

高中数学补充教材

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心 编

# 思路与方法

SILU YU FANGFA



首都师范大学出版社

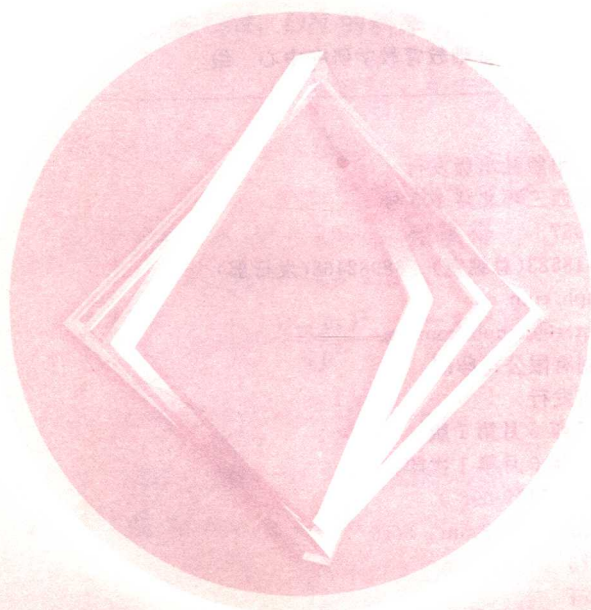
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

高中数学补充教材

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心 编

# 思路与方法

SILU YU FANGFA



首都师范大学出版社

CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

高中数学补充教材

思路与方法

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心 编

---

责任编辑 刘晓峰

首都师范大学出版社出版发行

地 址 北京西三环北路 105 号

邮 编 100037

电 话 68418523(总编室) 68982468(发行部)

网 址 cnuph.com.cn

E-mail master@cnuph.com.cn

北京嘉实印刷有限公司印刷

全国新华书店发行

版 次 2007 年 6 月第 1 版

印 次 2007 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81119-096-0

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 15.75

字 数 168 千

定 价 23.80 元

---

版权所有 违者必究

如有质量问题 请与出版社联系退换

# 前 言

高中数学是义务教育后普通高中中的一门主要课程，应使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习所必需的基础知识、基本技能、基本思想和方法，提高数学思维能力，培养应用意识和创新意识。

为了全面提高我市高中数学学科的教学质量，全面推进素质教育，经北京市教委领导批准，北京教育科学研究院基础教育教学研究中心中学数学教研室组织编写了这套高中数学补充教材，供高中数学教师和学生教与学时参考使用。

从2006年4月起，我们组织北京市一批特级教师对这套数学补充教材进行了修订。这次修订，以《全日制普通高级中学数学教学大纲》为依据，参考《普通高中数学课程标准(实验)》，从高中数学教学的重点或难点章节中精选出10个专题，分编为10册出版：《函数》、《直线和平面》、《概率与统计》、《向量》、《数列》、《不等式》、《圆锥曲线》、《思路与方法》、《应用性问题》、《开放与探究性问题》。其中，《概率与统计》、《思路与方法》是第一次编写出版。

这套补充教材力求体现课程改革的精神，适应高考改革的要求。在内容的安排上，加强了多样性和选择性，注重知识的系统性和深刻性；强调夯实基础，注重能力的培养；配备的例题、习题力求具备典型性、层次性和时代感。教师可根据学生的实际情况和教学需要，在必修课、选修课或课外活动中选择使用。

这套高中数学补充教材的编者，全部都是北京市特级教师。他们是（以姓氏笔划为序）：丁益祥、马成瑞、王人伟、王建民、王贵军、刘美伦、乔荣凝、何乃忠、李久省、谷丹、邴介夫、邵光砚、明知白、金宝铮、范登辰、周建华、郭玉山、郭立昌、段云鑫、梁丽平、曹福海、隋丽丽、储瑞年、蒋佩锦、薛川坪、鲁彬等老师。

北京市高中数学补充教材主编曹福海，副主编刘美伦、郭立昌。

《思路与方法》的编者：谷丹（第一章、第二章），金宝铮（第三章、第四章），王建民（第五章），刘美伦（统稿）。

在编写过程中，我们进行了多次研究讨论，吸收了许多教师宝贵的教学经验，力求既有利于教师教，又有利于学生学。但是由于我们水平有限，仍会有许多不足之处，衷心期望使用这套补充教材的教师与学生提出宝贵意见。

编 者  
2007年4月



# 目录

## 第一章 函数

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 1.1 集合问题 .....        | 2  |
| 1.2 函数概念问题 .....      | 6  |
| 1.3 函数性质问题 .....      | 13 |
| 1.4 函数图象与图象变换问题 ..... | 37 |
| 1.5 函数综合问题 .....      | 44 |

|           |    |
|-----------|----|
| 习题一 ..... | 55 |
|-----------|----|

## 第二章 数列

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 2.1 数列的概念、性质与前 $n$ 项和问题 ..... | 59 |
| 2.2 数列综合问题 .....              | 73 |

|           |    |
|-----------|----|
| 习题二 ..... | 87 |
|-----------|----|

## 第三章 三角

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| 3.1 化简求值问题 .....      | 90  |
| 3.2 附加条件的三角变换问题 ..... | 94  |
| 3.3 最值问题 .....        | 105 |
| 3.4 三角形中的边角关系问题 ..... | 115 |
| 3.5 三角综合问题 .....      | 120 |

|           |     |
|-----------|-----|
| 习题三 ..... | 124 |
|-----------|-----|

# MULU

## 第四章 立体几何

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 4.1 位置关系问题 .....   | 127 |
| 4.2 角度问题 .....     | 131 |
| 4.3 距离问题 .....     | 143 |
| 4.4 立体几何综合问题 ..... | 148 |

|           |     |
|-----------|-----|
| 习题四 ..... | 165 |
|-----------|-----|

## 第五章 解析几何

|                        |     |
|------------------------|-----|
| 引 言 .....              | 168 |
| 5.1 曲线的标准方程问题 .....    | 171 |
| 5.2 曲线的几何性质问题 .....    | 180 |
| 5.3 轨迹方程问题 .....       | 190 |
| 5.4 变量的取值范围与最值问题 ..... | 198 |
| 5.5 定值与证明问题 .....      | 208 |
| 5.6 解析几何综合问题 .....     | 218 |

|           |     |
|-----------|-----|
| 习题五 ..... | 228 |
|-----------|-----|

|             |     |
|-------------|-----|
| 答案或提示 ..... | 232 |
|-------------|-----|

# 第 一 章

## 函 数

高中数学中的函数问题，所涉及的知识点比较多，中学阶段分析、解决数学问题时所用到的重要的思想方法皆有所体现，因此，在学习中，应特别重视做好以下三点：

第一，准确、完整地理解函数中的数学概念，重视数学语言的规范表达。

第二，从问题出发，重视理解、把握解决问题的各种具体方法之间的联系与区别，随着学习过程的不断拓展、深入，不断将解决问题的不同方法梳理、整合成解决问题的方法体系。

第三，在解决问题的过程中，应特别注意提高应用各种数学思想方法的意识与能力，尤其是应用数形结合思想、方程思想、化归思想的意识与能力。

## 1.1 集合问题

在解决集合问题时，应特别重视完整、准确地理解集合的概念、集合的关系，集合运算等概念和表示方法，规范表达推理与运算过程.

 **例 1** 已知集合  $A = \{x \mid y = \sqrt{5-x}\}$ ，集合  $B = \{y \mid y = x^2 - 2, x \in \mathbf{R}\}$ ，求： $A \cap B$ .

● **分析** 集合  $A, B$  中的元素都是实数，因此可先分别化简集合  $A, B$  所表示的实数集合，再求交集.

● **解** 集合  $A$  表示函数  $y = \sqrt{5-x}$  的定义域，  
即  $A = (-\infty, 5]$ ;

集合  $B$  表示函数  $y = x^2 - 2$  的值域，

即  $B = [-2, +\infty)$ ;

所以  $A \cap B = [-2, 5]$ .

 **例 2** 已知集合  $A = \{(x, y) \mid y = 2x - 2, x \in \mathbf{R}\}$ ，集合  $B = \{(x, y) \mid y = 3x, x \in \mathbf{R}\}$ ，求： $A \cap B$ .

● **分析** 集合  $A, B$  中的元素是有序二元数对，可以和直角坐标平面上的点的坐标建立对应关系，而  $A, B$  中的点分别在函数  $y = 2x - 2$  和  $y = 3x$  的图象上，所以，可先求两个函数象的交点，再表示  $A \cap B$ .

● **解** 解方程

$$\begin{cases} y = 2x - 2, \\ y = 3x, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = -2, \\ y = -6. \end{cases}$$

所以  $A \cap B = \{(-2, -6)\}$ .

由例 1、例 2 可知，在判断元素和集合间关系、集合与集合间关系和进行集合运算时，应特别关注准确理解

集合中元素的类型(实数、点的坐标,等等),再根据集合中“描述法”对集合元素作出的具体限制,进行进一步的推理判断或计算,最后,应注意将集合间的求交、并、补运算的结果表示为集合的形式.(如例2的结果应表示为 $\{(-2, -6)\}$ ,不可表示为 $(-2, -6)$ 或 $x=-2$ ,且 $y=-6$ ,等等).

**例3** 已知集合  $A = \{x, x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ .  
集合  $B = \{x, x \in \mathbf{R} \mid x^2 - (a+1)x + 2a - 1 = 0\}$ , 当  $A \cap B = B$  时, 求实数  $a$  的取值范围.

**分析** 注意到集合  $A = \{1, 2\}$ , 所以, 可以从集合  $A$  中的元素入手, 也可以从集合  $B$  中的元素个数入手解决问题.

**解法1** 从集合  $A$  中的元素入手.

据已知, 集合  $A = \{1, 2\}$ . 集合  $B$  中关于  $x$  的方程

$$x^2 - (a+1)x + 2a - 1 = 0 \quad ①$$

的判别式:

$$\Delta = (a+1)^2 - 4(2a-1) = a^2 - 6a + 5 \quad ②$$

则可分四种情况求实数  $a$ .

(1) 若  $A \cap B = B = \emptyset$ , 则有

$$\Delta = a^2 - 6a + 5 < 0,$$

即

$$1 < a < 5.$$

(2) 若  $A \cap B = B = \{1\}$ , 将  $x=1$  代入方程①, 得

$$1 - (a+1) \cdot 1 + 2a - 1 = 0,$$

解得

$$a = 1,$$

将  $a=1$  代入②验算可得  $\Delta=0$ , 所以,  $a=1$  满足题目要求.

(3) 若  $A \cap B = B = \{2\}$ , 与(2)同理, 可将  $x=2$  代入①, 此时  $a$  无解.

(4) 据(3)知  $2 \notin B$ , 所以,  $A \cap B = B = A$  一定不

成立.

综上可知, 实数  $a$  的取值范围是  $[1, 5)$ .

● **解法2** 从集合  $B$  的元素个数入手解决问题.

(1)  $B = \emptyset$ ; 据前可得  $1 < a < 5$ .

(2)  $\text{card}(B) = 1$ ; 令  $\Delta = a^2 - 6a + 5 = 0$ , 得  $a = 1$  或  $5$ .

将  $a = 1$  代入方程①, 解得  $x_{1,2} = 1 \in A$ ;

将  $a = 5$  代入方程②, 解得  $x_{1,2} = 3 \notin A$ ;

所以  $a = 1$  符合题目要求,  $a = 5$  舍去.

(3) 若  $\text{card}(B) = 2$ , 则据  $A \cap B = B$ , 应有:

$$\begin{cases} \Delta = a^2 - 6a + 5 > 0, \\ x_1 + x_2 = 1 + 2 = 3 = a + 1, \\ x_1 x_2 = 1 \cdot 2 = 2 = 2a - 1. \end{cases}$$

上述联立式无解.

综上, 满足题目条件的实数  $a \in [1, 5)$ .

 **例4** 已知集合  $A = \{1, 1+d, 1+2d\}$ , 集合  $B = \{1, r, r^2\}$ , 且  $A = B$ , 求实数  $d, r$  的取值和集合  $A$ .

● **解** 据题意, 可分两种情况求解  $d, r$ .

(1) 令  $\begin{cases} 1+d=r, \\ 1+2d=r^2, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} d=0, \\ r=1, \end{cases}$  但此时  $1 = 1+d = 1+2d$ , 与集合元素互异的要求不符, 故舍去.

$$(2) \text{ 令 } \begin{cases} 1+d=r^2, \\ 1+2d=r, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} d=-\frac{3}{4}, \\ r=-\frac{1}{2}, \end{cases}$$

可得  $A = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$ .

 **例 5** 已知集合  $A = \{x \mid x < 2 \text{ 且 } x \geq 5\}$ , 集合  $B = \{x \mid (x-a)(x-2a+3) < 0\}$ . 求: 当  $A \cup B = A$  时, 实数  $a$  的取值范围.

● **解** 分两种情况求实数  $a$  的取值范围.

(1) 当  $B = \emptyset$  时, 即  $a = 2a - 3$  时,  $a = 3$ , 此时  $B = \{x \mid (x-a)^2 < 0\} = \emptyset$ . 则必有  $A \cup B = A$ .

(2) 当  $B \neq \emptyset$  时,

$$\begin{cases} a \neq 3, \\ a \leq 2, \\ 2a - 3 \leq 2, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a \neq 3, \\ a \geq 5, \\ 2a - 3 \geq 5. \end{cases}$$

解得  $a \leq 2$  或  $a \geq 5$ .

综上, 满足条件的实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, 2] \cup \{3\} \cup [5, +\infty)$ .

● **说明** 例 3、例 4、例 5 的解题方法体现了在解决有关方程、不等式问题与集合关系或运算问题时常见思路与应注意的问题: (1) 要善于利用互异性解决问题, 也要注意利用互异性来检验解得结果的合理性. (2) 由于  $A \cup \emptyset = A$ ,  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ,  $\emptyset \subseteq A$  等性质, 在解决不等式、方程问题时, 应特别注意关注、讨论给定集合为空集时的情况, 以免漏解、错解.

 **例 6** 定义集合  $A, B$  的一种运算:  $A \cdot B = \{x \mid x = x_1 + x_2, \text{ 其中 } x_1 \in A, x_2 \in B\}$ , 若  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ , 求  $A \cdot B$  的真子集的个数.

● **分析** 可先求出  $A \cdot B$  所有元素, 再求子集个数.

● **解** 据运算  $A \cdot B$  的定义, 集合  $A \cdot B$  中可能含有的元素为

$$\begin{aligned} 1+1=2, 1+2=3, 2+1=3, 2+2=4, 3+1=4, \\ 3+2=5; \end{aligned}$$

据集合中元素的互异性可知

$$A \cdot B = \{2, 3, 4, 5\}.$$

所以  $A \cdot B$  真子集的个数为  $2^4 - 1 = 15$ .

 **例 7** 集合  $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A$  是  $S$  的一个子集, 当  $x \in A$  时, 若有  $x-1 \notin A$ , 且  $x+1 \notin A$ , 则称  $x$  为  $A$  的一个“孤立元素”, 试写出  $S$  中无“孤立元素”的所有四元子集.

 **分析** 根据“孤立元素”的定义可知, 若  $x \in S$  不是孤立元素, 则有  $x-1 \in A$  或  $x+1 \in A$ , 所以, 只需保证集合中每个元素都至少有一个“相邻”元素即可.

 **解** 用穷举法写出  $S$  中无“孤立元素”的所有真子集:

$\{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 3, 4\}, \{0, 1, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}.$

 **说明** 例 6、例 7 都是基于集合的基本知识, 给出了新的概念或运算. 解决这类问题, 可以先将这些概念、运算具体运用到给定集合的元素上去, 用列举法将满足条件的(某些)“新”元素或将运算结果表示出来, 再寻找、确定解决问题的完备过程.



## 1.2 函数概念问题

在函数的定义域、对应法则、值域三要素中, 定义域和对应法则是决定性的两个要素. 探索、选择解决函数概念问题的思路与方法时, 要特别注意: 结合定义域, 准确理解函数解析式; 根据已知条件, 选择适当的方法确定函数解析式或求函数值.

**例 1** 已知  $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ , 则  $f(x)$  的解析式可取为( ).

A.  $\frac{x}{1+x^2}$

B.  $-\frac{2x}{1+x^2}$

C.  $\frac{2x}{1+x^2}$

D.  $-\frac{x}{1+x^2}$

**分析** 可以用换元法求出  $f(x)$  的解析式, 也可以充分利用各选项提供的信息, 用试数法与排除法结合选出正确结果.

**解法1** 利用换元法求  $f(x)$  的解析式.

令  $t = \frac{1-x}{1+x}$ , 则  $x = \frac{1-t}{1+t}$ , 代入已知条件中有

$$f(t) = \frac{1 - \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}{1 + \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2} = \frac{2t}{1+t^2},$$

即  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2},$

所以选 C.

**解法2** 在  $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  中, 令  $x=0$ , 得  $f(1) =$

1, 而 A, B, C, D 选择项中,  $f(1)$  的值分别为  $\frac{1}{2}, -1,$

1,  $-\frac{1}{2}$ , 故选 C.

**例 2** 已知函数  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$  在点  $x_0$  处取得极大值 5, 其导函数  $f'(x)$  的图象经过点  $(1, 0), (2, 0)$ , 如图 1-1 所示, 求:

(1)  $x_0$  的值;

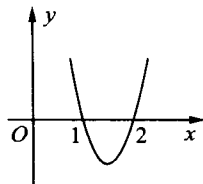


图 1-1

(2)  $a, b, c$  的值.

● **分析** 根据导函数的取值很容易求得  $x_0$ , 再利用极值、 $f'(1)=f'(2)=0$  布列三个关于  $a, b, c$  的方程, 则第(2)问也可以顺利求出结果.

● **解法1** (1) 由  $f'(x)$  的图象可知, 当  $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x \in (1, 2)$  时,  $f'(x) < 0$ , 因此  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 1)$  和  $(2, +\infty)$  上单增, 在区间  $(1, 2)$  上单减, 因此  $f(x)$  在  $x=1$  处取得极大值, 即  $x_0=1$ .

(2)  $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ , 则有

$$\begin{cases} f'(1)=3a+2b+c=0, \\ f'(2)=12a+4b+c=0, \\ f(1)=a+b+c=5, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a=2, \\ b=-9, \\ c=12. \end{cases}$$

● **解法2** (1) 同解法 1.

(2) 设  $f'(x)=m(x-1)(x-2)=mx^2-3mx+2m$ .

又  $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ ,

据对应项系数相等和  $f(1)=5$  的条件有

$$\begin{cases} m=3a, \\ -3m=2b, \\ 2m=c, \\ f(1)=a+b+c=5, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a=2, \\ b=-9, \\ c=12. \end{cases}$$

● **说明** 在求函数解析式问题中, 换元法和待定系数法是两种最基本的方法. 换元法的一般步骤为: 已知  $f(g(x))$  的具体表达式, 可令  $t=g(x)$ , 反解  $x=g^{-1}(t)$ ; 再将  $x=g^{-1}(t)$  代入  $f(t)$  的具体表达式中, 整理得  $f(t)$  的表达式; 将  $f(t)$  表达式中的字母  $t$  皆代换为字母  $x$ , 即可求得  $f(x)$  的解析表达式. 待定系数法的主要入手点为根据已知的数、形条件, 布列方程组, 注意,  $n$  个未知数

应布列  $n$  个独立的方程，解之，即可得待求解析式。

 **例 3** 设函数  $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & (x \geq 4), \\ f(x+3) & (x < 4). \end{cases}$

求：  $f(\log_2 3)$  的值。

● **解**  $\because 1 = \log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 = 2 < 4,$

$$\therefore f(\log_2 3) = f(\log_2 3 + 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 3 + 3} = \frac{3}{8}.$$

 **例 4** 已知函数  $f(x)$  满足对任意  $x, y \in \mathbf{R}$ , 都有  $f(x+y) = f(x)f(y)$ ,  $f(1) = 3$ .

求：  $\frac{f^2(1)+f(2)}{f(1)} + \frac{f^2(2)+f(4)}{f(3)} + \frac{f^2(3)+f(6)}{f(5)} + \frac{f^2(4)+f(8)}{f(7)}.$

● **分析** 注意到  $f^2(n) = f(n) \cdot f(n) = f(2n)$ ,  $\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(n) \cdot f(1)}{f(n)} = f(1)$ , 所以, 可以利用函数的已知性质, 先化简求值式, 再求具体数值.

● **解** 原式  $= \frac{f(2)+f(2)}{f(1)} + \frac{f(4)+f(4)}{f(3)} + \frac{f(6)+f(6)}{f(5)} + \frac{f(8)+f(8)}{f(7)}$

$$= 2\left(\frac{f(1+1)}{f(1)} + \frac{f(3+1)}{f(3)} + \frac{f(5+1)}{f(5)} + \frac{f(7+1)}{f(7)}\right) = 24.$$

● **说明** 例 3、例 4 是“求函数值”问题中比较常见的两类问题：求分段函数的函数值和求比较复杂的函数值运算式的值。解决这些问题的入手点都是：(1) 准确理解题目中抽象函数的条件(如例 3 中的  $f(x+3)$ , 例 4 中的  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ )；(2) 认真分析自变量和各自变量间的关系，再决定解决问题的具体方法。

 **例 5** 已知函数  $y = \log_2(x^2 - ax + 3 - a)$ , 求分别满足下列条件的实数  $a$  的取值范围: (1) 函数的定义域为  $\mathbf{R}$ ; (2) 函数的值域为  $\mathbf{R}$ .

 **分析** 注意到函数  $y = \log_2 x$  是定义域为  $\mathbf{R}^+$ 、值域为  $\mathbf{R}$  的单值对应函数(对任意值域内的一个象  $y_0$  有且只有定义域内的一个原象  $x_0$  与之对应), 所以, 欲使  $y = \log_2(x^2 - ax + 3 - a)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 则必须使  $g(x) = x^2 - ax + 3 - a$  的值域为  $\mathbf{R}^+$  的子集; 而欲使  $y = \log_2 g(x)$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 则必须使  $\mathbf{R}^+$  为  $g(x)$  的值域的子集. 据此, 可分别列出实数  $a$  应满足的条件.

 **解** 设  $g(x) = x^2 - ax + 3 - a$ .

(1) 欲使  $y = \log_2 g(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 则可令

$$\Delta = (-a)^2 - 4(3 - a) < 0,$$

解得  $a \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$ .

(2) 欲使  $y = \log_2 g(x)$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 则可令

$$\Delta = a^2 + 4a - 12 \geq 0,$$

解得  $a \in [-6, 2]$ .

 **例 6** 设函数  $f(x) = -\frac{x}{1+|x|}$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 区间  $\mathbf{M} = [a, b]$ ,  $a < b$ , 集合  $\mathbf{N} = \{y \mid y = f(x), x \in \mathbf{M}\}$ , 则使  $\mathbf{M} = \mathbf{N}$  成立的实数对  $(a, b)$  有( ).

- A. 0 个                      B. 1 个  
C. 2 个                      D. 无数多个

 **分析** 欲使  $\mathbf{M} = \mathbf{N}$ , 可先考虑  $y = f(x)$  的单调性, 利用  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上取到最值点的信息布列关于  $a, b$  的方程.

 **解** 因为  $f(x) = -\frac{x}{1+|x|}$  为奇函数, 且  $x \geq 0$  时,