

各向異性板

C. Г. 列赫尼茨基

科学出版社

各 向 異 性 板

C. Γ. 列赫尼茨基著

胡 海 昌 譯

科 學 出 版 社

1963

С. Г. ЛЕХНИЦКИЙ
АНИЗОТРОПНЫЕ ПЛАСТИНКИ
(ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ)
ГОСТЕХИЗДАТ
1957

內 容 簡 介

本书系统地叙述了各向异性板計算理論的近代研究, 包括: 1) 各向异性板的广义平面应力状态; 2) 各向异性板的弯曲; 3) 各向异性板的稳定性. 本书着重于实用, 对于純理論性的公式与結論, 直接引用而不作推演. 书中收集了有关重要实用問題的計算公式与图表.

本书适用于应用各向异性材料的工程技術人員和科学研究工作, 也可以作为大学或專門学校的教学参考书.

各 向 异 性 板

С. Г. 列赫尼茨基著
胡 海 昌 譯

*

科学出版社出版 (北京朝陽門大街 117 号)

北京市書刊出版业营业許可証出字第 061 号

北京市印刷一厂印刷 新华书店总經售

*

1963 年 10 月第 一 版

書号: 2831 字数: 393,000

1963 年 10 月第一次印刷

开本: 850×1168 1/32

(京) 0001—2, 150

印张: 14 15/16 插頁: 3

定价: 3.20 元

第一版序言摘录

在近代技术中，有用各向异性板作为结构的元件的，这种板抵抗力学作用的性能在不同的方向上是不相同的。属于这类板的有飞机用胶合板，叠合胶木，夹布胶木以及其他材料。对于这种材料（如胶合板）所作的实验研究指出，两个主方向——沿表板（胶合板的外层）的纤维方向和垂直纤维方向上的弹性模数与抗弯刚度大不相同。显然，根据各向同性体的公式来计算胶合板的强度是不正确的。然而为了计算必须根据各向异性体的弹性力学来推导专用的公式。可以当作各向异性板的，还有人工制造的不同方向的抗弯刚度不同的板——有波纹或受波纹加劲的板，受有分布得很密的肋杆加劲的板等等。各向异性板中应力与形变的计算，不但设计师会遇到，并且探讨切自晶体的薄板（例如石英板）的物理学家也会碰到。

本书作者给自己提出了一个任务，来写作这样一本书，其中包括尽可能广泛的有关各向异性板形变的近代研究。本书也许可以作为在各向异性板方面工作的工程师、设计师、物理学家以及其他研究各向异性板的专家的参考书。

在本书中反映了三个主题：1) 各向异性板的广义平面应力状态，2) 各向异性板的弯曲，3) 各向异性板的稳定性。书中论述的大部份解答（特别是关于平面问题的几章）是属于作者自己的。

所有论述的问题都只涉及到板的微小弹性形变。关于板的塑性形变问题、关于板在失去稳定后的性能问题、关于板的热应力与残余应力问题等等，在书中都没有提到。这些问题还有待于研究。作者所掌握的有关各向异性板的横向振动问题的资料，收集在专门的一章里。

注意到书的篇幅不大而包含的资料相当多，作者力求将论述写得尽可能地紧凑。主要注意力放在所述解答的实用方面；具有

純理論意义的公式与結論,大都不作推演而直接列出結果,但指出能找到詳尽論述和証明的文献.在有可能并对实用有益的情况下,則將結果推演到計算公式或图表的形式.

С. Г. 列赫尼茨基

1944 年 5 月

第二版序言

自从专著《各向异性板》的第一版(1947年)問世以后,各向异性板的形变与应力理論有了許多新的研究,这些研究的大部分(主要是在苏联完成的),特别是作者本人所作的研究,都是关于平面問題,小部份則是关于板的弯曲理論与稳定性問題。

在准备第二版时,著者力求在书中尽可能地反映所知的有关各向异性板的具有实际及理論意义的新結果。因此书的篇幅較第一版有所增加。补充了新的一章(第二版的第八章),这一章闡述了研究为近似圓形与橢圓形的空洞削弱的各向异性板中应力的近似解法。特別討論了空洞近乎帶有圓角頂的等边三角形和正方形以及其他图形的情况。給出了板承受任意力时,特别是拉力和弯矩时,在这些空洞附近的应力的近似公式;引录了在給定弹性常数的板中按不同精确度計算应力所得的結果。几乎其余各章都补充了几节,来叙述新的研究結果以及具有实际意义而未写入第一版中的若干結果。例如在致力于研究梁与曲杆弯曲的第三章中,給出了新的弯曲情况,特別是不均匀梁的弯曲;在第四章中包括了这样一类板的弹性平衡問題,它們所占的区域由抛物綫或双曲綫所界,以及关于无限介质在集中力矩作用下的应力分布問題;第六章的篇幅大为增加,其中补充了几节来叙述帶有由其他材料构成的核心的板的弹性平衡問題;在第十一章討論了具有圓形空洞的各向异性板的弯曲的新情况,等等。和这同时也增加了图的数量,其中有許多图被新图所代替。

所有新的与早已熟知的結果,作者都竭力用容易被工程师与設計师所理解的形式来叙述,在可能的地方,一直推演到計算公式,并且用对三层白樺木胶合板的計算与图表作为例子來說明。第一版中的許多节重新写过:改进了叙述,改正了已发现的錯誤,而在一系列情况下更动了材料的叙述次序。对于作者所研究的并

登載于第一版的全部特殊變形情況，都作了重新計算（也是對於三層白樺木膠合板）。結果相應的應力分布曲綫和某些函數的曲綫都用比第一版更為清楚的新的曲綫來代替。大大地擴充了所採用的文獻目錄。

最後謹向 T.B. 斯克沃尔卓娃致以深切的謝意，她完成了全部計算工作，在準備本專著的第二版時給予我很多幫助。

C. Г. 列赫尼茨基

1956 年 12 月

目 录

第一版序言摘要	vii
第二版序言	ix
第 一 章 各向异性体弹性力学的基本方程	1
§ 1. 連續体的应力状态	1
§ 2. 广义胡克定律	5
§ 3. 曲綫型各向异性	10
§ 4. 弹性力学的基本方程与基本問題	18
第 二 章 各向异性体弹性力学的平面問題	17
§ 5. 均匀板的广义平面应力状态	17
§ 6. 均匀体中的平面应变	21
§ 7. 应力函数的一般表达式	24
§ 8. 平面問題与复变函数理論的联系	28
§ 9. 在新坐标系中弹性常数的决定	34
§ 10. 轉移到新坐标系后复参数的重算	38
§ 11. 几种各向异性板的弹性常数	42
§ 12. 具有圓柱形各向异性的物体的平面問題	47
第 三 章 平面各向异性梁与曲杆的弯曲	52
§ 13. 最簡單的情况	52
§ 14. 承受橫力的悬臂梁的弯曲	54
§ 15. 承受均布載荷的梁的弯曲	57
§ 16. 承受按綫性規律分布的載荷的梁的弯曲	60
§ 17. 承受任意載荷的梁的弯曲	62
§ 18. 組合(多层)梁的弯曲	67
§ 19. 具有变弹性模数的梁的弯曲	73
§ 20. 劈形悬臂梁在頂端受力的变形	77
§ 21. 劈形悬臂梁承受力矩的弯曲	81
§ 22. 劈形悬臂梁承受分布載荷的弯曲	83
§ 23. 圓柱型各向异性曲杆的純弯	87

§ 24. 曲綫型各向异性曲杆在端点受力的弯曲	89
§ 25. 曲綫型各向异性曲杆承受分布载荷的弯曲	92
§ 26. 圆柱型各向异性环状板中的应力分布	96
§ 27. 組合的曲綫型各向异性环中的应力分布	99
§ 28. 具有变弹性模数的环中的应力分布	103
第 四 章 无限弹性介质中的应力分布	106
§ 29. 在边界受载荷的弹性半平面	106
§ 30. 在边界上的集中力与力矩的作用	111
§ 31. 位于弹性平面内的力与力矩的作用	117
§ 32. 具有抛物綫与双曲綫边界的平面介质中的应力分布	121
第 五 章 椭圆形板与圆盘中的应力分布	127
§ 33. 边界受力的椭圆形板中的应力分布	127
§ 34. 轉动的均匀椭圆板中的应力分布	131
§ 35. 轉动的曲綫型各向异性盘中的应力分布	134
§ 36. 轉动的不均匀的曲綫型各向异性盘	137
第 六 章 具有椭圆形与圆形孔的板的应力分布	141
§ 37. 具有椭圆形孔的板中应力的决定	141
§ 38. 特种载荷情况	146
§ 39. 具有圆形孔的正交各向异性板中的应力分布	153
§ 40. 具有圆形孔的正交各向异性板中的应力分布 (續)	161
§ 41. 具有椭圆核的板中的应力分布	168
§ 42. 具有椭圆核的板的特殊情况	171
§ 43. 具有圆核的正交各向异性板在一个方向上的拉伸	175
§ 44. 具有圆核的板在两个方向上的拉伸	180
§ 45. 在剪力作用下具有圆核的板	183
§ 46. 具有圆核的板承受力矩的弯曲	187
第 七 章 决定微弱各向异性板中应力的近似方法	191
§ 47. 微弱各向异性板的平面問題	191
§ 48. 具有孔的微弱各向异性板中应力的决定	195
§ 49. 具有近于正方形孔的微弱各向异性板的拉伸与純弯	198
§ 50. 承受均匀压力的均匀环中的应力分布	203

第八章 决定具有孔的各向异性板中 的应力的近似方法	206
§ 51. 具有近于椭圆形孔的板的一般公式	206
§ 52. 具有特种形状的孔的板的公式	211
§ 53. 具有三角形孔的板中应力的决定	215
§ 54. 具有三角形孔的正交各向异性板的拉伸	217
§ 55. 具有三角形孔的正交各向异性板的純弯	222
§ 56. 具有卵圆形孔的板中应力的决定	225
§ 57. 具有卵圆形孔的正交各向异性板的拉伸	227
§ 58. 具有卵圆形孔的正交各向异性板的純弯	231
§ 59. 具有方孔的正交各向异性板的拉伸	235
§ 60. 具有方孔的正交各向异性板的純弯	238
第九章 各向异性板(薄板)的弯曲理論	241
§ 61. 各向异性板(薄板)弯曲的近似理論	241
§ 62. 挠曲面的方程和边界条件	247
§ 63. 板的弯曲理論与复变函数理論的联系	250
§ 64. 顺及纵向力的挠曲面的方程。具有大挠度的板 和在弹性地基上的板	254
§ 65. 波紋的和加勁的板的弯曲和扭轉刚度的决定	259
§ 66. 多层板的刚度与折合模数的决定	262
§ 67. 用相同的薄层組成的板的刚度与折合模数	268
§ 68. 弹性模数沿厚度而变的板的刚度的决定	273
§ 69. 任意方向上刚度的計算	276
§ 70. 圆柱型各向异性板的弯曲	278
第十章 承受法向載荷的板的弯曲	282
§ 71. 弯曲的最簡情况	282
§ 72. 簡支边正交各向异性矩形板的弯曲	284
§ 73. 两边簡支的正交各向异性矩形板的弯曲	287
§ 74. 正交各向异性矩形板承受均布載荷的弯曲	291
§ 75. 簡支边长条的弯曲	297
§ 76. 正交各向异性长条弯曲理論的应用	303
§ 77. 經平行肋杆加勁的矩形正交各向异性板的弯曲	308

§ 78. 簡支边正交各向异性板的影响函数	313
§ 79. 具有一条肋杆的板的弯曲	322
§ 80. 边缘夹住的椭圆形和圆形均匀板的弯曲	325
§ 81. 曲线型各向异性圆板承受对称载荷的弯曲	329
§ 82. 曲线型各向异性圆板承受集中力的弯曲	333
§ 83. 决定各向异性板挠度的近似方法	338
§ 84. 矩形板的近似解	340
§ 85. 三角形板的近似解	345
第十一章 边缘受力的板的弯曲	349
§ 86. 直线边缘附近的局部应力	349
§ 87. 集中力矩的作用	352
§ 88. 带有椭圆孔的板在边缘上承受任意载荷的弯曲	354
§ 89. 受圆孔削弱的板的纯弯曲	357
§ 90. 具有圆孔的正交各向异性板的其他变形情况	363
第十二章 板的横向振动	371
§ 91. 板的自由振动	371
§ 92. 矩形正交各向异性板的频率的决定	374
§ 93. 决定频率的近似方法	377
§ 94. 一级近似决定频率的例子	379
§ 95. 板的受迫振动	383
第十三章 板的稳定理论的基础	386
§ 96. 板的稳定问题的一般提法	386
§ 97. 决定临界载荷的基本方法	387
§ 98. 外力所作的功	390
第十四章 在分布载荷作用下板的稳定性	393
§ 99. 简支矩形正交各向异性板在主方向受压的稳定性	393
§ 100. 两边简支的矩形板在主方向受压的稳定性	399
§ 101. 两个方向受压的矩形板的稳定性	404
§ 102. 在线性分布的载荷作用下板的稳定性	407
§ 103. 在剪力作用下矩形板的稳定性	412
§ 104. 在剪力作用下无限长条的稳定性	415
§ 105. 在法载荷与切载荷同时作用下板的稳定性	420

第十五章 承受集中力的板的稳定性	425
§ 106. 承受集中力的矩形正交各向异性板的稳定性.....	425
§ 107. 受二力压缩的矩形正交各向异性板的稳定性.....	429
§ 108. 四个力的情况.....	433
第十六章 经肋杆加劲的板的稳定性	437
§ 109. 带有纵向肋杆的矩形正交各向异性板 在主方向受压的稳定性.....	437
§ 110. 一个纵向肋杆的情况.....	441
§ 111. 带有横向肋杆的板在均匀压力作用下的稳定性.....	446
§ 112. 一个横向肋杆的情况.....	450
§ 113. 具有肋杆的板在肋杆两端受力的稳定性.....	453
§ 114. 带有一条肋杆的板的稳定性.....	458
§ 115. 两边经肋杆加劲的矩形板受集中压缩的稳定性.....	461
§ 116. 在两边经相同的肋杆加劲的板.....	463

第一章

各向异性体弹性力学的基本方程

§ 1. 連續体的应力状态

在研究各向异性弹性体中,特别是板中的应力和变形时,我們按照一般通用的模型,把弹性体看作是連續体,是連續介质。

在外力作用下处于平衡或运动状态的連續体中某一点的应力,如所周知,可由应力分量来完全确定,它們作用在經過所考虑点的三个相互垂直的平面上。通常这些平面取为垂直于通过該点的正交坐标系的坐标軸方向。在本书中我們只采用笛卡儿坐标系和圓柱坐标系。

将物体放在一笛卡儿坐标系 x, y, z 之中,标出某一点,通过这一点作三个相互正交并与坐标軸垂直的平面,而来考虑在这些平面上的应力分量

(图 1)。法向分量用字母 σ 来表示,而下标表示所在平面的法綫方向(因而也就是分量自己的方向);切面方向的分量用字母 τ 表示而带有两个下

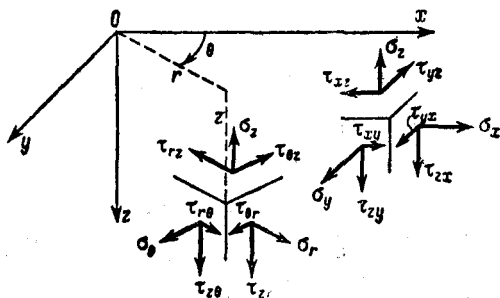


图 1

标,其中第一个标明分量本身的方向,而第二个标明平面的法綫方向。在与 x 軸垂直的平面上有分量 $\sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx}$; 在与 y 軸垂直的平面上有分量 $\tau_{xy}, \sigma_y, \tau_{zy}$; 而在与 z 軸垂直的平面上有分量 $\tau_{xz},$

τ_{yz}, σ_z 。如所熟知,从連續体力学可得出 $\tau_{xy} = \tau_{yz}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yx} = \tau_{xy}$, 而一般地 $\tau_{ji} = \tau_{ij}$, 其中 i, j 是两个互相垂直的方向。知道了垂直于坐标軸的平面上的应力分量以后,我們总可以决定在通过該点的具有法綫 n 的任一斜面上的应力。为了这个目的可用公式

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z), \\ Y_n &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z), \\ Z_n &= \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z), \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

其中 X_n, Y_n, Z_n 是作用在斜面上的应力在坐标軸方向上的投影。决定了 X_n, Y_n, Z_n , 我們便容易找到(通过投影)在具有法綫 n 的面上的法向应力与切向应力分量。

其次我們把所考虑的物体放在一圓柱坐标系 r, θ, z 之中, 其中 z 軸与笛卡儿坐标系中的 z 軸相重合, 而角度 θ 从 x 軸算起, 取 x 軸为极軸。在垂直于圓柱坐标系的坐标方向 r, θ, z 平面上的应力分量也画在图 1 中(在另外一点); 它們各用 $\sigma_r, \tau_{\theta r}, \tau_{zr}; \tau_{r\theta}, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}, \sigma_z$ 来表示, 并且 $\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z}, \tau_{rz} = \tau_{zr}, \tau_{\theta r} = \tau_{r\theta}$ 。从关于笛卡儿坐标系的应力分量轉換到关于圓柱坐标系的应力分量, 可应用熟知的公式来完成:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ \sigma_z &= \sigma_z, \\ \tau_{rz} &= \tau_{xz} \cos \theta + \tau_{yz} \sin \theta, \\ \tau_{\theta z} &= -\tau_{xz} \sin \theta + \tau_{yz} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

处于平衡状态的連續体中的应力分量, 滿足平衡方程, 它們在笛卡儿坐标系中具有下列形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0, \right\}$$

同类的方程在圆柱坐标系中可写为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \Theta &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

在方程(1.3)和(1.4)中, X, Y, Z 和 R, θ, Z 是单位体积中的体积力在 x, y, z 和 r, θ, z 方向上的投影。

连续体的运动方程与平衡方程的区别仅仅在于惯性项 $\rho w_x, \rho w_y, \rho w_z$ 或 $\rho w_r, \rho w_\theta, \rho w_z$, 它们应放在方程(1.3)和(1.4)的右端以代替零 (ρ 是材料的密度, 带有下标的 w 是加速度在坐标方向的投影)。

在弹性力学中, 加速度的投影通常用物体中质点的位移在坐标方向上的投影来表示 (即它们等于位移的投影对时间的二阶微分)。我们用 u, v, w 和 u_r, u_θ, u_z 代表位移在坐标方向 x, y, z 和 r, θ, z 上的投影。

连续体中某点附近的应变状态的特征是六个应变分量: 三个相对伸长, 它们用带有相应下标的字母 ε 来代表; 和三个相对剪切, 它们用带有两个下标的字母 γ 来代表。在笛卡儿坐标系中有应变分量: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, 它们是在物体变形前平行于 x, y, z 轴的无限小线段的相对伸长; 和 $\gamma_{ys}, \gamma_{xs}, \gamma_{xy}$, 它们是相对剪切, 即下标所指明的线段间夹角的变化。在圆柱坐标系中的应变分量是 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ (r, θ, z 方向上的相对伸长) 和 $\gamma_{\theta s}, \gamma_{rs}, \gamma_{r\theta}$ (相对剪切)。

应变分量是用位移分量来表示的。假使对应变的大小不作任何限制, 那末 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{xy}$ 与 u, v, w 的关系由下列公式给出:

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_x &= \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1, \\
\varepsilon_y &= \sqrt{1 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} - 1, \\
\varepsilon_z &= \sqrt{1 + 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} - 1, \\
\sin \gamma_{yz} &= \frac{\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}}{(\varepsilon_y + 1)(\varepsilon_z + 1)}, \\
\sin \gamma_{xz} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}}{(\varepsilon_x + 1)(\varepsilon_z + 1)}, \\
\sin \gamma_{xy} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}}{(\varepsilon_x + 1)(\varepsilon_y + 1)}.
\end{aligned} \right\} (1.5)$$

在微小应变的场合,这时位移的导数与1相比是小量,于是这些公式简化为

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned} \right\} (1.6)$$

在微小应变的场合, $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \dots, \gamma_{r\theta}$ 可用 u_r, u_θ, u_z 表示如下:

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}.
\end{aligned} \right\} (1.7)$$

这里列出的公式与方程对弹性的或非弹性的任何连续体都是

适用的,它们的推导可在弹性力学的教程中查到¹⁾。

§ 2. 广义胡克定律

为了解决弹性体的平衡、运动或稳定性问题, § 1 中列出的方程是不够的,必须补充指出应力分量与应变分量的关系,为此需要采用某种反映物体弹性特性的模型。如果所讨论的仅仅是微小形变的问题,那末通常便使用服从广义胡克定律的连续体来作为弹性体的这种模型。在本书所分析的全部情况,我们认为对于弹性体,特别是对于板,有广义胡克定律,或者换句话说,应变分量是应力分量的线性函数。

如果弹性体的弹性在所有的方向都是相同的,那末就称为各向同性的;如果它的弹性在不同方向上不尽相同,那末就称为各向异性的。均匀的弹性体是指这样一类弹性体,它们的弹性在通过任何点的平行方向上是相同的,或者说,从物体中不同地点切出的边界彼此平行的相同的长方体元素具有相同的弹性。

先考虑均匀的但具有一般的各向异性的弹性体,这时不存在任何弹性对称的因素。将物体放在任意选定的正交坐标系 x, y, z 之中,我们可以将表示广义胡克定律的方程写为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{zx} + a_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + \dots\dots\dots + a_{26}\tau_{xy}, \\ \dots\dots\dots, \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + \dots\dots\dots + a_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

这里 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{66}$ 是弹性常数(应变系数);在一般场合不相等的常数有 21 个。

物体在变形后贮存了势能。单位体积中应变势(弹性能)的表达式可以最简便地写成所谓双线性形式:

$$\bar{V} = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy}). \quad (2.2)$$

1) 例如是: 1) Л. С. Лейбензон, Курс теории упругости, Гостехиздат, 1947, 第一、二章; 2) A. E. H. Love, Mathematical theory of elasticity, 第一、二章。