新课程
高考总复习

G a o K a o Z o n g F u X i

数学（理科）

本书编写组◎编

华东师范大学出版社

新课程高考总复习

数学（理科）

本书编写组　编

华　东　师　范　大　学　出　版　社

图书在版编目(CIP)数据

新课程高考总复习·数学(理科)/《新课程高考总复习》编写组编. —上海:华东师范大学出版社,2007.6
ISBN 978-7-5617-5421-4

Ⅰ.新… Ⅱ.新… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 081074 号

新课程高考总复习·数学(理科)

项目编辑 李文革
文字编辑 李文革
封面设计 卢晓红
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
电 话 021-62450163 转各部 行政传真 021-62572105
网 址 www.ecnupress.com.cn www.hdsdbook.com.cn
市 场 部 传真 021-62860410 021-62602316
邮购零售 电话 021-62869887 021-54340188

印 刷 者 上海市印刷三厂
开 本 787×1092 16 开
印 张 17
字 数 439 千字
版 次 2007 年 6 月第一版
印 次 2007 年 6 月第一次
印 数 11000
书 号 ISBN 978-7-5617-5421-4/G·3180
定 价 25.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部调换或电话 021-62865537 联系)

出 版 说 明

教育部考试中心依照《普通高中数学课程标准（实验）》（以下简称《标准》）制定了《普通高等学校招生全国统一考试数学考试大纲（课程标准实验版）》（以下简称《考纲》），《考纲》的制定为新课程的评价奠定了准则. 由于各省（区）学情不尽相同，他们各自制定了《普通高等学校招生全国统一考试数学考试考纲（课程标准实验版）的说明》（以下简称《说明》）.

课程改革经历了从“一纲一本”到“一标多本”的转变，根据《标准》编写的教材各有千秋，社会上高考复习资料五花八门，要在色彩斑斓的繁杂表象中认清形势，把握好各自省（区）的《说明》，就必须参考《考纲》要求.

新课程中增加的考试内容是比较好掌握的，关键是有些传统内容在《考纲》中有较大的变化. 例如集合，集合从传统教材的 12 课时缩减到新教材的 4 课时，只要求掌握元素与集合、集合与集合之间的关系，集合的交、并、补运算. 有必要把集合与复数比较一下，同样都是 4 课时，由于集合知识与后续知识块有着广泛的联系，因此，集合比复数的地位重要，高考的试题中没有复数题是可以的，但没有集合题是不可以的.

立体几何新高考要求相对较低，文理科的区别在于文科考生没有学习空间向量，仅在必修 3 里用了 18 课时来学习立体几何初步，这一模块对推理论证要求较低.

概率部分新高考要求有一些区别，理科新高考增加了条件概率与几何概型，对于概率分布仅要求涉及取有限个值的随机变量. 文科新高考对概率部分仅保留了互斥事件的概率加法公式，增加几何概型.

解析几何新高考的区别是理科对双曲线作为“了解”要求，文科对抛物线、双曲线作为“了解”要求.

基本初等函数Ⅰ（指数函数、对数函数、幂函数）、基本初等函数Ⅱ（三角函数与变换和解三角形）、立体几何与空间向量、平面解析几何、概率统计及其案例是新课程中的五大主干知识块. 数列与不等式已被削弱，数列与不等式比较，数列地位较不等式弱. 当然，如果把选修系列 4 中的“不等式选讲”作为必考内容，那不等式也是主干知识块.

《新课程高考总复习・数学（理科）》按照《考纲》的知识目标与能力要求，分为函数、几何、概率、选考四大知识链，每个知识链按知识块分成若干单元，每单元分若干个讲，每讲按知识要点、例题分析、巩固练习布局，条理清楚，层次分明，针对性强.

华东师范大学出版社

2007 年 6 月

目　　录

第一部分　函数知识链

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第二部分　几何知识链

第三部分　概率统计知识链

第四部分　选 考 部 分

第一部分　函数知识链

第一单元　函数概念与基本初等函数 I

第一讲　集合的概念

知识要点

1. 集合的基本概念

(1) 集合中元素具有确定性、无序性和唯一性三个特征.

(2) 集合有三种表示法:列举法、描述法和韦恩(Venn)图法,用什么方法来表示集合,要具体问题具体分析.

(3) 元素与集合的关系分为属于与不属于两种,分别用 $a\in A$ 和 $a\notin A$ 来表示.

2. 集合之间的关系

(1) 子集:若集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素,则称集合 A 是集合 B 的子集,记作:$A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

(2) 真子集:如果集合 $A\subseteq B$,且存在 $x\in B$,但 $x\notin A$,则称集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).

(3) 集合相等:如果集合 A 是集合 B 的子集($A\subseteq B$),且集合 B 是集合 A 的子集($B\subseteq A$),则称集合 A 与集合 B 相等.

(4) 空集:不含有任何元素的集合叫空集,用 $\varnothing$ 表示. 空集是任何集合的子集,空集是任何非空集合的真子集.

3. 常用公式

(1) $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$; $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

(2) $\varnothing\subseteq A$.

(3) $\varnothing\subseteq A$, $A\neq\varnothing$,则 $\varnothing\subsetneqq A$.

(4) 若集合 A 含有 n 个元素,则 A 的子集有 2^n 个,真子集有 2^n-1 个.

例题分析

例 1. 设 P、Q 为两个非空实数集合,定义集合 $P+Q=\{a+b\mid a\in P,\ b\in Q\}$. 若 $P=\{0,\ 2,\ 5\}$, $Q=\{1,\ 2,\ 6\}$,则 $P+Q$ 中元素的个数是(　　).

A. 9　　　B. 8　　　C. 7　　　D. 6

解法一:穷举法: $P+Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 11\}$.

解法二:组合知识: $C_3^1\cdot C_3^1-1$(由于 $0+6=1+5$).

评述:本题主要考查了对用描述法表示的集合中代表元素真正意义的理解,对于给出的一个集合能够明白这是什么样的集合,集合中应有哪些元素.

巩固练习

一、选择题:

1. 定义集合运算:$A\odot B=\{z\mid z=xy(x+y),\ x\in A,\ y\in B\}$,设集合 $A=\{0,1\}$,$B=\{2,3\}$,则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和为(　　).

A. 0　　B. 6　　C. 12　　D. 18

2. 设集合 $A=\{1,2\}$,则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是(　　).

A. 1　　B. 3　　C. 4　　D. 8

3. 集合 $\{x\in\mathbf{N}\mid -4<x-1<4$,且 $x\neq 1\}$ 的真子集的个数是(　　).

A. 32　　B. 31　　C. 16　　D. 15

4. 不等式 $ax^2+5x+c>0$ 的解集为 $\left\{x\left|\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\right.\right\}$,那么 a、c 为(　　).

A. $a=6,\ c=1$　　B. $a=-6,\ c=-1$

C. $a=1,\ c=6$　　D. $a=-1,\ c=-6$

5. 设集合 $P=\{m\mid -1<m<0\}$,$Q=\{m\in\mathbf{R}\mid mx^2+4mx-4<0$ 对任意实数 x 恒成立$\}$,则下列关系中成立的是(　).

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $Q\subsetneqq P$

C. $P=Q$　　D. $P\cap Q=\varnothing$

二、填空题:

6. 设 $P=\{3,4,5\}$,$Q=\{4,5,6,7\}$,定义 $P*Q=\{(a,b)\mid a\in P,\ b\in Q\}$,则 $P*Q$中元素的个数为________.

7. 已知集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x<4\}$,$B=\{x\mid x<a\}$,若 $A\subsetneqq B$,则实数 a 的取值集合是________.

三、解答题:

8. 设集合 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$,$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$,$A\cap B=B$,求 a 的范围.

9. 已知集合 $A=\{x\mid 1<ax<2\}$,$B=\{x\mid |x|<1\}$,求满足 $A\subseteq B$ 的实数 a 的范围.

第二讲　集合的运算

知识要点

1. 交集:由 A 与 B 的所有公共元素组成的集合,叫做 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

2. 并集:由属于 A 或 B 的元素组成的集合,叫做 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

3. 补集：设 U 为全集，由属于 U 且不属于 A 的元素所组成的集合，叫做 A 的补集，记作 $\complement_U A=\{x \mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}$.

4. 常用运算性质：

(1) $A\cap A=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$；$A\supseteq(A\cap B)$.

(2) $A\cup A=A$；$A\cup B=B\cup A$；$A\cup\varnothing=A$；$A\subseteq(A\cup B)$.

(3) $A\cap\complement_U A=\varnothing$；$A\cup\complement_U A=U$.

例题分析

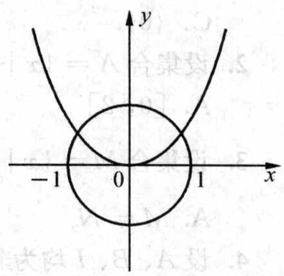
例 1. 设集合 $M=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2=1,\ x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,\ y)\mid x^2-y=0,\ x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}\}$，则集合 $M\cap N$ 中元素的个数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解法一：$\begin{cases}x^2+y^2=1\\x^2-y=0\end{cases}\Rightarrow y^2+y-1=0\Rightarrow y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$\because y=x^2$，$y\geqslant 0$，$\therefore y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 x 有两解，

$\therefore$ 方程组有两解，即 $M\cap N$ 中有两个元素.



解法二：如图，在同一直角坐标系中画出 $x^2+y^2=1$ 与 $x^2-y=0$ 的图象，由图象可得，两曲线有两个交点，即 $M\cap N$ 中有两个元素.

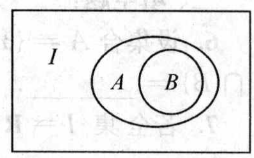
评述：本题考查了对用描述法表示的集合中元素的理解，注意数形结合的思想方法. 对于用描述法给出的集合 $\{x\mid x\in P\}$，要紧紧抓住竖线前面的代表元素 x 以及它所具有的性质 P.

例 2. 已知全集 $I=\mathbf{N}^*$，集合 $A=\{x\mid x=2n,\ n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{x\mid x=4n,\ n\in\mathbf{N}^*\}$，则(　　).

A. $I=A\cap B$　　B. $I=\complement_I A\cup B$

C. $I=A\cup\complement_I B$　　D. $I=\complement_I A\cup\complement_I B$

解法一：因 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\cdots\}$，$B=\{4,\ 8,\ 12,\ 16,\cdots\}$，所以 $\complement_I B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\cdots\}$，所以 $I=A\cup\complement_I B$，故答案为 C.



解法二：因 $B\subsetneqq A$，所以 $\complement_I A\subsetneqq\complement_I B$，$\complement_I A\cap\complement_I B=\complement_I A$.

故 $I=A\cup\complement_I A=A\cup\complement_I B$.

解法三：根据题意，我们画出 Venn 图来解，易知 $B\subsetneqq A$，如图，可以清楚看到 $I=A\cup\complement_I B$ 是成立的.

评述：本题考查对集合概念和关系的理解和掌握，注意用数形结合的思想方法来考察问题更简便直观一些.

例 3. 设 I 为全集，S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集，且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$，则下面论断正确的是(　　).

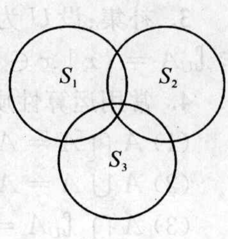
A. $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$　　B. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

C. $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$　　D. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

解法一：利用 Venn 图可得答案为 C.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

解法二:$\because S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$,$\therefore \complement_I(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = \varnothing$,即 $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \varnothing$.



解法三:令 $S_1 = \{0\}$,$S_2 = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$,$S_3 = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$,则 $I = \mathbf{N}$,可得到结论 C.

评述:本题考查了集合的运算,在解题过程中利用 Venn 图直观表示集合,体现了数形结合的思想方法.求抽象集合的运算问题经常可以借助 Venn 图帮助解题,这样更直观,易理解.

巩固练习

一、选择题:

1. 设集合 $A = \{x \mid |x-2| \leqslant 2, x \in \mathbf{R}\}$,$B = \{y \mid y = -x^2, -1 \leqslant x \leqslant 2\}$,则 $\complement_R(A \cap B)$ 等于(　　).

A. $\mathbf{R}$　　　　B. $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$

C. $\{0\}$　　　　D. $\varnothing$

2. 设集合 $A = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$,$B = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 4\}$,则 $A \cap B =$(　　).

A. $[0, 2]$　　B. $[1, 2]$　　C. $[0, 4]$　　D. $[1, 4]$

3. 设集合 $M = \{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$,$N = \{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$,则(　　).

A. $M = N$　　B. $M \subsetneqq N$　　C. $M \supsetneqq N$　　D. $M \cap N = \varnothing$

4. 设 A、B、I 均为非空集合,且满足 $A \subseteq B \subseteq I$,则下列各式中错误的是(　　).

A. $(\complement_I A) \cup B = I$　　　　B. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$

C. $A \cap (\complement_I B) = \varnothing$　　　　D. $\complement_I A \cap (\complement_I B) = \complement_I B$

5. 已知向量集合 $M = \{\vec{a} \mid \vec{a} = (1, 2) + \lambda(3, 4), \lambda \in \mathbf{R}\}$,$N = \{\vec{a} \mid \vec{a} = (-2, -2) + \lambda(4, 5), \lambda \in \mathbf{R}\}$,则 $M \cap N$ 等于(　　).

A. $\{(1, 1)\}$　　　　B. $\{(1, 1), (-2, -2)\}$

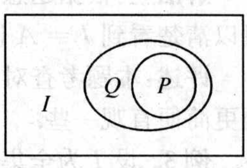
C. $\{(-2, -2)\}$　　　　D. $\varnothing$

二、填空题:

6. 设集合 $A = \{x \mid |x| < 4\}$,$B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$,则集合 $\{x \mid x \in A$ 且 $x \notin A \cap B\} =$ ________.

7. 若全集 $I = \mathbf{R}$,$f(x)$、$g(x)$ 均为 x 的二次函数,$P = \{x \mid f(x) < 0\}$,$Q = \{x \mid g(x) \geqslant 0\}$,则不等式组 $\begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$ 的解集可用 P、Q 表示为________.

8. 如图,设 I 是全集,非空集合 P、Q 满足 $P \subsetneqq Q \subsetneqq I$,若含 P、Q 的一个集合运算表达式,使运算结果为空集 $\varnothing$,则这个运算表达式可以是____________________.(只要写出一个表达式)



(第 8 题)

三、解答题:

9. 记函数 $f(x) = \sqrt{2 - \frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A,$g(x) = \lg[(x-a-1)(2a-x)] (a < 1)$

的定义域为 B.(1) 求 A;(2) 若 $B\subseteq A$,求实数 a 的取值范围.

10. 设全集 $U=\mathbf{R}$.

(1) 解关于 x 的不等式 $|x-1|+a-1>0\ (a<1)$;

(2)记 A 为(1)中不等式的解集,集合 $B=\left\{x\left|\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)=0\right.\right\}$,若 $\complement_U A\cap B$ 恰有 3 个元素,求 a 的取值范围.

第三讲　函数的基本概念

知识要点

1. 函数

(1) 函数的定义:设 A、B 都是非空的数集,如果按照某种确定的对应关系 f,使对于集合 A 中的任意一个数 x,在集合 B 中都有唯一的一个数 y 与之对应,那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数,记作:$y=f(x)$, $x\in A$,其中 A 叫做自变量 x 的取值范围,也把 A 叫做函数的定义域;与 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值,函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 叫做函数的值域.集合 B 不一定是函数的值域,函数 $f(x)$ 的值域是 B 的子集,也就是说,在 B 中允许有元素使其在 A 中没有与之对应的元素.

(2) 函数的三要素:

① 三要素是指定义域、值域、对应关系;

② 三要素只要有一个不同的函数就是不同的函数;

③ 三要素都相同的两个函数是同一函数.

注意:由于函数的定义域和对应关系决定值域,所以只要定义域和对应关系相同的两个函数,就是相同的函数.但定义域和值域相同的两个函数不一定是相同的函数,如 $y=2x+3$ 和 $y=x+2$;值域和对应关系相同的两个函数也不一定是相同的函数,如一些二次函数.

2. 映射

映射的定义:一般地,设 A、B 是两个集合,如果按照某种对应关系 f,对于集合 A 中的任何一个元素 a,在集合 B 中都有唯一的元素 b 和它对应,那么,这样的对应 $f:A\to B$ 叫做集合 A 到集合 B 的映射.其中 A 中的元素 a 叫原象,B 中的元素 b 叫象.

注意:① 由映射和函数的定义可知,函数是一类特殊的映射,它要求 A、B 非空且皆为数集,而映射的 A、B 两个集合可以是任何类型的集合,这就是映射和函数的唯一区别.

② 函数和映射的对应方式可为"一对一"和"多对一",不能是"一对多".

3. 判断一个对应是否为函数或映射,抓住两点:

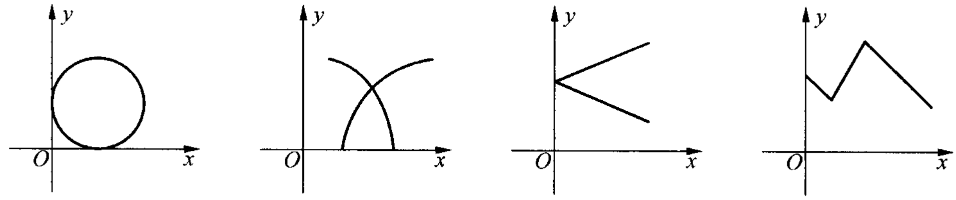
(1) A 中元素在 B 中一定有唯一元素与之对应.

(2) B 中的元素在 A 中不一定有元素与之对应,如果有,不一定唯一.

4. 判断两个函数是否相同,应抓住函数的三要素相同.

例题分析

例 1. 如图,可表示 y 是 x 的函数的是(　　).



A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

分析:在 A、B、C 中,均存在一个 x 对应两个 y 的情况,所以 A、B、C 均错. 因此答案为 D.

例 2. 以下各组函数是否表示同一函数?

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$;

(2) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}}$, $g(x)=(\sqrt[2n-1]{x})^{2n-1}$, $n\in \mathbf{N}^*$;

(4) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$, $g(x)=\sqrt{x^2+x}$;

(5) $f(x)=x^2-2x-1$, $g(t)=t^2-2t-1$.

分析:对于两个函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$,当且仅当它们的定义域、值域、对应法则都相同时,$y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 才表示同一函数. 若两个函数表示同一函数,则它们的图象完全相同,反之亦然.

解:(1)由于 $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$, $g(x)=\sqrt[3]{x^3}=x$,故它们的值域及对应法则都不相同,所以它们不是同一函数.

(2) 由于函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,所以它们不是同一函数.

(3) 由于当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,$2n\pm 1$ 为奇数,$\therefore f(x)=\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}}=x$, $g(x)=(\sqrt[2n-1]{x})^{2n-1}=x$,它们的定义域、值域及对应法则都相同,所以它们是同一函数.

(4) 由于函数 $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$ 的定义域为 $\{x\mid x\geqslant 0\}$,而 $g(x)=\sqrt{x^2+x}$ 的定义域为 $\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 0\}$,它们的定义域不同,所以它们不是同一函数.

(5) 函数的定义域、值域和对应法则都相同,所以它们是同一函数.

评述:(1) 小题(5)易错判断成它们是不同的函数,原因是对函数的概念理解不透. 要知道,在函数的定义域及对应法则 f 不变的条件下,自变量变换字母,以至变换成其他字母的表达式,这对于函数本身并无影响,比如 $f(x)=x^2+1$, $f(t)=t^2+1$, $f(u+1)=(u+1)^2+1$ 都可视为同一函数.

(2) 对于两个函数来讲,只要函数的三要素中有一要素不相同,则这两个函数就不可能是同一函数.

巩固练习

一、选择题:

1. 下列对应是 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 函数的是(　　).

A. $x\to\frac{2}{x}$　　　B. $x\to y$,这里 $y^2=x$

C. $x\to\sqrt{x-1}+\sqrt{-1-x}$　　　D. $x\to y$,这里 $y=1$

2. 在下列各组函数中，$f(x)$与$g(x)$表示同一函数的是(　　).

A. $f(x)=1$, $g(x)=x^0$　　　B. $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$

C. $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $g(x)=\frac{x^3}{2x}$　　　D. $f(x)=|x|$, $g(x)=\begin{cases}x\ (x\geqslant 0),\\-x\ (x<0)\end{cases}$

3. 在集合A到B的映射中,对于B中的任何一个元素y,以下结论中正确的是(　　).

A. 在A中必有原象　　　B. 在A中有唯一的原象

C. 在A中不一定有原象　　　D. 在A中一定没有原象

4. 给出函数$f(x)$、$g(x)$如下表,则$f[g(x)]$的值域为(　　).

x	1	2	3	4
$f(x)$	4	3	2	1

x	1	2	3	4
$g(x)$	1	1	3	3

A. $\{4, 2\}$　　B. $\{1, 3\}$　　C. $\{1, 2, 3, 4\}$　　D. 以上情况都有

二、填空题:

5. 已知 $f(2x)=3x-1$,且 $f(a)=4$,则 $a=$________.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-3(x<0),\\f(x-1)(x\geqslant 0),\end{cases}$ 则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=$________.

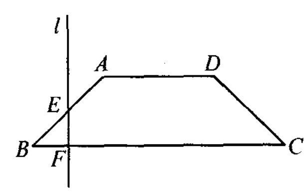
三、解答题:

7. 已知 $f(x)$是一次函数.

(1) 若 $f[f(x)]=9x+3$, 求 $f(x)$;

(2) 若 $2f(x)+f(-x)=3x+1$, 求 $f(x)$.

8. 如图,已知底角为45°的等腰梯形$ABCD$,底边BC长为7 cm,腰长为$2\sqrt{2}$ cm,当一条垂直于底边BC(垂足为F)的直线l从左至右移动(与梯形$ABCD$有公共点)时,直线l把梯形分成两部分,令$BF=x$,试写出左边部分的面积y与x的函数解析式.



(第8题)

第四讲　函数的定义域、值域与单调性

知识要点

1. 函数的定义域:

求函数定义域,是求满足函数解析式的所有自变量的集合,通过解关于自变量的不等式(组)来实现的. 要熟记基本初等函数的定义域. 由四则运算构成的初等函数,其定义域是每个初等函数定义域的交集. 复合函数定义域,不仅要考虑内函数的定义域,还要考虑到外函数对应法则的要求. 理解函数定义域,应紧密联系对应法则. 函数定义域是研究函数性质的

基础和前提.

2. 函数的值域:求函数值域是函数中常见问题,方法多种多样,常用的有:观察法、换元法(常用于含有二次根式的函数)、分离常数法、单调性法、图象法(常用于二次函数).

3. 在求定义域时,要注意以下几点:(1)有 $\sqrt{x}$ 时,$x \geqslant 0$;(2) 有$\frac{a}{x}$ 时,$x \neq 0$;(3) 有 x^0 时,$x \neq 0$;(4) 有 $\log_a x$ 时,$x > 0$.

在用换元法求值域时,要注意一定要求出换元后的自变量的范围,换元后的自变量范围一定要跟换元后的函数走,千万不要用换元前的自变量范围来求换元后函数的值域.

4. 一般地,设函数 $f(x)$的定义域为 I,如果对于定义域 I 内的某个区间 D 上的任意两个自变量x_1、x_2 的值,当 $x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) < f(x_2)$,那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数;若 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立,就说函数 $f(x)$在区间 D 上是减函数.

例题分析

例 1. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 6}$ 的定义域是 A,函数 $g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-6}$ 的定义域是 B,则 A、B 的关系是(　　).

A. $A = B$　　B. $A \subsetneqq B$　　C. $A \supsetneqq B$　　D. $A \cap B = \varnothing$

分析:$f(x)$的定义域为$(-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$,$g(x)$的定义域为$[6, +\infty)$,所以选 C.

例 2. 函数 $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ 的值域是(　　).

A. $[-1, 1]$　　B. $(-1, 1]$　　C. $[-1, 1)$　　D. $(-1, 1)$

分析:$y = \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} - 1$. $\because 1 + x^2 \geqslant 1$, $\therefore 0 < \frac{2}{1+x^2} \leqslant 2$, $\therefore -1 < y \leqslant 1$,即选 B,这是利用了分离常数法来求函数的值域.

例 3. 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x-1}}{ax^2 + ax - 3}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,求实数 a 的取值范围.

分析:由题意,只要满足在 $\mathbf{R}$ 上有 $ax^2 + ax - 3 \neq 0$ 恒成立即可. 也就是当 $a = 0$ 时有 $-3 \neq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立;或$\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta = a^2 - 4a \times (-3) < 0, \end{cases}$ 可得$-12 < a < 0$. 所以$-12 < a < 0$.

例 4. 函数 $y = x + \sqrt{1-2x}$的值域是(　　).

A. $(-\infty, 1]$　　B. $(-\infty, -1]$

C. $\mathbf{R}$　　D. $[1, +\infty)$

分析:令 $\sqrt{1-2x} = t(t \geqslant 0)$,则 $x = \frac{1-t^2}{2}$. $\because y = \frac{1-t^2}{2} + t = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + 1 \leqslant 1$,

$\therefore$ 值域为$(-\infty, 1]$. 所以选 A,这是利用了换元法来求函数的值域.

巩固练习

一、填空题:

1. 函数 $y = \frac{(x+1)^0}{\sqrt{|x| - x}}$ 的定义域是(　　).

A. $\{x \mid x>0\}$　　B. $\{x \mid x<0\}$

C. $\{x \mid x<0$ 且 $x \neq -1\}$　　D. $\{x \mid x \neq 0$ 且 $x \neq -1\}$

2. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ 的定义域是 F，$g(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}$ 的定义域是 G，则 F 和 G 的关系是(　　).

A. $F \supsetneqq G$　　B. $F \subsetneqq G$　　C. $F=G$　　D. $F \cap G=\varnothing$

3. 函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)}$ 的定义域是(　　).

A. $[-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$　　B. $(-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$

C. $[-2, -1) \cup (1, 2]$　　D. $(-2, -1) \cup (1, 2)$

4. 函数 $y=x^2-2x+3$ 在区间 $[0, m]$ 上的值域是 $[2, 3]$，则 m 的取值范围是(　　).

A. $[1, +\infty)$　　B. $[0, 2]$　　C. $(-\infty, 2]$　　D. $[1, 2]$

5. 函数 $y=\sqrt{16-x^2}\,(0 \leqslant x \leqslant 4)$ 的值域是(　　).

A. $[0, +\infty)$　　B. $[4, +\infty)$　　C. $(-\infty, 4]$　　D. $[0, 4]$

二、填空题：

6. 函数 $y=\sqrt{-x^2+x+2}$ 的定义域为________，值域为________.

7. 设 $f(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$，则 $f(x)$ 的值域为________.

8. 函数 $y=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的值域为________.

三、解答题：

9. 已知 $f(x^2-4)=\lg \dfrac{x^2}{x^2-8}$，求 $f(x)$ 的定义域.

10. 已知函数 $f(x)=x^2-4ax+2a+6\,(x \in \mathbf{R})$.

(1) 若函数的值域为 $[0, +\infty)$，求 a 的值；

(2) 若函数的值域为非负数，求函数 $f(a)=2-a\,|a+3|$ 的值域.

11. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\log_2 \dfrac{1+x}{1-x}$，求 $f(x)$ 的定义域.

第五讲　函数的表示

知识要点

1. 函数的三种表示法

(1) 解析法：就是把两个变量的函数关系，用一个等式来表示，这个等式叫做函数的解析表达式，简称解析式.

(2) 列表法：就是列出表格来表示两个变量的函数关系.

(3) 图象法：就是用函数图象表示两个变量之间的函数关系.

2. 求函数的解析式一般用待定系数法、配方法和换元法.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com