21世纪高职高专教材

GAODENG SHUXUE

主编 曹玉平 骆汝九

高等数学

学习指导

苏州大学出版社

21 世纪高职高专教材

高等数学学习指导

主编　曹玉平　骆汝九

苏 州 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/曹玉平，骆汝九主编. —苏州：苏州大学出版社，2007. 9
21 世纪高职高专教材
ISBN 978-7-81090-961-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①曹…②骆… Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 143004 号

高等数学学习指导
曹玉平　骆汝九　主编
责任编辑　谢金海

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市干将东路 200 号　邮编：215021)
宜兴文化印刷厂印装
(地址：宜兴市南漕镇　邮编：214217)

开本 787mm×960mm　1/16　印张 17.5　字数 295 千
2007 年 9 月第 1 版　2007 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-81090-961-7　定价：23.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话：0512-67258835

前　言

高等数学是高等教育中一门重要的基础课。为适应新形势下高职高专“高等数学”的教学要求，我们编写了这本高等数学学习指导书。

本书努力体现高职高专的教学规律及特色，是高职高专“高等数学”课程的辅助性读物。本书按我们编写出版的《高等数学》一书的体系分章讨论，每章均由“史料阅读”、“教学要求”、“内容概述和相关知识”、“典型考题类型与例题”、“复习题”五部分组成。

借助于我们在高职高专高等数学课程长期的教学过程中所积累的教学经验和体会，本书力求对该课程学习中的重点、难点问题，深入浅出地从高职高专的实际出发给予论述和解惑。本书主要用于满足学习高等数学读者的学习和复习要求，培养良好的思维习惯，提高分析问题、解决问题的能力，也可供相关教师教学时参考。

参加本书编写的有育玉平、骆汝九、夏绍云、顾明珠、杨俊林、张文军、程艳莉、李天林、张新娟等，全书由曹玉平负责统稿、定稿。

由于编者水平所限，书中不足和错谬之处在所难免，敬请专家、同行及广大读者不吝赐教。

编　者

2007 年 8 月

目录 Contents

第一章
函数的极限与连续

一、史料阅读

微积分产生的历史背景

微积分的诞生，来源于试图计算曲线所包围的平面图形的面积以及曲面所包围的立体的体积. 为此，古代数学家创造了不少计算方法，如刘徽的割圆术、阿基米德和欧多克斯的穷竭法，都已孕育了微积分的思想. 但由于当时生产水平和科学水平的限制，微积分思想的萌芽并未能得到发展.

15—16 世纪欧洲封建制度逐渐解体，资本主义生产方式慢慢形成. 16 世纪末荷兰首先完成资产阶级革命. 到了 17 世纪 40—80 年代英国资产阶级革命也相继完成. 资本主义的发展不仅使各国工业、农业生产上升，也使科学从神学的长期束缚下获得解放而开始大踏步前进，出现了人类历史上第一次科学革命.

生产和技术的发展向自然科学提出了许多新的课题. 例如航海事业的发展，需要精确测定地球的经纬度，制造精密的时钟，掌握天体运行的规律；采矿业的兴起，需要解决地下排水和通风问题，需要改进冶炼的熔炉；在军事技术方面，火炮内部各种应力问题，弹道问题（空气阻力、弹着点、瞄准方法）等一系列力学问题也亟待解决；在天文学方面，对天体运行规律（如开普勒行星运行三大定律）的研究，也需要新的数学方法. 正是这种情况下，自然科学以神奇的速度发展起来，特别是以力学为中心的实验科学兴起. 经过伽利略、开普勒、牛顿等大批科学家在近百年间不懈努力，终于形成了经典力学的理论体系. 自然科学特别是力学和天文学的发展，带动了数学，促进了微积分的创立. 正如恩格斯所说：这时候占首要地位的必然是最基本的自然科学，即关于地球上物体的和天体的力学，和它靠近并且为它服务的，是数学方法的发现和完善化.

力学需要方便而可靠的运算，但传统的欧氏几何学和 16 世纪的代数学已无法满足这种需要. 这就迫使数学开始从希腊集合脱身而逐渐代数化. 在 17 世纪

初期,数学已引入了无理数、负数、虚数等概念,建立起符号代数学,还广泛地讨论了变量、无穷大和无穷小以及其他有关的课题,研究了函数及其连续等问题.笛卡儿解析几何学的出现,更使数学面貌焕新一新,这一切从数学自身为微积分的产生和发展奠定了基础.

文艺复兴运动以后,欧洲的科学家们逐渐注意到数学在自然科学研究上的重要性.笛卡儿和伽利略俩人针对科学活动的基本性质进行了革新,他们选定科学应该使用的概念,重新规定科学活动的目标,改变科学中的方法论.这样努力的结果,不仅使科学得到出乎意料和史无前例的力量,而且把科学和数学紧密地结合起来.在古希腊时代的科学中,哲学和逻辑以及数学的严格性占有统治地位,几乎没有为直观推断论证留下余地.数学家们的原始思想及其所提供的证明之间,往往并无什么必然的联系.这种证明方法虽然无懈可击,但由于不能揭示真正的内在联系,要获得新的发现就很困难.这对富有独创性的数学家进一步的发展是不利的.17 世纪数学发展的巨大进步,在很大程度上是由于抛弃希腊人的严格证明方法,忽视数学的严格性,而重视利用直观推断论证的方法.伽利略首先提出了实验数学的方法.这是一种使理论和实践相结合并用实践来检验理论真假的方法,其具体方法可归结为:

(1) 在所要研究的现象中,选择出若干个可以用数量表示出来的特点;

(2) 提出一个假说,它包含所观察各量之间的数学关系式;

(3) 从这个假说推出某些能够实际验证的结果;

(4) 进行实验,观测—改变条件—再观测,并把观测结果尽可能地用数值表示出来;

(5) 以实验结果肯定或否定所提的假说;

(6) 以肯定的假说为起点,提出新假说,再度使新假说接受检验.

数学家采用直观推断论证的方法,大胆地开辟新的道路,大大超过了前人做过所有工作,创造了一个英雄时代.

随着资本主义萌芽而诞生,伴随着资本主义发展而发展的近代大学教育,对于微积分和近代数学的发展起着巨大作用.英国有七所著名的大学,其代表是牛津大学和剑桥大学.人们常说牛津是政治家的摇篮,剑桥是科学家的摇篮.事实上两校都培养出很多杰出的科学家.14 世纪数学家布雷德沃丁(T. Bradwardine,1290—1349)在牛津创办了最早的数学系.16 世纪时牛津大学的两位数学家汤斯托尔(C. Tonstall,1474—1559)和雷科德(R. Recorde,1510—1558)在剑桥大学建立起当时世界上最强大的数学系.1661 年 19 岁的牛顿进入剑桥大学三一学院,数年后成为著名大科学家.对微积分创建作出了杰出贡献的数学家华

利斯和牛顿的老师巴罗也都是剑桥大学的毕业生.对微积分创建和发展作出过重要贡献的数学家也受过高等教育,如开普勒毕业于蒂宾根大学,卡瓦利就学于波伦那大学.

16—17 世纪,学会、学院(科学研究机关)相继建立,最早建立的是 1560 年于那不勒斯成立的"自然奥秘学院".1662 年英国"促进自然知识的皇家学会"成立.1663 年法国"皇家科学院"也创建.一些学术期刊如《学者杂志》、《哲学会报》等也相继创刊.这些学会与组织对数学的发展和学术交流都起过积根作用.

就在上述背景下,由于欧洲科学技术的飞速发展,生产力的提高和社会各方面的需求,也由于数学本身的发展,经过各国数学家不懈地努力和历史的积累,建立在函数和极限基础上的微积分理论便应运而生.

微积分的发明不仅是 17 世纪科学史的荣誉,而且也是自有人类科学以来最重大的事件之一.微积分的创建首先是为了解决 17 世纪主要科学问题.它主要提出了以下四类问题:

(1) 运动学问题　这时人们已经知道物体运动的距离 s 可以表示为时间 t 的函数 $s=f(t)$,现在要求解决物体在任一时刻的速度和加速度;反之,若物体运动的加速度为时间 t 的已知函数,要求解出物体的速度和距离.根据物理学原理,每一个运动物体在每一时刻必定有瞬时速度,若沿用过去求平均速度的方法求瞬时速度,必然会导致 $\frac{0}{0}$ 之类无法解释的矛盾.必须探求新方法.

(2) 曲线的切线问题　这个看来仅是纯数学问题的问题,其实也有实际背景.光学研究和透镜的设计,都必须知道光线入透镜的人射角,以便应用反射定律.入射角与法线有关,而法线是垂直于切线的.再者,运动物体在其轨道上运行时在任一点的运动方向也与曲线的切线相关.但是什么是切线,如何求切线,古希腊人的定义和方法均不适用,需要创造新方法.

(3) 函数的最大值与最小值问题　求炮弹发射时能够获得最大射程的发射角是 17 世纪初伽利略等人研究的重要课题之一.研究行星运动时,需求行星离开太阳的最远和最近的距离.这些问题都涉及到函数的最大值和最小值问题.

(4) 求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积以及物体的重心等问题.

这些微积分问题在 16—17 世纪初,被许多数学家研究探索过,他们做了大量工作.微积分的产生和发展经历一条漫长而又曲折的道路后,终于在牛顿和莱布尼茨手中得以完成.

二、教学要求

1. 教学基本要求

(1) 理解函数的概念.

(2) 了解分段函数、复合函数的概念.

(3) 能熟练列出简单函数的函数关系.

(4) 了解函数极限的描述性定义.

(5) 了解无穷小、无穷大的概念及其相互关系,会对无穷小进行比较.

(6) 知道夹逼定理和单调有界数列极限存在定理,会用两个重要极限求极限.

(7) 掌握极限的四则运算法则.

(8) 理解函数在一点连续的概念,会判断间断点的类型.

(9) 知道初等函数的连续性,知道闭区间上连续函数的性质(介值定理、最大值和最小值定理).

(10) 会求连续函数和分段函数的极限.

2. 教学时数建议

本章教学 12 课时左右.

3. 教学重点、难点

(1) 教学重点

函数、函数的极限与连续的概念、初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质、简单函数的极限运算.

(2) 教学难点

建立函数关系、函数的极限概念、分段函数与复合函数极限的计算.

三、内容概述和相关知识

(一) 函数的概念

定义 1 设 D,R 是给定的两个数集,f 是一个确定的对应关系,如果对于 D 中的每一个元素 x,通过 f 都有 R 内的惟一确定的一个元素 y 与之对应.那么这个关系 f 就叫做从 D 到 R 的函数关系,简称为函数,记作

$$f:D\to R \text{ 或 } f(x)=y.$$

按照函数 f 与 $x\in D$ 所对应的 $y\in R$ 叫做 f 在 x 处的函数值,记作 $y=f(x)$,并

称 D 为函数 f 的定义域，而 f 的函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

函数关系通常用 $y=f(x),x\in D$ 来表示，并称 y 是 x 的函数，其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量.

注 1　函数定义中最本质的是：① 对应法则. 对应法则用记号 f 表示，它不只用某一数学表达式，也可以用几个数学式子，甚至可以用一个图形或一张表格表示，关键是它确定了两个数集之间的对应规则. ② 定义域. 定义域分两种情况：在实际问题中，函数的定义域由问题的实际意义确定；对单纯由数学表达式定义的函数，其定义域是使函数的表达式有意义的一切实数所构成的数集.

注 2　两个函数相同(或恒等)当且仅当它们的对应法则和定义域都相同.

在定义域中的不同点集内由不同(段)的数学表达式所表示的函数称为分段函数.

如果函数的对应法则是由方程 $F(x,y)=0$ 给出，则称 y 为 x 的隐函数.

定义 2　设 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域的全部或一部分包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，则对 $u=\varphi(x)$ 的定义域内的某些 x，通过变量 u，变量 y 有确定的值与之对应，从而得到一个以 x 为自变量，以 y 为因变量的函数，称此函数是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为中间变量.

注　不是任何两个函数都能构成复合函数，关键是 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集是否非空.

关于复合函数要熟练掌握以下内容：求定义域；将若干个简单函数复合；将复合函数拆分成若干个简单函数. 这里说的简单函数是指基本初等函数与基本初等函数经过四则运算后得出的函数. 熟练掌握复合函数的拆分是今后正确运用求导公式的基础.

定义 3　设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数，其值域为 Z，如果对每个 $y\in Z$，都有惟一的对应值 $x\in D$ 满足 $y=f(x)$，则称 x 为定义在 Z 上以 y 为自变量的函数，记为

$$x=f^{-1}(y),y\in Z,$$

并称其为 $y=f(x)$ 的反函数.

如以 x 为自变量，则 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x),x\in Z$，且 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

注　严格单调增加(或减少)的函数有反函数. 有些函数在其定义域内不是单调函数，但它在其子区间上是单调的，这时可在其子区间上讨论它的反函数.

（二）函数的性质

1. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，任给 $x_1,x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，如果恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的；如果恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的. 单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数.

注 函数的单调性总是与某区间 I 相联系的，相应的区间 I 称为单调区间（单调增加区间或单调减少区间）. 若笼统地称某函数为单调函数，往往是指在其定义区间上是单调函数.

2. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称，如果对于定义域 D 中的任何 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对于定义域 D 中的任何 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

注 讨论一个函数奇偶性的前提是其定义域必须关于坐标原点对称. 奇函数的图形关于坐标原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

3. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果存在正数 M，使得对一切 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界；如果这样的 M 不存在，就称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上无界.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在常数 $T(T\neq 0)$，使得对于定义域 D 中的任何 x，$x\pm T$ 也在定义域 D 中，且恒有 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，满足上式的最小正常数 T 称为 $f(x)$ 的周期.

周期函数在每一个周期内的图形是相同的.

（三）基本初等函数

1. 幂函数

形如 $y=x^\mu$（μ 是常数）的函数称为幂函数. 它的定义域需根据 μ 的值而定. 但是不论 μ 取何值，在区间 $(0,+\infty)$ 上它总是有定义的且图形通过 $(1,1)$ 点.

对于常见的幂函数：$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\sqrt{x}$，$y=\dfrac{1}{x}$，应掌握它们的定义域、值域和单调性.

2. 指数函数

形如 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 的函数称为指数函数.它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(0,+\infty)$.当 $a>1$ 时,函数是单调增加的;当 $0<a<1$ 时,函数是单调减少的.指数函数的图形总在 x 轴上方,且过点 $(0,1)$.

3. 对数函数

指数函数 $y=a^x$ 的反函数记作 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$,称为对数函数,它的定义域为 $(0,+\infty)$,值域为 $(-\infty,+\infty)$.当 $a>1$ 时,对数函数 $y=\log_a x$ 是单调增加的;当 $0<a<1$ 时,对数函数 $y=\log_a x$ 是单调减少的.对数函数的图形位于 y 轴右方.

注 对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数,其定义域和值域互相对应,一个函数的定义域恰好是另一个函数的值域.

特别地,取 $a=\mathrm{e}$ 得自然对数 $y=\ln x$.

4. 三角函数

(1) 正弦函数

函数 $y=\sin x$ 称为正弦函数.它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[-1,1]$,且为有界函数、奇函数和以 2π 为周期的周期函数.

(2) 余弦函数

函数 $y=\cos x$ 称为余弦函数.它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[-1,1]$,且为有界函数、偶函数和以 2π 为周期的周期函数.

(3) 正切函数

函数 $y=\tan x$ 称为正切函数.它的定义域为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,值域为 $(-\infty,+\infty)$,它是奇函数,且是以 π 为周期的周期函数.

(4) 余切函数

函数 $y=\cot x$ 称为余切函数.它的定义域是 $(k\pi-\pi,k\pi)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,值域为 $(-\infty,+\infty)$,它是奇函数,且是以 π 为周期的周期函数.

(5) 正割函数

函数 $y=\sec x$ 称为正割函数.它是余弦函数的倒数,即 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$.它的定义域是 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.它是以 2π 为周期的周期函数,且是偶函数.

(6) 余割函数

函数 $y=\csc x$ 称为余割函数. 它是正弦函数的倒数,即 $\csc x=\frac{1}{\sin x}$. 它的定义域是$(k\pi-\pi,k\pi)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 它是以 2π 为周期的周期函数,且是奇函数.

5. 反三角函数

由于三角函数在它们的定义域内不是单调的,在通常情况下无法讨论其反函数. 通过限制它的定义域范围,使其成为单调的,这样得到的三角函数的反函数称为反三角函数.

(1) 反正弦函数

函数 $y=\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的反函数称为反正弦函数,记作 $y=\arcsin x$. 它的定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,是单调增函数、奇函数.

(2) 反余弦函数

函数 $y=\cos x, x\in[0,\pi]$的反函数称为反余弦函数,记作 $y=\arccos x$. 它的定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$,是单调减函数.

(3) 反正切函数

函数 $y=\tan x, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$的反函数称为反正切函数,记作 $y=\arctan x$. 它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,是单调增函数、奇函数.

(4) 反余切函数

$y=\cot x, x\in(0,\pi)$的反函数称为反余切函数,记作 $y=\operatorname{arccot} x$. 它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,\pi)$,是单调减函数.

上述五种函数统称为基本初等函数,是最常用、最基本的函数,它们的定义域、性质和图形(图形请参考教科书)应当牢记.

(四) 数列极限的概念

1. 数列

无穷多个数按一定顺序排列成 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$,称为数列,记为$\{x_n\}$. 其中 x_n 称为数列的通项或一般项,正整数 n 称为数列的下标.

2. 数列极限的定义

定义 4 已知数列$\{x_n\}$,当 $n\to\infty$时,若存在常数 A,使得 x_n 与 A 无限逼近,则称常数 A 为数列$\{x_n\}$当 $n\to\infty$时的极限,记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \text{ 或 } x_n \to A(\text{当 } n\to\infty \text{时}).$$

没有极限的数列称为发散数列.

(五) 数列极限的性质

1. 惟一性

定理 1　有极限的数列,其极限值必惟一.

2. 有界性

定理 2　收敛数列一定有界.反之不成立,即有界数列不一定收敛.

3. 夹逼定理

定理 3　若数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$满足不等式 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$,且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = A,$$

则$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

4. 单调有界数列极限存在定理

定理 4　若数列$\{y_n\}$单调有界,则它必有极限.

(六) 函数极限的概念

1. 函数在一点处极限的定义

定义 5　已知函数 $f(x)$在点 x_0 左右有定义,当 $x\to x_0$ 时,若存在常数 A,使得 $f(x)$与 A 无限逼近,则称常数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0 \text{ 时}).$$

2. 左、右极限及其与极限的关系

定义 6(左极限)　已知函数 $f(x)$在点 x_0 左侧邻域有定义,当 x 从左侧趋向于 x_0 时,若存在常数 A,使得 $f(x)$与 A 无限逼近,则称常数 A 为函数 $f(x)$在 x_0 处的左极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-) = A.$$

定义 7(右极限)　已知函数 $f(x)$在点 x_0 右侧邻域有定义,当 x 从右侧趋向于 x_0 时,若存在常数 A,使得 $f(x)$与 A 无限逼近,则称常数 A 为函数 $f(x)$在 x_0 处的右极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+) = A.$$

定理 5　函数极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在且等于 A 的充分必要条件是:左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在且等于 A,即有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$