即有理数集，记作 $\mathbf{Q}$；

全体实数组成的集合，即实数集，记作 $\mathbf{R}$.

我们把正整数集、负整数集、正有理数集、负有理数集、正实数集、负实数集分别表示为 $\mathbf{Z}^+$、$\mathbf{Z}^-$、$\mathbf{Q}^+$、$\mathbf{Q}^-$、$\mathbf{R}^+$、$\mathbf{R}^-$.

六、空集的意义

由于实际的需要，我们引入空集的概念．空集不含任何元素，记作$\varnothing$．例如方程 $x^2+1=0$ 的实数解所组成的集合是空集．又如，两个相离的圆，它们的公共点所组成的集合也是空集.

[**例 1**]　用符号$\in$、$\notin$填空：

(1) 0 ____ $\mathbf{N}^*$；　　(2) 0 ____ $\varnothing$；　　(3) $-\frac{1}{2}$ ____ $\mathbf{R}^-$；

(4) $\sqrt{3}$ ____ $\mathbf{Q}^+$；　　(5) -1 ____ $\mathbf{Z}^-$；　　(6) π ____ $\mathbf{Q}$.

解　(1) $0\ \underline{\ \notin\ }\ \mathbf{N}^*$；　　(2) $0\ \underline{\ \notin\ }\ \varnothing$；　　(3) $-\frac{1}{2}\ \underline{\ \in\ }\ \mathbf{R}^-$；

(4) $\sqrt{3}\ \underline{\ \notin\ }\ \mathbf{Q}^+$；　　(5) $-1\ \underline{\ \in\ }\ \mathbf{Z}^-$；　　(6) $\pi\ \underline{\ \notin\ }\ \mathbf{Q}$.

七、集合的表示方法

1. 集合的表示方法常用的有列举法和描述法.

2. 将集合中的元素一一列举出来(在列举时每个元素仅写一次，不考虑元素的顺序)，并且写在大括号内，这种表示集合的方法叫做列举法.

例如，方程 $x^2-6x+8=0$ 的解的集合，可以表示为$\{2,4\}$，也可表示为$\{4,2\}$；又如方程组$\begin{cases}x+y=6\\x-y=2\end{cases}$的解组成的集合可以表示为$\{(4,2)\}$.

3. 在大括号内先写出这个集合的元素的一般形式，再画一条竖线，在竖线后面写上集合元素所共同具有的特性，即 $A=\{x\mid x$ 满足性质 $p\}$，这种表示集合的方法叫做描述法.

例如，方程 $x^2-6x+8=0$ 的解集，可以表示为 $\{x \mid x^2-6x+8=0\}$；又如直线 $y=-x+1$ 上的点组成的集合，可表示为 $\{(x,y) \mid y=-x+1\}$.

［**例 2**］ 用适当的方法表示下列集合：

（1）大于 0 且不超过 10 的全体偶数组成的集合 A；

（2）被 3 除余 1 的自然数的全体组成的集合 B；

（3）不等式 $3x+5>2$ 解的全体组成的集合 C；

（4）抛物线 $y=x^2$ 上所有的点组成的集合 D.

解 （1）用列举法：$A=\{2,4,6,8,10\}$；

（2）用描述法：$B=\{x \mid x=3k+1, k\in \mathbf{N}\}$；

（3）用描述法：$C=\{x \mid 3x+5>2\}$ 或 $C=\{x \mid x>-1\}$；

（4）用描述法：$D=\{(x,y) \mid y=x^2\}$.

八、子集

1. 考察下面两个集合：

A 是某校电子商务班全体女生组成的集合；

B 是某校电子商务班全体学生组成的集合.

显然，集合 A 中任何元素都属于集合 B. 集合之间的这种关系，我们经常会遇到.

对于两个集合 A 和 B，如果集合 A 的任何一个元素都属于集合 B(即如果 $a\in A$,那么 $a\in B$)，那么就把集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)，读作“A 包含于 B”（或“B 包含 A”).

例如，集合 $\{1,2,3\}$ 中的任何一个元素都是集合 $\{1,2,3,4\}$ 中的元素，因此 $\{1,2,3\}$ 是 $\{1,2,3,4\}$ 的子集，可记作 $\{1,2,3\}\subseteq\{1,2,3,4\}$ 或 $\{1,2,3,4\}\supseteq\{1,2,3\}$.

2. 对于一个非空集合 B，因为它的任何一个元素都是集合 B 的元素，所以 $B\subseteq B$. 也就是说，任何一个集合是它本身的子集.

3. 由于空集是不含任何元素的集合，所以我们规定，空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq B$.

用平面区域来表示集合之间关系的方法叫做集合的图示法，所用图叫做文氏(Venn)图，图 1.1 是 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)的文氏图.

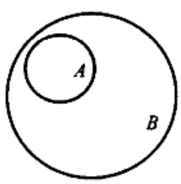


图 1.1

九、集合的相等

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，并且 $B\subseteq A$，那么称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$. 例如，集合 $\{x \mid x^2-6x+8=0\}$ 与集合 $\{2,4\}$ 可记为 $\{x \mid x^2-6x+8=0\}=\{2,4\}$.

十、真子集

在前面的例子中已经知道，$\{1,2,3\}\subseteq\{1,2,3,4\}$，而 $\{1,2,3,4\}$ 中的元素 4 不属于 $\{1,2,3\}$. 这又是一种集合之间的关系.

对于两个集合 A、B，如果 $A\subseteq B$，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$)，读作“A 真包含于 B”（或“B 真包含 A”).

对于数集 $\mathbf{N}^*$、$\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$ 来说，有 $\mathbf{N}^* \subsetneqq \mathbf{N} \subsetneqq \mathbf{Z} \subsetneqq \mathbf{Q} \subsetneqq \mathbf{R}$.

[例 3] 写出集合 $\{0,1,2\}$ 的所有子集，并指出哪些是真子集.

解 集合 $\{0,1,2\}$ 的所有子集是：

$\varnothing$，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0,1\}$，$\{1,2\}$，$\{0,2\}$，$\{0,1,2\}$. 其中除 $\{0,1,2\}$ 外，其余都是真子集.

[例 4] 设集合 $A=\{x \mid 3x-6>x+2\}$，集合 $B=\{x \mid 2x+5<4x-2\}$，判断两个集合的包含关系.

解 $\because A=\{x \mid x>4\}$，$B=\left\{x \mid x>\frac{7}{2}\right\}$，　　$\therefore A \subsetneqq B$.

练 习 1.1

1. 用适当的符号填空：

(1) 1 ____ $\mathbf{N}$；	(2) 0 ____ $\varnothing$；	(3) -0.75 ____ $\mathbf{Q}$；
(4) $\sqrt{5}$ ____ $\mathbf{R}$；	(5) -1 ____ $\mathbf{Z}^-$	(6) π ____ $\mathbf{Q}^+$；
(7) a ____ $\{a,b\}$；	(8) $\{a\}$ ____ $\{a,b\}$；	(9) $\{a,b,c\}$ ____ $\{b,c,a\}$；
(10) $\{0\}$ ____ $\varnothing$；	(11) $\mathbf{Q}^+$ ____ $\mathbf{R}^+$；	(12) d ____ $\{a,c,b\}$

2. 用适当的方法表示下列集合：

(1) 不等式 $x^2-6x+8>0$ 的所有解；

(2) 所有正奇数；

(3) 小于 10 的所有正整数的平方数；

(4) 所有 3 的倍数；

(5) 直线 $y=2x+3$ 上所有的点；

(6) 自然数中小于 20 的全体质数.

3. 写出集合 $\{a,b,c\}$ 的所有子集，并指出哪些是真子集.

4. 设 $A=\{1,3,5,7,9\}$，写出集合 A 中符合下列条件的所有子集：

(1) 元素都能被 2 整除；

(2) 元素都能被 3 整除；

(3) 元素都是质数.

5. 比较下列各题中两个集合，判断它们是否相等：

(1) $A=\{x \mid x=3k, k\in \mathbf{N}, k<6\}$，$B=\{3,6,9,12,15\}$；

(2) $A=\{x \mid 5x-6>3x+2\}$，集合 $B=\{x \mid 2x+5<3x+1\}$.

6. 判断下列各组的集合 M 与 N 的包含关系：

(1) $M=\{$正偶数$\}$，$N=\{$4 的倍数中的正数$\}$；

(2) $M=\{x \mid 7x-1=3x-9\}$，$N=\{x \mid x^2-3x-10=0\}$.

1.2　集合的运算

一、交集的意义

考察下面集合的元素：

$$A=\{x \mid x \text{ 为 } 10 \text{ 的正约数}\},$$
$$B=\{x \mid x \text{ 为 } 15 \text{ 的正约数}\},$$
$$C=\{x \mid x \text{ 为 } 10 \text{ 与 } 15 \text{ 的正公约数}\}.$$

若将它们分别用列举法表示，则有

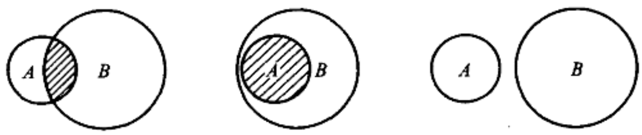
$$A=\{1,2,5,10\},B=\{1,3,5,15\},C=\{1,5\}.$$

可以看到，集合 C 的元素恰是集合 A 与 B 的所有公共元素.

二、交集的定义

设 A 和 B 是两个集合，把属于 A 且属于 B 的所有元素所组成的集合叫做集合 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，读作“A 交 B”，即 $A\cap B=\{x \mid x\in A, \text{且 } x\in B\}$.

$A\cap B$ 可以用图 1.2 中的阴影部分来表示.



$A\cap B=\{x|x\in A，\text{且}x\in B\}$　　$A\cap B=A$　　$A\cap B=\varnothing$

图 1.2

[例 1]　设 $A=\{x \mid x>-2\}$，$B=\{x \mid x<1\}$，求 $A\cap B$.

解　$A\cap B=\{x \mid x>-2\}\cap\{x \mid x<1\}=\{x \mid x>-2 \text{ 且 } x<1\}$
$=\{x \mid -2<x<1\}$.

[例 2]　设 $A=\{12 \text{ 的正约数}\}$，$B=\{18 \text{ 的正约数}\}$，$C=\{\text{不大于} 5 \text{ 的正整数}\}$，求：$(A\cap B)\cap C$；$A\cap(B\cap C)$.

解　$\because$　$A=\{1,2,3,4,6,12\}$，
$B=\{1,2,3,6,9,18\}$，
$C=\{1,2,3,4,5\}$，

$\therefore$　$(A\cap B)\cap C=\{1,2,3,6\}\cap\{1,2,3,4,5\}=\{1,2,3\}$；
$A\cap(B\cap C)=\{1,2,3,4,6,12\}\cap\{1,2,3\}=\{1,2,3\}$.

[例 3]　设 A、B 两个集合分别为 $A=\{(x,y) \mid 2x+y=10\}$，$B=\{(x,y) \mid 3x-y=5\}$，求 $A\cap B$，并且说明它的意义.

解　$A\cap B=\{(x,y) \mid 2x+y=10 \text{ 且 } 3x-y=5\}=\{(3,4)\}$.

$A\cap B$ 表示方程组 $\begin{cases}2x+y=10\\3x-y=5\end{cases}$ 的解的集合，也可以理解为两个一次函数图像的交点坐标的集合.

三、交集的性质

(1) $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$；

(2) $A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；

(3) 交换律：$A\cap B=B\cap A$；

(4) 结合律：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$.

四、并集的意义

考察下面集合的元素：

$$A=\{a,b,c,d,e\},$$
$$B=\{c,b,d,f\},$$
$$C=\{a,b,c,d,e,f\}.$$

可以看到，集合 C 的元素是把 A 和 B 两个集合的所有元素合并在一起（相同元素只取一个）而组成的.

五、并集的定义

所有属于集合 A 或者属于集合 B 的元素组成的集合叫做集合 A、B 的并集，记作 $A\cup B$，读作"A 并 B"，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A,或 x\in B\}$.

$A\cup B$ 可以用图 1.3 中的阴影部分来表示.

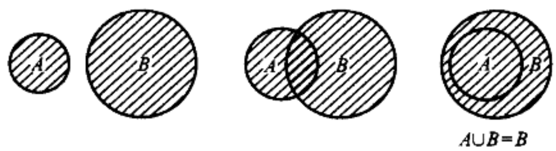


图 1.3

[例 4] 设 $A=\{x\mid(x+1)(x-3)=0\}$，$B=\{x\mid x^2-1=0\}$，求 $A\cup B$.

解 $\because$ $A=\{x\mid(x+1)(x-3)=0\}=\{-1,3\}$，$B=\{x\mid x^2-1=0\}=\{-1,1\}$，

$\therefore$ $A\cup B=\{-1,3\}\cup\{-1,1\}=\{-1,1,3\}$.

[例 5] 设 $A=\{2,5\}$，$B=\{-2,0,5\}$，$C=\{-1,0,2\}$，求：$(A\cup B)\cup C$；$A\cup(B\cup C)$.

解 $\because A\cup B=\{2,5\}\cup\{-2,0,5\}=\{-2,0,2,5\}$，

$B\cup C=\{-2,0,5\}\cup\{-1,0,2\}=\{-2,-1,0,2,5\}$，

$\therefore$ $(A\cup B)\cup C=\{-2,0,2,5\}\cup\{-1,0,2\}$

$=\{-2,-1,0,2,5\}$；

$A\cup(B\cup C)=\{2,5\}\cup\{-2,-1,0,2,5\}$

$=\{-2,-1,0,2,5\}$.

[例 6] 设 $A=\{1,2,4,5,9\}$，$B=\{3,6,7,8,10\}$，$C=\{3,5,7\}$，求：$A\cup(B\cap C)$；$(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

解 $\because$ $B\cap C=\{3,6,7,8,10\}\cap\{3,5,7\}=\{3,7\}$，

$A\cup B=\{1,2,4,5,9\}\cup\{3,6,7,8,10\}$

$=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，

$A\cup C=\{1,2,4,5,9\}\cup\{3,5,7\}$

$=\{1,2,3,4,5,7,9\}$，

$\therefore\quad A\cup(B\cap C)=\{1,2,4,5,9\}\cup\{3,7\}$

$=\{1,2,3,4,5,7,9\}$；

$(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}\cap\{1,2,3,4,5,7,9\}$

$=\{1,2,3,4,5,7,9\}$.

六、并集的性质

（1）$A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$；

（2）$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$；

（3）交换律：$A\cup B=B\cup A$；

（4）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$；

（5）分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

七、全集和补集的意义

我们在研究一些数集时常常在某个给定的集合里进行讨论. 例如，方程 $x^2-2=0$ 的解集在实数集 $\mathbf{R}$ 里是 $\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$，显然，$\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ 是 $\mathbf{R}$ 的子集. 对于这样的集合，给出下面的定义：

在研究某些集合时，这些集合常常都是一个给定集合的子集，这个给定的集合叫做全集，记作 U. 也就是说，全集包含了我们此时所研究的集合的全部元素.

设集合 A 是全集 U 的子集，则根据全集的定义可知 $A\cap U=A$ 和 $A\cup U=U$.

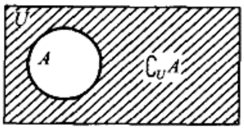


图 1.4

在图 1.4 中，长方形表示全集 U，圆表示它的子集 A. 对于长方形中的阴影部分，给出下面的定义：

设 U 为全集，A 是 U 的子集，则由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫做集合 A 在全集 U 中的补集，记作 $\complement_U A$，读作“A 补”，即 $\complement_U A=\{x\mid x\in U,x\notin A\}$.

八、补集的性质

（1）$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$，$A\cup(\complement_U A)=U$；

（2）$\complement_U\varnothing=U$，$\complement_U U=\varnothing$；

（3）$\complement_U(\complement_U A)=A$.

［例 7］ 设 $I=\{x\mid -3<x\leqslant 4\}$，$A=\{x\mid -1<x<1\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$，$C=\{x\mid -2\leqslant x<0\}$，求 $\complement_I C$；$A\cap B$；$\complement_I A\cup(\complement_I B\cap C)$.

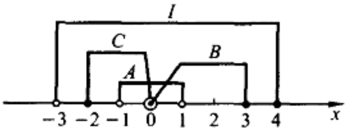


图 1.5

分析 可将以上各集合在数轴上表示出来，如图 1.5，再利用图形得出结论.

解 $\complement_I C=\{x\mid -3<x<-2$ 或 $0\leqslant x\leqslant 4\}$；

$A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x<1\}$；

$\complement_I A\cup(\complement_I B\cap C)=\{x\mid -3<x\leqslant -1$ 或 $1\leqslant x\leqslant 4\}\cup\{x\mid -2\leqslant x<0\}$

$=\{x\mid -3<x<0$ 或 $1\leqslant x\leqslant 4\}$.

九、反演律

[例 8] 设 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，求证：$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$；$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$.

证 $\because$ $A\cap B=\varnothing$，$\therefore$ $\complement_U(A\cap B)=U$.

又$\because$ $\complement_U A\cup\complement_U B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}=U$，

$\therefore$ $\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$；

$\because$ $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，

$\therefore$ $\complement_U(A\cup B)=\{7,8,9,10\}$，

又$\because$ $\complement_U A\cap\complement_U B=\{2,4,6,7,8,9,10\}\cap\{1,3,5,7,8,9,10\}$

$=\{7,8,9,10\}$，

$\therefore$ $\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$.

上例所证的两个等式对于任意给定的集合 A 和 B 也是成立的. 即

(1) $\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$；

(2) $\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$.

上述等式(1)和(2)是集合三种运算之间的重要联系，它们叫做德·摩根(De Morgan)公式，也称反演律，等式(1)可简称为“交的补等于补的并”；等式 2 可简称为“并的补等于补的交”.

练 习 1.2

1. 已知两个集合 A 与 B，求 $A\cap B$：

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{4,5,6,7\}$；

(2) $A=\{$有理数$\}$，$B=\{$无理数$\}$；

(3) $A=\{x\mid x+1>0\}$，$B=\{x\mid x-1<3\}$.

2. 已知两个集合 A 与 B，求 $A\cup B$：

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{4,5,6,7\}$；

(2) $A=\{$正整数$\}$，$B=\{$正分数$\}$；

(3) $A=\{x\mid x<-2\}$，$B=\{x\mid x>3\}$.

3. 设 $A=\{x\mid x+2=x^2\}$，$B=\{x\mid \sqrt{x+2}=x\}$，求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$.

4. 集合 $A=\{x\mid -2<x\leqslant 1\}$，当全集 U 分别取下列集合时，求出$\complement_U A$.

(1) $U=\mathbf{R}$；　　(2) $U=\{x\mid x\leqslant 3\}$；　　(3) $U=\{x\mid -5\leqslant x\leqslant 1\}$.

5. 设全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|a+1|,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，求 a 的值.

6. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$\complement_U A\cap B=\{3,7\}$，$A\cap\complement_U B=\{2,8\}$，$\complement_U A\cup\complement_U B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，求集合 A、B.

1.3 命题与充要条件

一、命题的意义及分类

在初中，我们已经知道，可以判断真假的语句叫做命题. 命题通常用陈述句表示. 正确的

命题叫做真命题，错误的命题叫做假命题.

［**例1**］ 下列语句哪些不是命题，哪些是命题？如果是命题，那么它们是真命题还是假命题？

（1）个位数是5的自然数能被5整除；

（2）凡直角三角形都相似；

（3）过马路请走横道线；

（4）互为补角的两个角不相等；

（5）如果两个三角形的三组边对应相等，那么两个三角形全等；

（6）你是物流班的学生吗？

解 例(3)、(6)不是命题，例(1)、(2)、(4)、(5)是命题，其中例(1)、(5)是真命题，例(2)、(4)是假命题.

二、命题与推出关系

一般地，如果命题 α 成立可以推出命题 β 也成立，那么就说由 α 可以推出 β，并用记号 $\alpha\Rightarrow\beta$ 表示，读作“α 推出 β”. 换言之，$\alpha\Rightarrow\beta$ 表示以 α 为条件、β 为结论的命题是真命题.

如果命题 α 成立不能推出 β 成立，可记作 $\alpha\nRightarrow\beta$. 换言之 $\alpha\nRightarrow\beta$ 表示以 α 为条件、β 为结论的命题是假命题.

如果 $\alpha\Rightarrow\beta$，并且 $\beta\Rightarrow\alpha$，那么记作 $\alpha\Leftrightarrow\beta$，叫做 α 与 β 等价.

推出关系满足传递性：如果 $\alpha\Rightarrow\beta$，$\beta\Rightarrow\gamma$，那么 $\alpha\Rightarrow\gamma$.

［**例2**］ 在下列各题中，用符号“$\Rightarrow$”“$\Leftarrow$”“$\Leftrightarrow$”把 α、β 这两件事联系起来：

（1）α：实数 x 适合 $x^2=9$，β：$x=3$ 或 $x=-3$；

（2）α：实数 x 适合 $x^2-8x-9=0$，β：$x=9$；

（3）α：k 是能被4整除的自然数，β：k 是偶数；

解 （1）$\alpha\Leftrightarrow\beta$；　（2）$\alpha\Leftarrow\beta$；　（3）$\alpha\Rightarrow\beta$.

三、原命题、逆命题与否命题

例如，平面几何中的命题“对顶角相等”. 它的条件是“有两个角是对顶角”，它的结论是“这两个角相等”. 只要把命题的条件与结论互相交换，就得到它的逆命题“相等的两个角是对顶角”. 一般称这两个命题是互逆命题.

一个数学命题用条件 α，结论 β 表示就是“如果 α，那么 β”. 如果把结论和条件互相交换，就得到一个新命题：“如果 β，那么 α”. 我们把这个命题叫做原命题的逆命题. 显然它们互为逆命题.

例如，如果把命题“对顶角相等”的条件与结论分别改为它的否定形式“两个角不是对顶角”与“这两个角不相等”. 于是得到一个新命题“不是对顶角的两个角不相等”. 一般称这两个命题是互否命题.

一个命题的条件 α 与结论 β 分别是另一个命题的条件的否定 $\overline{\alpha}$ 与结论的否定 β. 我们把这样的两个命题叫做互为否命题. 即“如果 $\overline{\alpha}$，那么 $\overline{\beta}$.”如果把其中一个叫做原命题，那么另一个就叫做它的否命题.

四、逆否命题及四种命题形式

例如，如果把命题“对顶角相等”的条件与结论互相交换，并分别改为它的否定形式“两个角不相等”与“这两个角不是对顶角”．于是得到一个新命题“不相等的两个角不是对顶角”．一般称这两个命题是互逆否命题．

一个命题的条件 α 与结论 β 分别是另一个命题的结论的否定 $\overline{\beta}$ 和条件的否定 $\overline{\alpha}$，我们把这样的两个命题叫做互为逆否命题．如果把其中一个叫做原命题，那么另一个就叫做它的逆否命题．

如果用 α 和 β 分别表示原命题的条件和结论，用 $\overline{\alpha}$ 和 $\overline{\beta}$ 分别表示 α 和 β 的否定，那么四种命题的形式就是：

原命题：如果 α，那么 β；分别表示原命题的条件和结论．

逆命题：如果 β，那么 α；分别表示原命题的结论和条件．

否命题：如果 $\overline{\alpha}$，那么 $\overline{\beta}$．

逆否命题：如果 $\overline{\beta}$，那么 $\overline{\alpha}$．

[例 3] 试写出“全等的两个三角形面积相等”的逆命题、否命题和逆否命题，并判断其真假．

解 原命题：如果两个三角形全等，那么它们的面积相等．这是真命题．

逆命题：如果两个三角形的面积相等，那么这两个三角形全等．这是假命题．

否命题：如果两个三角形不全等，那么它们的面积不相等．这是假命题．

逆否命题：如果两个三角形的面积不相等，那么这两个三角形不全等．这是真命题．

五、等价命题

在例 3 中我们发现，原命题与它的逆命题不一定同时为真命题，而原命题与它的逆否命题同时为真命题．

如果甲、乙是两个命题，从命题甲可以推出命题乙；从命题乙可以推出命题甲，那么这样的甲、乙两个命题叫做等价命题．

一般地，原命题和它的逆否命题同真同假．如果两个命题互为逆否命题，那么这两个命题是等价命题．

[例 4] 如图 1.6 所示，已知：BD、CE 分别是 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$、$\angle C$ 的角平分线，$BD \neq CE$，求证：$AB \neq AC$．

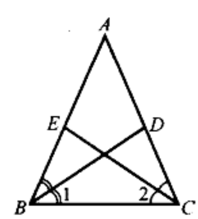


图 1.6

证 原命题的逆否命题：已知 BD、CE 分别是 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$、$\angle C$ 的角平分线，如果 $AB = AC$，那么 $BD = CE$．

$\because$ $AB = AC$，$\therefore$ $\angle ABC = \angle ACB$．

$\because$ BD、CE 分别是 $\triangle ABC$ 的 $\angle ABC$、$\angle ACB$ 的角平分线，

$\therefore$ $\angle DBC = \angle ECB$．

又 $\angle ACB = \angle ABC$ 且 $BC = CB$，

$\therefore$ $\triangle BCD \cong \triangle CBE$，$\therefore$ $BD = CE$．

$\because$ 原命题的逆否命题正确，

$\therefore$ 原命题正确．