大学数学实践系列教材

6

知识要点
题型分析
同步训练
考研解析
模拟试题

线性代数复习指导

Instruction and Review of Linear Algebra

主编 杨雪 王俊红 李孟芹

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

大学数学实践系列教材

线性代数复习指导

主编 杨雪 王俊红 李孟芹

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书由2篇组成.第1篇5章,包括:行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型.每一章由4部分组成:知识点串讲、基本题型及解题思路分析、同步训练和提高训练.第2篇为线性代数试题汇编及参考答案.

本书脉络清楚,题型归纳到位,注重基础知识与解题能力的结合,易于入门,便于提高.可作为理工科及经济学科的大学生学习线性代数的同步指导书,也可作为考研用书,对高等学校的线性代数教师讲授习题课也有一定的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数复习指导/杨雪,王俊红,李孟芹主编.—天津:天津大学出版社,2008.2
ISBN 978-7-5618-2606-5

Ⅰ.线… Ⅱ.①杨…②王…③李… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第018140号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
网　　址 www.tjup.com
电　　话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印　　刷 迁安万隆印刷有限责任公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 169mm×239mm
印　　张 15
字　　数 320千
版　　次 2008年2月第1版
印　　次 2008年2月第1次
印　　数 1-4 000
定　　价 23.00元

大学数学实践系列教材
编委会

序

数学在人类文明的进步和发展中一直发挥着重要作用,特别是数学的发展,推动了计算机科学、信息科学的迅速发展,推动了宏观经济、微观经济的发展,推动了整个管理学科的发展.总之,数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等领域中发挥着不可忽略的特殊作用.每一个想成为有较高文化素质的当代人,都应当具备较高的数学素质.因此,提高数学教育的整体水平是提高整个国民素质的重要环节.

然而,我国目前的数学教育现状仍然是以传授严格的数学知识为主,理论联系实际环节相对薄弱,特别是对数学应用能力的培养更是与数学知识的学习割裂开来,在数学教学中普遍缺乏对学生“应用意识”的培养是当前数学教学中亟待克服的现象.

当今国际上流行的“大众数学”(Mathematics for all)说,本质上就是将数学从抽象的、深奥的理论中解放出来,使人们在愉快的、轻松的环境中接受它、学习它.教育部研究课题《数学学科专业发展战略研究》(2004 年第 1 号)的研究报告中也指出:应提倡把数学建模的思想融入数学主干课程的教学中去.近年来,我们在这方面进行了不懈的探索,试图使数学更多地成为从实践中来到实践中去的五彩缤纷的科学,并且这些思想已贯穿到我们整个教学实践中.全方位的数学实验使学生对数学学习兴趣盎然;多层次的数学建模训练使学生应用能力迅速提高;精心选择的数学练习使学生学习数学事半功倍.这些方法也让我们的教学取得了一定成果,在历年的大学生数学竞赛、数学建模竞赛中,学生们的出色表现和优异成绩体现了这一点.本套“大学数学实践系列教材”将这些零散的做法汇集成册,并陆续形成一套具有鲜明特色的系列数学实践教材,相信这套丛书的问世,能为培养高素质、创新型人才的共同目标尽微薄之力.

陈汝栋

2008 年元旦于天津

前　言

线性代数是当代大学生一门必修的公共基础课，它不仅是进一步学好其他后继课程的必备基础，也是工学、经济学硕士研究生入学考试的一门主要课程，而且对培养学生抽象思维和逻辑推理能力、综合分析和解决问题的能力以及运算能力都有着至关重要的作用.

本书以同济大学《线性代数》第4版为基础，依据现行教学大纲和研究生入学考试数学考试大纲，结合编者多年的教学经验，归纳了线性代数中几乎所有的常见题型，精心选编和分析了大量的经典例题，以章节为标准选入了近几年的考研真题，并予以注解分析，另外还给出了多套期末考试模拟试题及答案.

易于入门和应试性强是本书的最大特点.

本书分为两大部分.

第1篇串讲了线性代数的基本知识点，内容包括：行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型.

每一章由下列4部分组成.

一、知识点串讲：将主要概念和结论进行了简明扼要的叙述和总结归纳.

二、基本题型及解题思路分析：归纳了线性代数中几乎所有的常见题型，并适当地给出了解题思路分析.

三、同步训练：给出了与题型相匹配的同步练习题，并予以提示.

四、提高训练：精选了相应章节内容的近几年的考研题，并予以注解分析，使同学们更方便地了解考研题的难易程度和重点难点. 这些试题采用"年份 - 题类 - 分数"来标识，如 2007 - 3 - 12 表示 2007 年数学（三）的考题，且该题在卷面上所占分数为 12.

第2篇收集了天津工业大学近几年的期中期末试卷及模拟试题并给出了参考答案.

本书由杨雪、王俊红、李孟芹主编，参加编写的有黄东卫、白志惠、张芳等老师. 在编写过程中，参考了众多教材和辅导教材. 在此谨向有关作者以及为本书付出心血的同志们表示衷心的感谢.

由于时间仓促和水平有限，不妥之处在所难免. 欢迎广大读者批评指正.

编者

2007 年 12 月

目　录

第1篇　线性代数基础知识

第2篇　线性代数试题汇编

第 1 篇　线性代数基础知识

第 1 章 行列式

1.1 知识点串讲

1.1.1 行列式

(1)基本概念

①全排列:把 n 个不同的元素排成一列的排列,称为这 n 个元素的全排列,简称排列.

②逆序数:在一个排列中,如果一对数中前面的数大于后面的数,那么就称有一个逆序,逆序的总和称为这个排列的逆序数,记为 t.

③n 阶行列式:称

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

为 n 阶行列式,简记为 $\det(a_{ij})$,其中 a_{ij}称为 $\det(a_{ij})$的元素,$t=t(p_1p_2\cdots p_n)$为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

注:行列式是一个数.

④余子式:在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij}的余子式,记作 M_{ij}.

⑤代数余子式:$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素 a_{ij}的代数余子式.

(2)行列式的性质

①将行列式进行转置,其值不变.

②行列式中两行(列)互换,其值变号.

③行列式中某一行(列)的公因子可以提到行列式的外面.

④若行列式中两行(列)元素成比例,则行列式为零.

⑤行列式按行(列)拆开运算,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注: $\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$.

⑥将某行(列)各元素乘以同一数加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

⑦行列式的任一行(列)的元素与其对应的代数余子式乘积之和等于行列式的值,行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D, i=j, \\ 0, i\neq j; \end{cases}$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} D, i=j, \\ 0, i\neq j. \end{cases}$$

注:称此性质为行列式按行(列)展开法则.

(3)一些特殊行列式

①上(下)三角形行列式等于其主对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注:对角行列式是上(下)三角形行列式的特例.

②次三角形行列式等于次对角线上元素的乘积并添加适当的符号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

③分块三角形行列式可以化为低阶行列式的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kn} \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kn} & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{kn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

注:其余未写的元素均为0.

④范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j).$$

1.1.2　克拉默法则

(1)基本概念

①克拉默法则:如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

的系数行列式不等于零,即 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$,则(1)有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_j = \frac{D_j}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式,即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

②非齐次线性方程组:当(1)中的 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为0时,称(1)为非齐次线性方程组.

③齐次线性方程组:当(1)中的 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ 时,称(1)为齐次线性方程组.

④齐次线性方程组的非零解:当齐次线性方程组的解不全为零时,称该解为齐次线性方程组的非零解.

(2)克拉默法则的相关结论

①对于线性方程组(1)有：$\begin{cases} D\neq 0 \Leftrightarrow \text{(1)有唯一解}; \\ D=0 \Leftrightarrow \text{(1)无解或至少有两个解}. \end{cases}$

②齐次线性方程组一定有解，即至少有零解.

③对于齐次线性方程组有：$\begin{cases} D\neq 0 \Leftrightarrow \text{方程组只有零解}; \\ D=0 \Leftrightarrow \text{方程组有非零解}. \end{cases}$

(3)克拉默法则的局限性

克拉默法则仅适用于方程个数等于未知量个数的情况.

1.2 基本题型及解题思路分析

题型 1：与行列式定义有关的计算

例 1 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数.

(1)$1\ \ 3\ \ \cdots\ \ (2n-1)\ \ 2\ \ 4\cdots\ \ (2n)$;

(2)$1\ \ 3\ \ \cdots\ \ (2n-1)\ \ (2n)\ \ (2n-2)\ \ \cdots\ \ 2$.

【分析】 该类型题目可按照从前向后或从后向前的顺序依次找到各个元素与其他元素所构成的逆序，再将逆序数相加即可.

解 (1)此排列中所包含的逆序有：

3 2 　　1个

5 2,5 4 　　2个

7 2,7 4,7 6 　　3个

…… 　　…

$(2n-1)\ \ 2,\ \ (2n-1)\ \ 4,\ \ (2n-1)\ \ 6,\ \ \cdots,\ \ (2n-1)\ \ (2n-2)$ 　　$(n-1)$个

故 $t=1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

(2)此排列中所包含的逆序有：

3 2 　　1个

5 2,5 4 　　2个

…… 　　…

$(2n-1)\ \ 2,\ \ (2n-1)\ \ 4,\ \ (2n-1)\ \ 6,\ \ \cdots,\ \ (2n-1)\ \ (2n-2)$ 　　$(n-1)$个

4　2　　1个

6　2,6　4　　2个

……　　…

$(2n)\ \ 2,\ (2n)\ \ 4,\ (2n)\ \ 6,\ \cdots,(2n)\ \ (2n-2)$　　$(n-1)$个

故　$t=1+2+\cdots+(n-1)+1+2+\cdots+(n-1)=n(n-1)$.

例2　对于 n 级排列,逆序数 $t_{\min}=$__________,$t_{\max}=$__________.

【分析】　此题目要求我们记住极为特殊的两种排列.

解　当排列为 $1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n$ 时,$t_{\min}=0$;

当排列为 $n\ \ \cdots\ \ 2\ \ 1$ 时,$t_{\max}=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

例3　在5阶行列式展开式中 $a_{32}a_{55}a_{14}a_{21}a_{43}$ 的符号为__________.

【分析】　此题关键是要适当调整该项各元素位置,使其中一个下标按自然顺序排列,另外一个下标的逆序数便决定了该项的符号.

解　将 $a_{32}a_{55}a_{14}a_{21}a_{43}$ 重新排序成 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55}$,而41235的逆序数为:$1+1+1=3$,故 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55}$ 的系数为 $(-1)^3=-1$,所以 $a_{32}a_{55}a_{14}a_{21}a_{43}$ 的符号为负.

例4　写出4阶行列式展开式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解　由定义知,4阶行列式的一般项为:

$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$(其中 t 为 $p_1p_2p_3p_4$ 的逆序数).

因为 $p_1=1,p_2=3$,所以 $p_1p_2p_3p_4$ 只能形如13□□,即1324或1342,对应的 t 分别为 $0+0+1+0=1$ 或 $0+0+0+2=2$.

故所求的含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项为:$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

例5　函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数是______.

【分析】　该题无需将行列式的最终结果算出,只需根据行列式的定义,挑选满足条件的项,再将其系数相加即可.

解　根据行列式定义,$f(x)$ 是一个 x 的多项式函数,且最高次幂为 x^3.显然含 x^3 的项有两项:一项为主对角线上4个元素之积 x^3,另一项为 $(-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ 即 $-x\cdot x\cdot 1\cdot 2x=-2x^3$,故多项式 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 $1-2=-1$.