高职高专“十一五”规划教材

应用数学基础(Ⅰ)

——一元微积分

高小明 主编

化学工业出版社

应用数学基础(上)

高职高专“十一五”规划教材

应用数学基础（Ⅰ）
——一元微积分

高小明　主编

化学工业出版社

·北京·

《应用数学基础》是根据教育部制定的《高等数学课程教学基本要求》进行编写的．全套书分三册，第一分册是一元微积分，内容包括常微分方程和无究级数，特别在最后一章中给出了运用 Mathematica 数学软件求解“微积分学”的方法；第二分册是空间解析几何和多元函数微积分；第三分册是线性代数、概率论与数理统计和离散数学．

本书为《应用数学基础（Ⅰ）——一元微积分》分册，以强化几何说明，重视直观、形象的理解为主线，以最基本、最重要、最有实用价值的思想与方法贯穿于书中．本书通过结合几何学、物理学、经济学、电子科学、力学以及其他学科的大量实例，降低了理论深度对解题技巧训练的要求，可增强学生应用数学去理解、描述实际问题的能力，加深学生对“微积分学”的理解，也给数学教师在内容选择和课时安排上提供了很大的余地．作者将多年教学和科研工作的经验融入书中，在编排形式上也有所创新，尽力使本书具有结构严谨、逻辑清晰、注重应用、文字流畅、叙述详尽、例题丰富、便于自学等优点．

本书可供高等学校尤其是高职高专各类专业的学生选用，适用少学时（80 学时以下）教学；也可作为数学教师、应用数学的工程技术人员和广大数学爱好者的参考资料．

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础（Ⅰ）——一元微积分/高小明主编．—北京：化学工业出版社，2007.8

高职高专“十一五”规划教材

ISBN 978-7-122-00608-0

Ⅰ．应…　Ⅱ．高…　Ⅲ．微积分-高等学校：技术学院-教材　Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 125225 号

责任编辑：蔡洪伟　郎红旗　　文字编辑：杨欣欣

责任校对：宋　玮　　装帧设计：高小明　史利平

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　刷：北京市彩桥印刷有限公司

装　　订：三河市万龙印装有限公司

787mm×1092mm　1/16　印张 13¾　字数 736 千字　　2007 年 8 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：26.00 元

应用数学基础（Ⅰ）——一元微积分
编写人员名单

主　编：高小明

副主编：康永强　吴立炎　徐宝庆　黄颜昌

编　委：刘　芳　胡　煜　黄颜丽　李惠珠

前　言

一直以来，传统的“微积分学”教学重视演绎及推理，重视定理的严格论证，这对培养学生的数学素养确有好处，但从应用的角度讲，需要的往往不是论证的过程，而是它的结论. 因此对于高职高专以及工科各专业的学生而言，在“微积分学”教学中，应淡化严格的数学论证，强化几何说明，重视直观、形象地理解，把学生从烦琐的数学推导和不具一般性的数学技巧中解脱出来，这样做也符合教育部对高职高专教育所要求的理论“必需、够用为度”的原则. 这一点在全国各专科和部分本科院校最近几年的“微积分学”教学中也达成了共识，本书在编写过程中也着重注意了这一点.

虽然直到今天，高等院校不把“微积分学”作为基础课来开设的专业已经很少，但很多院校在专业上的课程设置已经发生了很大的变化，尤其是职业技术类院校，其主要培养目标是高等技术应用型人才，突出人才培养对当前社会需求的针对性，使毕业生在人才市场上更有特色和竞争优势，而“微积分学”作为基础课的学时数也随之发生了变化，其中部分院校对“微积分学”的学时数进行了缩减. 本书基于这种现实情况，在内容上给出了很大的选择余地. 作为从教二十几年的数学教师而言，不妨就这个问题多说几句：由于社会需求具有多变性，要求学生具备一定的适应社会需求变化和可持续发展的能力，这就要求我们也要重视“微积分学”课程的教学需求. 因为我们都知道，“微积分学”在现代科学与技术中的应用越来越广泛，以至在当代大学生的知识能力结构中，“微积分学”已成为必不可少的部分，当然对高职高专的学生也不例外.

“微积分学”作为基础课，其教学内容的稳定性是相对的，它也在随着科学、技术的进步而发展，随着教学体系与观念的更新而发展. 因此，“微积分学”的教学也需要改革. 本书也正是出于这样的目的，针对高职高专以高等技术应用型人才为培养目标出发，以应用为目的，以必需、够用为度，把培养学生应用“微积分学”解决实际问题的能力与素养放在首位.

实践表明，许多学了“微积分学”的学生，在应用“微积分学”去理解、描述与处理实际问题时仍有困难. 我们知道，“微积分学”区别于初等数学的本质在于：处理问题的范围由静态发展到动态，由均匀发展到非均匀，由简单规则的几何图形发展到复杂不规则的几何图形，处理问题的范围由比较特殊发展到较为一般，这也正是“微积分学”得以广泛应用的根源. 它不仅是引入导数与定积分概念的基础，也是应用“微积分学”描述实际问

题、解决实际问题的知识链条．本书在这方面重点做了补充．我们将其以最基本、最重要、最有实用价值的思想与方法贯穿于书中，通过结合几何学、物理学、经济学、电子学、力学以及其他学科的大量实例，加深学生对“微积分学”的理解，增强应用数学去理解、描述实际问题的能力．

作者在多年的教学实践中，明显地感受到许多学生学不好数学的重要原因之一是做题太少或做题不当．著名数学家华罗庚曾说过：“学数学如果不做题，等于入宝山而空返”．事实上，进行一定数量典型题目的练习，对于深入理解和灵活运用基本概念和基本理论、正确掌握解题的方法和技巧、提高分析问题和解决问题的能力都是必不可少的重要教学环节，对于启迪学生学习数学的兴趣和培养良好的素质是至关重要的．另外，相当数量的学生不知道在本专业以内学习数学有什么用，或用在哪里？本书就是本着这样的宗旨，从典型例题和实际应用入手，并在每章配有习题或复习题，由浅入深、一步一步地帮助学生学好数学、用好数学；同时，在每章的开头都给出了“学习目标”、“学法建议”及重点、难点分析．在书中相关内容的页边留白处还加了适当的注解，总结了作者多年的教学心得，或提供学习经验，以供教与学的参考．

书中对“微积分学”中的定理、性质等证明过程略去不讲（个别证明对理解概念有帮助的除外），而是以图形的直观说明为主，重点、难点突出，对最基础的“极限”概念的建立也是采用了以函数图形的直观说明为主，略去了“ε-δ 语言”的分析定义．

书中对每一部分的例题和习题都经过了严格的筛选，具有较强的典型性和代表性；对重要的例题都加入分析、注释和多种解法，以使读者收到事半功倍的效果．

考虑到不同专业的学习需要，每部分内容都尽可能地增加了实际应用例子，以使读者更直观、更形象、更简便地学习数学、运用数学．

本书在最后一章给出了运用 Mathematica 数学软件求解“微积分学”的方法，学生自己可以通过书中的实例在计算机上实际演算．应用“微积分学”于实际，最终目的是为了了解所研究对象之间的数量关系，在这个意义上讲最终归结为计算．随着计算机和计算技术的发展，求解数学问题有了强大的计算工具，功能强大的 Mathematica 数学软件的出现，使运用计算机求解数学问题更加方便；它不仅大大扩展了运用“微积分学”求解数学问题的天地，也大大节省了学生用于数学计算的精力，因此培养运用数学软件求解数学问题的能力，也逐步引入高等学校的数学教学中．在数学课时有限的情况下学生也可以通过本书自学．本书在这一部分以最直观、最简单的形式编写，学生只要具备最基本的计算机操作能力就完全可以达到计算微积分的目的．

限于编著者的水平，书中定有不当之处，敬请批评雅正，以期不断修改和提高．

编者

2007 年 6 月

目　录

第 1 章 函数与极限 1

【学习目标】

- 理解函数的概念．
- 了解分段函数、基本初等函数、初等函数的概念．
- 了解反函数、复合函数的概念，会分析复合函数的复合结构．
- 会建立简单实际问题的函数模型．
- 了解极限的描述性定义．
- 了解无穷小、无穷大的概念及其相互关系和性质．
- 会用两个重要极限公式求极限．
- 掌握极限的四则运算法则．
- 理解函数在一点连续的概念，知道间断点的分类．
- 了解初等函数的连续性及连续函数在闭区间上的性质（最大值和最小值定理、根的存在定理、介值定理）．
- 会用函数的连续性求极限．

重点 函数的概念、复合函数和初等函数的概念，会求函数的定义域．间断点的分类，分段函数在分段点的连续性．

难点 分段函数的概念，建立简单实际问题的函数模型．极限的求法，两个重要极限，函数在一点连续的概念．

学法建议

1．本章的重点是极限的求法及函数在一点的连续的概念，特别是求极限的方法，灵活多样．因此要掌握这部分知识，建议读者自己去总结经验体会，多做练习．

2．本章概念较多且互相联系，例如：收敛，有界，单调有界；发散，无界，无穷大；极限，无穷小，连续等．只有明确它们之间的联系，才能对它们有深刻的理解，因此读者要注意弄清它们之间的实质关系．

3．要深刻理解在一点的连续概念，即极限值等于函数值才连续．千万不要求到极限存在就下连续的结论，特别注意判断分段函数在分段点的连续性．

微积分是研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支．微积分是建立在实数、函数和极限的基础上的．微积分是与实际应用联系着发展起来的，它在天文学、力学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学、社会科学及应用科学等各个分支中，有越来越广泛的应用．微积分是一种数学思想，‘无限细分’就是微分，‘无限求和’就是积分．无限就是极限，极限的思想是微积分的基础，它是用一种运动的

思想看待问题．如果将整个数学比作一棵大树，那么初等数学是树的根，名目繁多的数学分支是树枝，而树干的主要部分就是微积分．微积分堪称是人类智慧最伟大的成就之一．从 17 世纪开始，随着社会的进步和生产力的发展，以及如航海、天文、矿山建设等许多课题亟待解决，数学也开始研究变化着的量、数学进入了“变量数学”时代，即微积分不断完善成为一门学科．整个 17 世纪有数十位科学家为微积分的创立做了开创性的研究，但使微积分成为数学的一个重要分支的还是牛顿和莱布尼茨．

1.1　函数

1.1.1　函数的概念

函数是微积分学的重要基础概念．函数理论（其中最基本的部分是微积分）由于深刻揭示了客观世界中各种量之间的联系和变化规律，成为科学技术的有力工具．

自然界里的观察量都可以看成是变量，然后我们从自然界里归纳出的自然规律常常表现为变量与变量之间的依赖关系．而函数实际上就是为了表述这些变量与变量之间的依赖关系而抽象出来的数学观念．

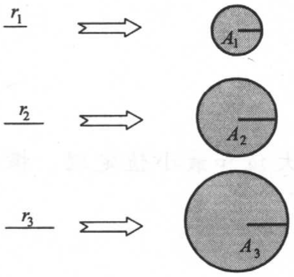


图 1-1

例 1　圆的面积为 $A=\pi r^2$，因此，给出一个半径 r，就能求得一个对应的面积 A，于是，这种关系式可以写成一个函数的形式（图 1-1 给出了不同的 r 对应不同的面积 A）．

$$A=f(r)=\pi r^2$$

例 2　各种报表，如假设 x 表示月份，y 表示某项金额．下表给出了 x 和 y 之间的依赖关系．

x(月)	1	2	3	4	5	6
y(金额)	543	762	564	660	743	800

例 3　某工厂生产某产品年产量为若干台，每台售价为 300 元，当年产量超过 600 台时，超过部分只能打 8 折出售，这样可出售 200 台，如果再多生产，则本年就销售不出去，试写出本年的收益函数模型．

◆通过例 3 可以看到，对应规律 f，并不总是能用公式即通过有限次的初等数学运算和复合步骤，把表示有关变量的符号与必要的常数联结在一起的数学式子表示出来．

解：设某产品年产量为 x 台，收益函数为 $y(x)$．因为产量超过 600 台时，售价要打 8 折，而超过 800 台时，多余部分本年销售不出去，从而没有效益，因此，把产量划分为三个阶段来考虑收益．根据题意，有

$$y(x)=\begin{cases} 300x & 0\leqslant x\leqslant 600 \\ 300\times 600+0.8\times 300(x-600) & 600<x\leqslant 800 \\ 300\times 600+0.8\times 300\times 200 & x>800 \end{cases}$$

即收益函数模型为

$$y(x)=\begin{cases} 300x & 0\leqslant x\leqslant 600 \\ 180000+240(x-600) & 600<x\leqslant 800 \\ 228000 & x>800 \end{cases}$$

以上三例的实际意义虽然不相同，但都具有共同之处：每个例子所描述的变化过程都有两个变量，当其中一个变量在一

定的变化范围内取定一个数值时，按照每个确定的对应规则(法则)，另外一个变量有唯一确定的数值与之对应．变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质．

我们下面把它们各自的对应关系抽象出来给出函数的定义．

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有唯一确定的数值与其对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$．数集 D 称为该函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量．

当自变量 x 取数值 x_0 时，因变量 y 按照法则 f 所取定的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$．当自变量 x 取遍定义域 D 的每个数值时，对应的函数值的全体组成的数集 $W=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数的值域(如图 1-2 所示)．

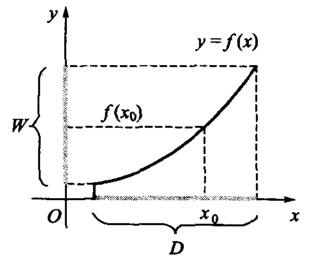


图 1-2

例如 $f(x)=x^3+4x^2-10$ 就是一个特定的函数，f 确定的对应规则为

$$f(\quad)=(\quad)^3+4(\quad)^2-10$$

又如函数

$$y=\frac{\sqrt{x+1}}{\sin(x^2+1)}$$

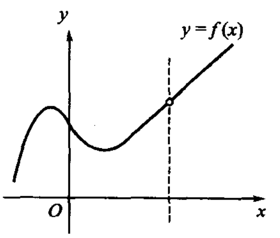
其对应规则为

$$f:\frac{\sqrt{(\quad)+1}}{\sin[(\quad)^2+1]}$$

将自变量 x 的值代入“框架”的各（　）中，经过若干次数学运算就得出对应的 y 值．

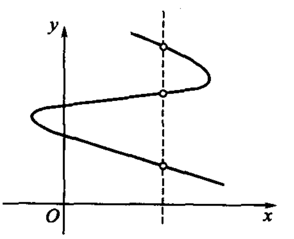
为了更容易地理解变量之间的对应规则，可以使用图示的方式．

对于一元函数 $y=f(x)$，它的变量相应地在平面上的直角坐标系的 x 轴和 y 轴上取值，在一定条件下，就能得到一个几何图像，表达了函数的数值分布．用图来表示变量之间的依赖关系，可以很直观地说明这种依赖关系的很多性质．在微积分的学习中，我们也应该善于通过画图来培养对于抽象概念的直观能力，而初学者往往忽略这点，甚至不屑于此，这是应该极力避免的．



(a) 函数图形

从几何图形上可以看出；对于每一个定义域里的元素 x 而言，值域里恰有一个，且仅有一个元素 y 与其对应．因此，若一垂直线与曲线有两个或两个以上的交点（参见图 1-3)，则该曲线不是函数的图形．此测试曲线是否为函数图形的法则称为垂直线测试法．



(b) 非函数图形

图 1-3

总结一下，函数概念最关键的地方，就是**它的对应关系，或者说依赖关系，必须是因变量由自变量唯一确定**．尽管我们可以考虑一对多的多值函数，比方说解析几何里的一些曲线方程，要对它们

应用微积分的方法，那种情形必须给予特别的处理，或者把它们分割为多个函数，总之为了统一地发展我们后面要讨论的微积分技术，我们总是坚持这一点为函数的必要条件．

第二点需要特别用心的地方就是**根据函数关系由定义域求值域**．或者是只是根据函数关系的数学表达式本身，来求出具有数学意义的定义域和值域，或者还要求具有实际意义而不只是具有数学意义的定义域和值域．这就要求我们熟练掌握各种函数的数学性质，特别是我们下面要讨论的几种基本初等函数的性质．我们将在下面结合例题更详细地讨论这点，并且希望读者多作练习．

并不是说我们需要把一个函数用某种方式给出，就可以说是已经掌握了这个函数．因为对于一个函数的了解，并不是知道了这个函数所代表的所有数值对应，就能判断这个函数的性质，在实际问题当中，我们更加需要得到的是一个函数的性质，因为某种变化规律所具有的性质，往往表达了某个概念，而人类对于事物的了解最终是基于概念的理解，而不是一堆数据本身．

下面我们就来讨论函数所可能具有的几种性质．这几种性质都具有非常直观的意义，只需要用初等的方式就可以表达出来．

1.1.2　函数的性质

（1）函数的单调性

从直观的感觉来看，所谓单调表明了**函数在某点附近具有平滑的变化**，如果把函数的自变量与因变量分别在平面上的直角坐标系的两个坐标轴上取值，得到函数的图像，就可以看到函数在某点附近的单调性，意味着函数在这点附近没有剧烈的震荡，或者这点左边的点的函数值比右边的点的函数值大，或者反过来右边的点的函数值比左边的点的函数值大．这样在一个区间内每个点都具有同样的一个性质，就可以定义这个区间的单调性．

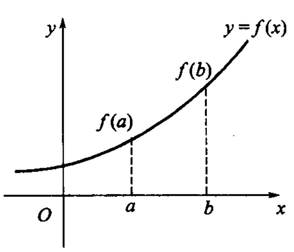


图 1-4

精确地说，函数 $y=f(x)$ 在区间 D 内的**任意**两点 a、b，只要 $a<b$，就有 $f(a)<f(b)$ 或者是 $f(a)>f(b)$，那么就称这个函数在区间 D 具有单调性．如果是 $f(a)<f(b)$ 的情形，则称为单调增加；如果是 $f(a)>f(b)$ 的情形，则称为单调减少．这是严格的情形，如果上面的大于和小于分别是大于或等于和小于或等于，则是非严格的单调性（图 1-4）．

注意上面定义里的“任意”两个字，应该说这是一个很严格的条件，也是单调性定义里的关键所在．

例如 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 是单调减少的，在区间 $(0,+\infty)$ 是单调增加的．

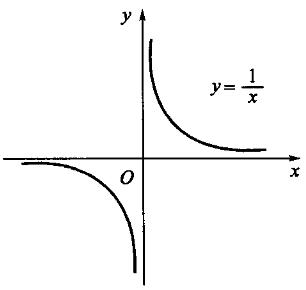


图 1-5

函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 是单调减少的，在区间 $(0,+\infty)$ 仍然是单调减少的（图 1-5）．

（2）函数的有界性

从直观的感觉来看，函数的有界性就是函数图形在某个特定范围或者是在整个定义域的上下“高度”有限．或者就说是函数在某个特定区间或者在整个定义域都不存在函数取值为正无穷大或负无穷大的点．

精确地说，就是取函数 $y=f(x)$ 有定义的一个集合 D，如果存在一个确定的正数 M，无论 M 可能有多么大，只要对于集合 D 内的所有的点 x，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，那么就称函数 $f(x)$ 在集合 D 上有界．

注意上面定义中函数外面的绝对值符号，这表明有界性是同时在上下加以限制的．

这个性质是非常好理解的．之所以提出这么一个性质出来，倒不是因为有界性具有什么特别的趣味，而是反过来，不具有有界性的函数常常是我们必须加以注意和分析的对象，因此我们提出函数的有界性，正是为了用于判断函数是否存在无界的性质．

从上面的定义可以看到，我们是无法直接应用这个定义来证明某个函数是否有界的，因为这是一个存在性定义，我们必须通过其他的方法，来找到这么一个 M，才能得到证明，而如何找到这个 M，则是这个定义所没有给出的．

另外，对于这个 M，只是要求其存在性，而没有要求其唯一性，实际上，这个 M 不可能具备唯一性，因为只要存在一个 M 满足条件，由于 M 是一个有限大小的正数，那么任何一个比 M 大的数同样可以作为函数的界．值得注意的是有界性是依赖于定义区间的．例如 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的．但在区间 $(0,1)$ 内则是无界的．

图 1-6 是用图像表示的有界性的两种典型情况．

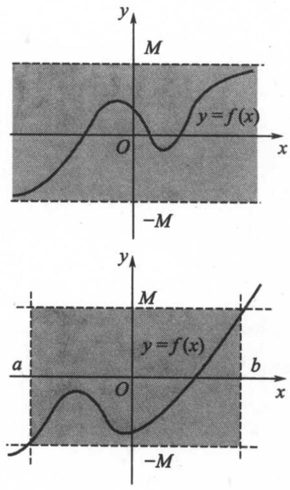


图 1-6

◆例如 $|\sin x|\leqslant 1$，是有界函数，但 2、3 等都可以作为它的界．

（3）函数的奇偶性

同样可以从图像方面得到对于奇偶性的很好的理解，就是看在某个区间内，整个函数图形是否具有对于 y 轴的镜像对称或者对于原点的中心对称性．这样我们至少可以知道，首先这个函数的**定义域必须是 x 轴上关于原点对称的**（图 1-7）．

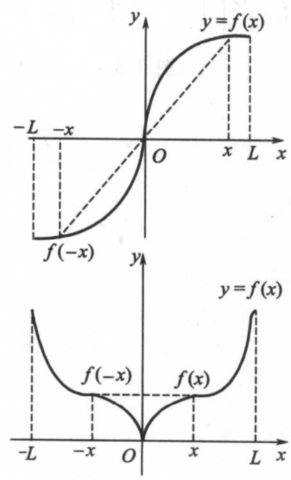


图 1-7

精确地说，就是取函数有定义的一个关于原点对称的区间 $(-L,L)$，

① 如果对于在区间 $(-L,L)$ 内任意的一点 x，都有

$$f(-x)=-f(x)$$

那么 $f(x)$ 就是这个区间内的奇函数．

② 如果对于在区间 $(-L,L)$ 内任意的一点 x，都有

$$f(-x)=f(x)$$

那么 $f(x)$ 就是这个区间内的偶函数．

我们可以看到，这个定义是与有界性的定义不同的一种定义方式，就是我们一般可以直接应用这个定义来证明某个函数的奇偶性，这种定义方式就是属于构造性的定义方式．也就是直接给出了符合定义的函数是如何构造出来．在今后的学习当中，我们应该注意到这两种定义方式的差别所在．

注意：奇偶函数的应用颇为广泛，几乎贯穿全部微积分学．

（4）函数的周期性

从直观上来看，就是整个函数图形是否可以通过沿着 x 轴，无论是朝哪个方向，平移一个有限大小的距离，得到的函数图像与原来的函数图像可以完全重合．也就是说具有沿着 x 轴的平移不变性质．把这个意思精确表达出来，就是周期性的定义：

对于实数上定义的函数 $y=f(x)$，如果存在一个非零的实数 L，使得

$$f(x)=f(x+L)$$

总是成立，那么就说函数 $y=f(x)$ 是实数上的周期函数，周期为 L.

注意：这里 L 的正负无所谓，因为函数在整个 x 轴上定义，L 为正数，只是表明函数沿着 x 轴向右平移 L 的距离；L 为负数，只是表明函数沿着 x 轴向左平移 L 的距离，这两种平移方式是等价的．我们通常将满足上面等式的最小正数 L 称为函数的周期，如图 1-8 所示．

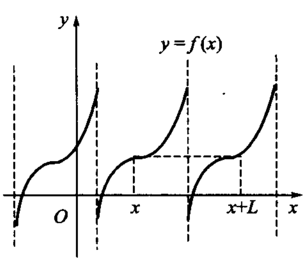


图 1-8

可以看到，严格的平移不变性要求函数在整个 x 轴上都有定义，否则，进行平移必定会使得函数超出本来的定义域．不过，在某些情况下，也可以定义在有限区间内的周期性，只是这时候就不能应用这个定义了，而只能具体地规定函数有限的周期性．一般我们不考虑这样的函数．

在周期性的定义里，还可以看到，这个定义也是属于存在性定义，也就是说，直接从定义出发，我们无法得到具体的周期，尽管要证明一个函数的周期性，并不一定需要求出具体的周期 L 是多少，但无论如何，我们必须从别的地方入手来证明周期的存在性．

周期函数的一个特例是 $y=a$，其中 a 是一个常数．这个函数的周期是任意的实数．

1.1.3 函数的反函数

从函数的定义可以很自然地得到非常有意义的反函数的概念．

所谓函数无非就是自变量与因变量的数值对应，因此这种对应也可以在相反的方向上成立，即因变量的数值与自变量的数值的对应．当然，如果要想使得得到的这个新的数值对应仍