全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书

出现频率最高的100种典型题型精解精练

数学四

- 研究常考题型是考试过关的捷径
- 实战预测试卷是加分致胜的法宝

孙建东 刘志高 石雪梅 编著

2009 考研必备

巧学、巧练、巧过关

清华大学出版社

G643.6/7
:4
2008

全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书

出现频率最高的100种典型题型精解精练——数学四

孙建东 刘志高 石雪梅 编著

清华大学出版社

北 京

内容简介

考研作为一种选拔性水平考试，试题规范，规律性很强，不少题型反复出现，把这些反复出现的题型按考试出现频率整理归类，并提供解题思路，可以帮助考生节省宝贵的复习时间，提高应试效率，对考生迎考大有帮助。本书正是基于这一思路，由资深考研辅导老师精心编写而成。

全书共分8章，第1~7章归纳整理了最常考的100种典型题型，具体内容包括：一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程、多元函数微分学、二重积分、线性代数、概率论，第8章为全国硕士研究生入学考试数学四全真预测试题及其参考解答。每种题型分为三个板块：真题分析、题型点睛和即学即练。真题分析以历届考研真题为实例进行分析，旨在让读者彻底明白这类题型的解法；题型点睛浓缩了该题型的要点，并加以讲解与点评，便于读者理解与记忆；即学即练中作者设计了部分试题，让读者即学即练，即练即会，以达到举一反三的功效。本书附录给出了各章即学即练试题的详细解析与参考答案。

本书以广大考研读者为主要对象，帮助考生在短时间内获取较大收益，同时可作为考研辅导班的培训教材以及高等院校相关师生的教学参考书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989　13501256678　13801310933

图书在版编目（CIP）数据

出现频率最高的100种典型题型精解精练．数学．4/孙建东，刘志高，石雪梅编著．—北京：清华大学出版社，2007.12

（全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书）

ISBN 978-7-302-16617-7

Ⅰ.出…　Ⅱ.①孙…②刘…③石…　Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题　Ⅳ.G643-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第195221号

责任编辑： 丁庆翔
责任校对： 孟宗芳
责任印制： 科　海
出版发行： 清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机： 010-62770175
投稿咨询： 010-62772075
地　　址： 北京清华大学学研大厦A座
邮　　编： 100084
邮购热线： 010-62786544
客户服务： 010-62776969
印 装 者： 北京市鑫山源印刷有限公司
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185×260　**印　　张：** 18.5　**字　　数：** 449千字
版　　次： 2008年2月第1版　**印　　次：** 2008年2月第1次印刷
印　　数： 1~5000
定　　价： 26.00元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：82896445　产品编号：027040-01

前　言

读考题排行榜　走成功捷径路

全国硕士研究生入学考试试题是广大工作在教学一线的骨干教师和参加命题的专家教授的智慧和劳动结晶，考试试题既反映了考试大纲对考生知识、能力等的要求，又蕴含着考研命题的基本原则和趋势，对于广大准备考研的考生而言，也是一笔宝贵财富。

为了给广大考生提供一套高效实用的试题导航标准应试教材，我们在广泛调研和充分论证的基础上，听取资深专家及众多考生的建议，组织编写了这套《全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书》，其目的是帮助考生在复习阶段，浓缩考试中出现频率最高的题型，“把书读薄”，以做到成竹在胸，引导考生在短时间内快速突破过关。

✦ 丛书书目

丛书第一批推出 8 本：

✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学一
✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学二
✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学三
✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学四
✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数据结构
✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——C 语言程序设计
✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——操作系统
✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——电路

✦ 关于本书

本书通过深入分析历年真题特点，归纳整理出了硕士研究生“数学四”入学考试常考的 100 种题型，并依据考试大纲的章节顺序，将这 100 种题型分成 7 章进行解析与点评，便于考生更快地了解和掌握复习的重点，发现命题的规律，明确复习方向，节省宝贵的复习时间。由于某些题型几乎是年年出现，所以本书可以令考生更高效地复习与掌握必考题型与知识点。这也正是本书的最大特色：省时、高效、高命中率。

书中将全国几十所重点高校近 10 年考研试卷中的同一题型试题，归纳整理成 100 种高频题型（即 TOP1~TOP100），对每种题型进行了详细分析并给出参考解答，便于考生复习该内容时可以了解：这种题型考过什么样的题目，常与哪些知识点联系起来出题，从哪个角度命题，等等。每种题型具体分为如下三个板块：

- 真题分析。以重点高校近10年的考研真题为实例，分析解题思路，实际就是进行破题，最终找出解题方法。分析以后给出详细的解答，旨在让考生掌握解题方法和技巧，以及这些方法技巧在每个具体问题中的灵活运用，彻底明白这类题型的解法。
- 题型点睛。浓缩该题型的要点，给出该题型的相关知识点和解题的一般方法或步骤，并加以讲解分析，便于考生理解与记忆。
- 即学即练。给出部分试题，让考生学过“真题分析”和“题型点睛”后就进行做题练习，以便更快更好地掌握所练题型的相关知识点和解题的一般方法或步骤，以达到举一反三、触类旁通的功效。

本书还提供了3套全国硕士研究生入学考试数学四全真预测试题并附有具体的参考解答，可以供考生在考前实战演练。为了让考生及时掌握自己的学习效果，书中最后还给出了“即学即练”中试题的具体解答，以便考生自查。

✦ 读者对象

本套丛书以全国硕士研究生入学考试的考生为主要读者对象，特别适合希望在较短时间内取得较大进步的广大应试考生，也可作为相关考试培训班的培训教材，以及高校师生的教学参考书。

✦ 关于作者

丛书由一线教学及考试研究专家分工编写。作者均长期从事这方面的教学和研究工作，积累了丰富的经验，对研究生入学考试颇有研究（其中大多数编写者多年参加真题阅卷及相关培训与辅导工作）。本书由孙建东、刘志高和石雪梅执笔编写而成。参与本丛书组织、指导、编写、审校和资料收集的人员有（以姓氏笔画为序）：王伦夫、余雪勇、吴蕾、张宏、李千目、李勇智、李海、杜松、杨帮华、汪志宏、汪胡青、罗玮、费宁、徐倩、袁堃、彭宜青、葛武滇等，在此对诸位作者付出的辛勤劳动表示衷心的感谢。

✦ 特别致谢

在此，首先对丛书所选用的参考文献的著作者，以及丛书所引用试题的出题老师和相关单位表示真诚的感谢。

✦ 互动交流

由于时间仓促，书中不妥之处，敬请广大读者批评指正。读者的进步，是我们最大的心愿。您如果发现书中有任何疑惑之处，请与我们交流。

作者的联系方式：iteditor@126.com。
出版社的联系方式：feedback@khp.com.cn

作者
2008年1月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第 1 章　一元函数微分学

TOP1：数列极限的四则运算法则在计算中的应用

【真题分析】

【真题 1】（2006, 4 分）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$________.

分析：利用“数列$\{x_n\}$的奇数项子列和其偶数项子列若收敛于同一值，则数列$\{x_n\}$的极限就是该值”的结论计算.

解答：

$$\lim_{2m\to\infty}\left(\frac{2m+1}{2m}\right)^{(-1)^{2m}}=\lim_{m\to\infty}\frac{2m+1}{2m}=1$$

$$\lim_{2m+1\to\infty}\left(\frac{2m+1+1}{2m+1}\right)^{(-1)^{2m+1}}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2m+1+1}{2m+1}\right)^{-1}=\frac{1}{1}=1$$

由于数列$\{x_n\}$的奇数项子列和其偶数项子列若收敛于同一值，则数列$\{x_n\}$的极限就是该值，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1$.

【真题 2】（1999, 3 分）设函数 $f(x)=a^x(a>0,\ a\neq1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]$ =________.

分析：先求和，再计算.

解答：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\ln a+2\ln a+\cdots+n\ln a)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\ln a=\frac{\ln a}{2}$$

【题型点睛】

1．收敛数列的运算法则

设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$， $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，那么

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$；

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$；

（3）当 $y_n\neq 0\,(n=1,2,\cdots)$ 且 $B\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$.

2．必须牢牢记住运算法则前提条件

已知的数列极限存在：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，并且作分母的数列极限不为零.

3．求数列极限的一般步骤

（1）结合数列前 n 项求和公式等常用公式，将数列适当变形；

（2）所得新数列满足四则运算法则的条件，然后计算得出结果.

4．实际解题方法运用

实际解题过程中往往是将极限四则运算法则同洛必达法则求极限、化成定积分求极限、夹逼定理等混合运用.

【即学即练】

1．（1990, 3 分）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$______.

2．（1993, 3 分） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right)=$______.

TOP2：利用 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 计算极限

【真题分析】

【真题 1】（2006, 12 分）设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}$，$x>0,y>0$．求：

（1） $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$ ；（2） $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$.

分析：（1）求 $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$ 是将 x 看做常数而对 y 求极限；

（2）直接利用洛必达法则和等价无穷小量代换求 $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$.

解答：

（1） $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)=\lim\limits_{y\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\frac{1}{y}+x}-\left(\dfrac{1-\dfrac{\sin\frac{\pi x}{y}}{\frac{\pi x}{y}}\cdot\pi x}{\arctan x}\right)\right]$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

而 $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{y}+x}=\dfrac{1}{x}$， $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\dfrac{\pi x}{y}}=1$，所以 $g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1-\pi x}{\arctan x}$.

（2） $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}-1+2x\pi}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-x+2\pi(1+x^2)}{2(1+x^2)}=\pi$$

所以 $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\pi$.

【题型点睛】

1． $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的变形

重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 在使用时可以变形：如 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$， $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\arcsin x}=1$.

特别地，当 $\varphi(x)\to0$ 时， $\lim\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

2．常用结论

一般地，已知 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，

（1）若 $g(x)\to0$，则 $f(x)\to0$；

（2）若 $f(x)\to0$，且 $A\neq0$，则 $g(x)\to0$.

【即学即练】

1．（2004, 4 分）若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$______，$b=$______.

TOP3：利用 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 计算极限

【真题分析】

【真题 1】（2002, 3 分）设常数 $a\neq\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$______.

分析：极限是 $\ln(1^{\infty})$形式，所以要用特殊极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 转化形式求解.

解答：$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left\{\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)}\right\}^{\frac{n}{n(1-2a)}}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n(1-2a)}=\dfrac{1}{1-2a}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\dfrac{1}{1-2a}$.

【真题 2】（2003, 4 分）极限 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$________.

分析：极限是1^{∞}形式，所以要用特殊极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 转化形式求解.

解答：$\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln[1+\ln(1+x)]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln[1+\ln(1+x)]}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)}{x}}=\mathrm{e}^2$.

【题型点睛】

1. 常用公式

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$；$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$；

当 $\varphi(x)\to\infty$ 时，$\lim\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$；当 $\varphi(x)\to 0$ 时，$\lim(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$.

还可导出以下结论：

（1）若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{f(x)}=\mathrm{e}^A$；

（2）若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{f(x)}=\mathrm{e}^A$.

2. 利用指数函数性质求1^{∞}型未定式极限 $\lim f(x)^{g(x)}$

更一般地，求1^{∞}型未定式的极限 $\lim f(x)^{g(x)}$，也可直接用以下公式进行计算：

$$\lim f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim(f(x)-1)g(x)}$$

【真题 2】也可这样求解：

$$\lim_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\cdot\ln(1+x)}=\mathrm{e}^2$$

3．利用洛必达法则求1^{∞}型未定式的极限

【真题 2】也可这样求解：

令$y=[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}$，则$\ln y=\dfrac{2+2\ln(1+x)}{x}$，

所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+2\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{2}{1+x}}{1}=2$，则$\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\mathrm{e}^2$.

4．利用两个重要极限公式求1^{∞}形式极限的一般步骤

（1）将函数的底数部分化为$1+\varphi(x)$（$\varphi(x)\to0$）或$1+\dfrac{1}{\varphi(x)}$（$\varphi(x)\to\infty$）形式；

（2）将函数化为$\left[\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}\right]^{f(x)}$（当$\varphi(x)\to\infty$时）或$\left[(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]^{f(x)}$（当$\varphi(x)\to0$时）；

（3）$\varphi(x)\to0$，$\lim f(x)=A$时，有$\lim\left[(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]^{f(x)}=\mathrm{e}^A$；

$\varphi(x)\to\infty$，$\lim f(x)=A$时，有$\lim\left[\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}\right]^{f(x)}=\mathrm{e}^A$.

【即学即练】

1．（2000, 3 分）若$a>0,b>0$且均为常数，则$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$________.

2．（1991, 3 分）下列各式中正确的是

（A）$\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$　　（B）$\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

（C）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-\mathrm{e}$　　（D）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$

【　】

TOP4：无穷小量及其性质相关题

【真题分析】

【真题 1】（2007, 4 分）当$x\to0^+$时，与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是

（A）$1-e^{\sqrt{x}}$　　（B）$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

（C）$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　（D）$1-\cos\sqrt{x}$

【　】

分析： 利用等价无穷小量结论

当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$.

解答： 当 $x\to 0^+$ 时，$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$ ，选（B）.

【真题 2】（2007, 4 分）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$________.

分析： 利用无穷小量与有界函数的乘积还是无穷小量结论.

解答： 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x}=0$ ，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^3}{2^x}+\dfrac{x^2}{2^x}+\dfrac{1}{2^x}}{1+\dfrac{x^3}{2^x}}=0$$

故 $\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}$ 是 $x\to+\infty$ 的无穷小量.

$|\sin x+\cos x|\leqslant 2$，故 $\sin x+\cos x$ 是有界函数，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=0$$

【真题 3】（2006, 12 分）确定常数 A、B、C 之值，使 $e^x\left(1+Bx+Cx^2\right)=1+Ax+o\left(x^3\right)$，其中 $o\left(x^3\right)$ 为 $x\to 0$ 时 x^3 的高阶无穷小.

分析： 利用泰勒公式及无穷小量的计算解题.

解答：

$$\begin{aligned}e^x\left(1+Bx+Cx^2\right)&=\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right]\left(1+Bx+Cx^2\right)\\&=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)+Bx+Bx^2+\frac{B}{2}x^3+o\left(x^3\right)+Cx^2+Cx^3+o\left(x^3\right)\\&=1+Ax+o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

所以　$1+B=A$ ，$\dfrac{1}{2}+B+C=0$ ，$\dfrac{1}{6}+\dfrac{B}{2}+C=0$ ，所以 $A=\dfrac{1}{3}, B=-\dfrac{2}{3}, C=\dfrac{1}{6}$.

【题型点睛】

1．无穷小

（1）定义：当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时如果函数 $f(x)$ 的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小；

特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n \to \infty$ 时的无穷小.

（2）注意：无穷小与极限过程有关，所以说一个函数是无穷小，必须指明自变量的趋向. 如 $f(x)=x-1$ 是 $x \to 1$ 时的无穷小，但当 $x \to 2$ 时，$f(x)=x-1$ 就不再是无穷小；无穷小不是指某个绝对值很小的常数，绝对值很小的常数的极限还是常数本身；“0”是可以作为无穷小的唯一常数.

2．高阶无穷小

（1）如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$；

（2）应用：举例说明，若 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{x-3}=0$，则 $\lim\limits_{x \to 3} f(x)=0$.

3．同阶无穷小

（1）定义：如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=c \neq 0$，就说 β 与 α 是同阶无穷小.

（2）应用：举例说明：若 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{x-3}=A \neq 0$，则 $\lim\limits_{x \to 3} f(x)=0$.

4．等价无穷小

（1）定义：如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=1$，就说 β 与 α 是等价无穷小，记为 $\alpha \sim \beta$；

（2）等价代换定理：设 α、α'、β、β' 是同一极限过程中的无穷小，且满足 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，及 $\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在或为无穷大，则 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$；

也有：若在某变化过程下，$\alpha(x) \sim \overline{\alpha}(x)$，则 $\lim f(x)\alpha(x) = \lim f(x)\overline{\alpha}(x)$.

（3）等价无穷小量在极限运算中占有重要地位，常见的等价无穷小量有：当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$、$\tan x \sim x$、$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$、$\arcsin x \sim x$、$\arctan x \sim x$、$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \dfrac{x}{n}$、$\ln(1+x) \sim x$、$e^x - 1 \sim x$ 等.

常见的等价无穷小可以推广：如当 $\varphi(x) \to 0$ 时，有 $\sin\varphi(x) \sim \varphi(x)$、$\sqrt[n]{1+\varphi(x)}-1 \sim \dfrac{\varphi(x)}{n}$、$1-\cos\varphi(x) \sim \dfrac{\varphi^2(x)}{2}$、$\ln(1+\varphi(x)) \sim \varphi(x)$ 等.

5．利用无穷小的等价代换求两个无穷小的商的极限的一般步骤

（1）将分子或分母通过等价代换，将函数化简；

（2）求化简后函数的极限.

6．等价代换的执行顺序

等价代换可以对分子、分母同时进行：$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$；也可只对分子或分母进行：$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta'}$；也可以只对部分乘积因子进行；但对于加、减中的每一项不能分别作代换.

【即学即练】

1．（2005, 4分）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{2x}{x^2+1}=$________.

2．（1992, 3分）当 $x\to 0$ 时，下列四个无穷小量中，哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量

（A）x^2　　（B）$1-\cos x$

（C）$\sqrt{1-x^2}-1$　　（D）$x-\sin x$

【　】

TOP5：判断间断点类型

【真题分析】

【真题 1】（2004, 4分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，

$$g(x)=\begin{cases}f\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0,\\ 0 & x=0,\end{cases}$$ 则

（A）$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点

（B）$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

（C）$x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

（D）$g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

【　】

分析：考查极限 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 是否存在，如存在，是否等于 $g(0)$ 即可，通过换元 $u=\frac{1}{x}$，可将极限 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 转化为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

解答：令 $u=\frac{1}{x}$，由于 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=a$，又 $g(0)=0$，故

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com